



中国高等教育学会教育数学专业委员会2025学术年会

网络画板赋能高校及中小学教育研讨会



# “动”见几何： 网络画板赋能数学实验 数智驱动几何思维发展

浙江省台州市椒江区人民小学

金美琴

2025.07.26日 于 重庆



“动”见几何：

网络画板赋能数学实验

数智驱动几何思维发展

——基于具身认知与TPACK框架的实践探索

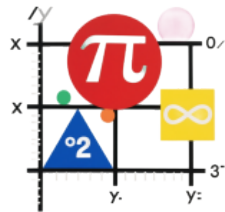


# 发展几何思维

浅层、难而生畏

融合数学实验

深度、易而生趣



几何知识：抽象性→形象可视化

中小学实验教学基本目录  
(2023年版)



教材与学材：静态→过程动态化

教育部教育技术与资源发展中心（中央电化教育馆）制定

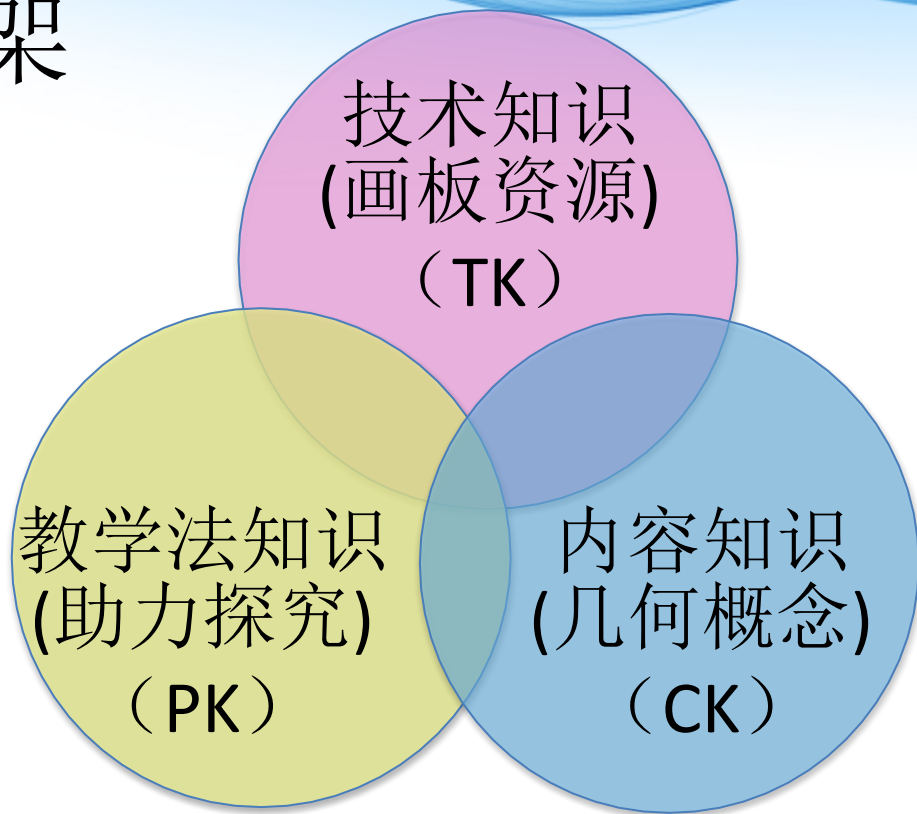


师演生观看：离身→具身游戏化



网络画板优势：可操作性表征、即时反馈

# TPACK框架



# 六年级

## 《数学有意思》

### —硬币的滚动



# 教材与学材 第一个游戏

## 硬币与直线



### 活动1 硬币在直线上的滚动

#### 问题猜想

让一枚1元硬币沿着一条直线滚动一周，如果把硬币看成一个圆，那么圆心做怎样的运动？圆心经过的路程是多少？



#### 实践操作

1. 动手做一做，画一画。

在硬币的圆周上标上一点A，并把它作为起点，然后握住硬币，让硬币在直尺上滚动一周。先观察硬币的滚动过程，再在下面画出其圆心的运动路径。



2. 玩一玩，验证你的想法。

如果你有万花尺，可以用齿轮图片代替硬币，把笔戳在圆心里，在直线齿轮轨道上画线，验证你的想法。若没有万花尺，也可以用圆形硬纸片代替硬币，让圆形硬纸片在直尺上滚动，验证你的想法。



#### 交流讨论

将你的发现与同伴交流、分享。



我发现硬币滚动一周的路程就是硬币的周长。

我发现圆心做平移运动，平移的路程与圆的周长相等。



#### 方法总结

如下图，圆心平移的路程 = 硬币滚动一周的路程 = 圆的周长。

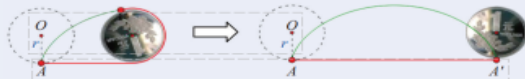


#### 拓展应用

起点A的运动路径是怎样的？想一想，并用万花尺验证。在下面画一画点A的运动路径。

#### 回顾与反思

如下图，绿色线就是点A的运动路径。







## 活动2 硬币在直角上的滚动

### 问题猜想

如右图,如果让一枚1元硬币(直径2.5cm)沿着一条折线(两条线段相交成直角)滚动一周,其圆心做怎样的运动?圆心经过的路程是多少?



### 实践操作

先猜想,并在右上图中画出圆心运动的大致路径,再用硬币滚动一周,验证你的猜想,然后算出圆心经过的路程。



### 交流讨论

你在实践操作过程中有什么问题与发现?与同伴交流。



圆心先做平移运动,到直角顶点处拐角做旋转运动,后来再做平移运动。

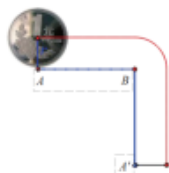
我发现硬币在拐弯时,边缘与点B的接触点不动,但圆心在旋转,绕点B旋转了 $90^\circ$ 。



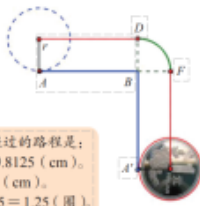
我原来以为硬币还是滚动一周,就猜想圆心经过的路程等于圆的周长,经过实际操作之后发现原来的猜想是不对的。



我画了图(如右图),发现圆心经过的路程比圆的周长要长,多了转角处做旋转运动的路程。



硬币沿着一条折线滚动一周,途中绕过一个直角时,圆心经过的路程确实比圆的周长要长。因为硬币在绕过直角时,还做了旋转运动。那么,圆心经过的路程是多少呢?硬币转了多少圈呢?



硬币的直径是2.5cm,圆心经过的路程是:  
 $3.14 \times 2.5 + 3.14 \times 2.5 \div 4 = 9.8125$  (cm)。  
 圆的周长是  $3.14 \times 2.5 = 7.85$  (cm)。  
 硬币转的圈数是  $9.8125 \div 7.85 = 1.25$  (圈)。



硬币在直角上的滚动与其在直线上的滚动相比,运动路程多了一个直角拐弯,直角是 $90^\circ$ ,也就是多了 $\frac{1}{4}$ 圆周长。不计算我也知道硬币转动了1.25圈。

设硬币的半径为 $r$ 。

圆心经过的路程是

$$2\pi r + 2\pi r \div 4 = 2.5\pi r。$$

圆的周长是 $2\pi r$ 。

硬币转动的圈数是  $2.5\pi r \div 2\pi r = 1.25$  (圈)。



比一比:上述三种方法有什么相同点和不同点?

### 回顾与反思

不管用哪种方法,我们都要能想象硬币在直角上滚动与在直线上滚动的不同之处。硬币在直角上滚动时,圆心绕直角顶点旋转了 $90^\circ$ ,得到的圆心经过的路程比圆的周长多 $\frac{1}{4}$ 。

# 第二个游戏

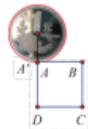
## 硬币与多边形



### 活动1 硬币在正方形上滚动

#### 问题猜想

如右图，一个与1元硬币（直径2.5cm）等周长的正方形ABCD和1枚1元硬币，硬币从点A出发，按A—B—C—D—A的路线滚动，并回到原位。圆心是怎样运动的？正方形的周长就是圆心经过的路程吗？硬币转了多少圈呢？请猜想一下。



#### 操作验证

怎样验证你的猜想？请想一想，并在上图中画一画。然后用万花尺验证你画的路径是否正确。（如果没有万花尺，可以自制一个圆形硬纸片，中间戳一个洞，代替万花尺。）最后算一算圆心运动的路程。

---

---

---

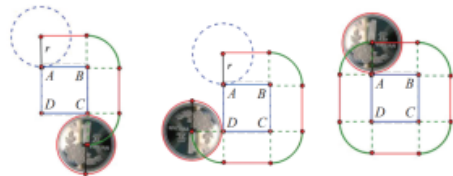
---

---

#### 交流思考

与同伴交流你的猜想和验证结果。

#### 1. 圆心运动的路径。



我发现了一个规律：当硬币在线段上滚动时，圆心就平移；当硬币滚到直角顶点处时，圆心就做旋转运动。

圆心沿正方形的边做平移运动时，运动路径是线段。圆心经过正方形的顶点时，是做旋转运动，运动路径是圆弧，并且圆弧的长度等于圆周长的 $\frac{1}{4}$ 。

#### 2. 圆心经过的路程与硬币滚动的圈数。

圆心平移的总路程等于正方形的周长。圆心旋转的总路程等于一个圆的周长。圆心运动的总路程是： $3.14 \times 2.5 + 3.14 \times 2.5 \div 4 \times 4 = 15.7$  (cm)。圆周长为7.85 (cm)。硬币滚动的圈数是： $15.7 \div 7.85 = 2$  (圈)。

设硬币的半径为 $r$ ，圆心经过的路程是： $2\pi r + 2\pi r = 4\pi r$ 。硬币滚动的圈数是： $4\pi r \div 2\pi r = 2$  (圈)。



画了图之后，我知道圆心平移经过的路程等于正方形的周长，就等于1个圆周长。在正方形的4个直角拐弯处，圆心做旋转运动，4段圆弧长的和就是1个圆周长。所以硬币一共滚动2圈。

我可以进行推理。圆心每经过一个直角，旋转经过的路程就多 $\frac{1}{4}$ 圆周长，硬币滚过正方形的4个角，圆心经过的路程就多1个圆周长。所以硬币一共滚动2圈。

#### 回顾与反思

我们有了硬币在一个直角顶点处滚动的经验，就可以想像圆心在另外3个直角顶点处的旋转运动情况。想象、画图、推理，都是帮助我们运用已学的知识解决新问题的方法。



### 活动2 硬币在多边形上的滚动

#### 问题猜想

如果硬币滚动的路径不是正方形，而是其他多边形，如三角形、长方形、梯形等，那么圆心可能会做怎样的运动呢？请你想一想，试着画一画圆心的运动路径，算一算圆心运动的路程。





# 第三个游戏

## 硬币在硬币上的滚动

### 问题猜想

有甲、乙两枚相同的硬币，固定硬币甲，让硬币乙沿着硬币甲的边缘滚动1周。硬币乙旋转了几圈？



我将硬币乙正好旋转了1圈。

不一定。



会正好是旋转1圈吗？想知道硬币乙旋转了几圈，要关注硬币乙的圆心运动情况。

### 实践操作

1. 找两个1元的硬币，同桌合作，让两个硬币的边缘紧贴，不要滑动。



2. 慢慢地让硬币乙沿着硬币甲的边缘滚动1周，观察硬币乙的圆心绕硬币甲圆心的旋转角度，从硬币乙上“1”字的朝向判断硬币乙旋转的圈数。

### 交流讨论

请跟你的同伴交流想法。



我把硬币乙放在硬币甲的正上方，从“1”字朝上开始，在两个硬币的接触点处做记号A，作为起点。



“A”回到原处，硬币乙滚动了硬币甲的1周，硬币乙的圆心绕硬币甲的圆心旋转了360°。硬币乙旋转了2圈。



硬币乙滚到最右边时，滚动了硬币甲圆周的 $\frac{1}{4}$ ，硬币乙的圆心绕硬币甲的圆心旋转了90°。“1”字第一次朝下，硬币乙旋转了半圈。



硬币乙滚到硬币甲的正下方时，滚动了硬币甲圆周的 $\frac{1}{2}$ ，硬币乙的圆心绕硬币甲的圆心旋转了180°。“1”字重新朝上，硬币乙旋转了1圈。



动画  
二维码

### 反思

你猜对了吗？猜硬币乙旋转1圈的同学到底错在哪里呢？关注点是在硬币乙圆心的运动路程上？

### 操作验证

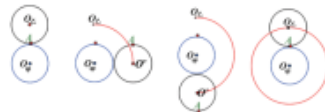
请再操作一次，注意观察硬币乙的起点A回到原处时，硬币乙圆心的运动路径。



取万花尺的两个齿轮图片甲、乙，用笔插在齿轮图片乙的圆心上，模拟硬币乙绕硬币甲转动一周的情形，画出圆心运动的路径。没有万花尺的可以用圆形硬纸片代替，在其中一个圆的圆心戳一个洞即可。

### 交流思考

观察下图，蓝色线是硬币乙的滚动路径，红色线是硬币乙的圆心运动路径。你有什么新的想法了？请跟同伴交流。



当硬币乙的起点A转回原处时，硬币乙滚动的路程等于硬币甲的圆周长。

想知道硬币乙旋转了几圈，应关注其圆心的运动情况。我们原本以为硬币乙圆心运动的路程等于硬币甲的圆周长。现在发现这是不对的。



硬币乙的圆心绕着硬币甲的圆心旋转了360°，运动路径是一个大圆，如上图的红色圆。这个圆的半径是多少呢？

我知道了，它的半径=硬币甲的半径+硬币乙的半径。如果设硬币的半径是 $r$ ，那么这个红色圆的半径就是 $2r$ 。



动态过程、运动分解、  
轨迹追踪、测量计算  
等

教师用的资源  
学生实验资源

技术知识  
(画板资源)  
(TK)

教学法知识  
(助力探究)  
(PK)

内容知识  
(几何概念)  
(CK)

数学实验载体：  
圆在多边形(或圆)  
上的滚动，圆心  
经过的路程

数学素养：  
空间观念、推理  
意识、几何直观、  
应用意识等

情境驱动

猜想交流

具身验证

迁移应用

# 【一】 情境驱动

## 情境导问





# 【一】 情境驱动

├ 情境导问

└ 任务驱动

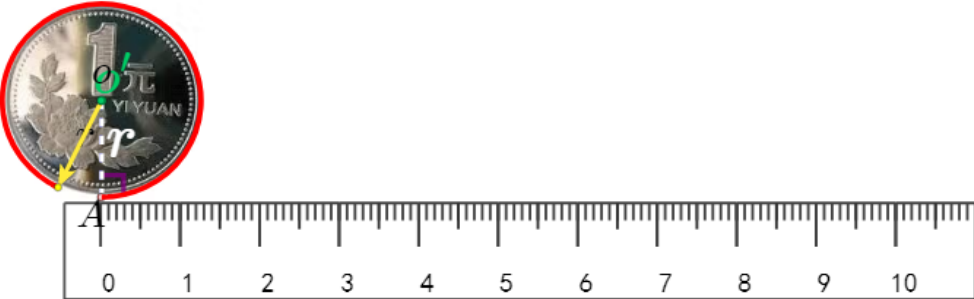
# 【一】 情境驱动

情境导问

任务驱动

直径2.5cm的硬币在尺子上滚动一周

显问



$\omega_0 = 0$

显平移

隐尺子

动画 ▶ ◀



## 【二】 猜想交流

猜想假设

交流悬疑

数学实验一：硬币在直角上滚动，  
圆心作怎样的运动？经过的路程是多少？

画一画



动画0▶

把 $2.5\pi$  长的线段折成一个直角

显反馈

先“重置”  
再“动画”



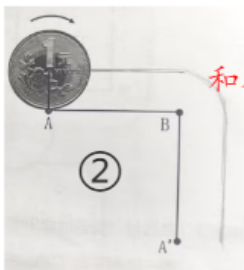
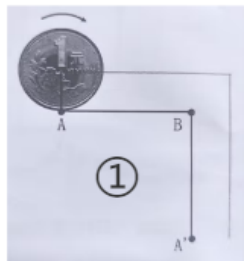
## 【二】

# 猜想交流

猜想假设

交流悬疑

5次教学统计:超 $\frac{2}{3}$   
猜想"7"字形



把 $2.5\pi$ 长的线段折成一个直角

硬币在直角上滚动一周

哪一种是对的?  
和在直线上的滚动比有什么不同?

动画1▶

整体动画▶

先“重置”  
再“动画”



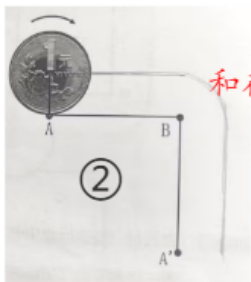
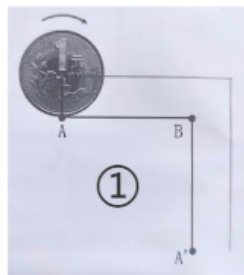
# 【三】

## 具身验证

具身协作

验证释疑

5次教学统计:超 $\frac{2}{3}$   
猜想"7"字形



动画1▶

整体动画▶

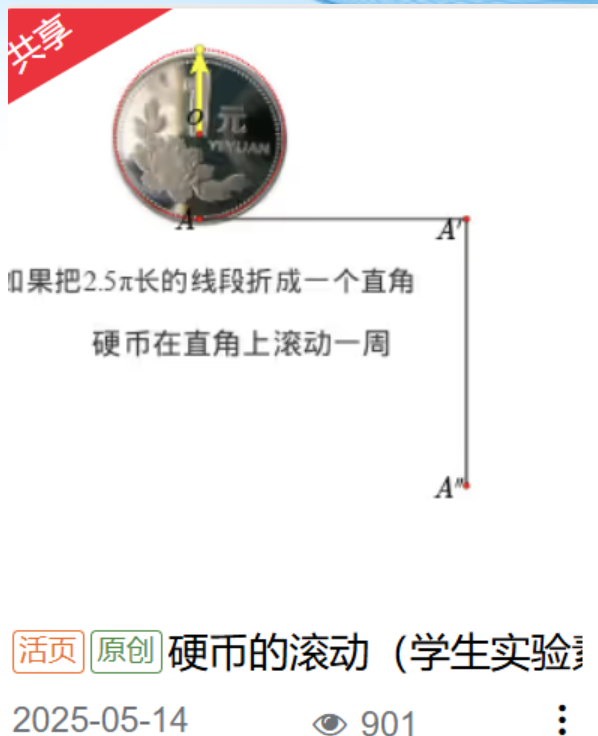
先“重置”  
再“动画”



## 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展



先想象交流

再网络画板  
具身验证

# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展

活动二：硬币在边长为2cm的正方形上滚动一周

要求：先用尺子和圆规画，  
再用网络画板（2）验证，  
最后算一算圆心经过的路程。



圆心经过的路程：\_\_\_\_\_

整体动画▶◀

(只列式不计算)

思维导航(分步)▶

显二维码

重置

帮助



# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展

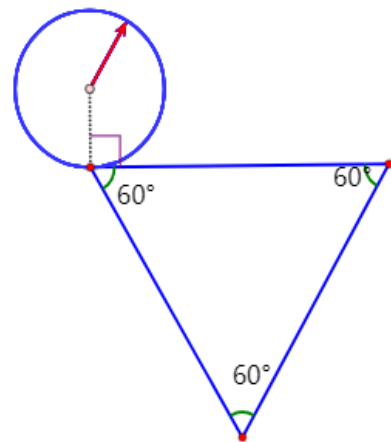
圆在正三角形上的滚动一周

整体动画▶

使用前请双击:

“重置”按钮

分步动画▶



先画再用网络画板验证



# 【四】 应用建模

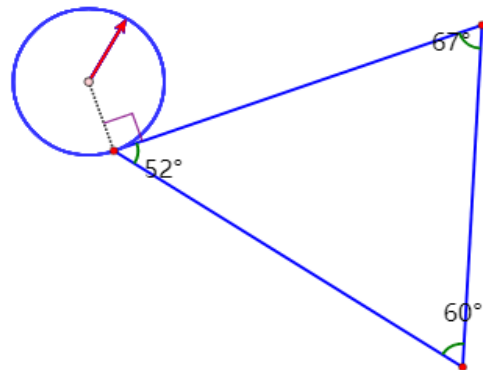
应用推广

建模拓展

圆在任意三角形上滚动一周

整体动画▶

分步动画▶



提示：可以拖动三角形的顶点

使用前请双击：

“重置”按钮



显二维码

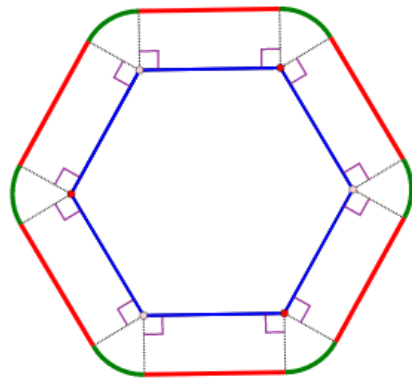
# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展

动画▶

先画再用网  
络画板验证

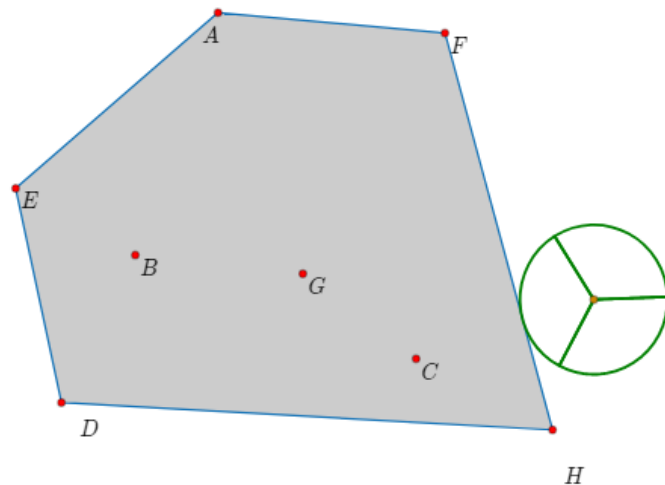


# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展

圆在任意多边形上的滚动



动画 ▶ ◀

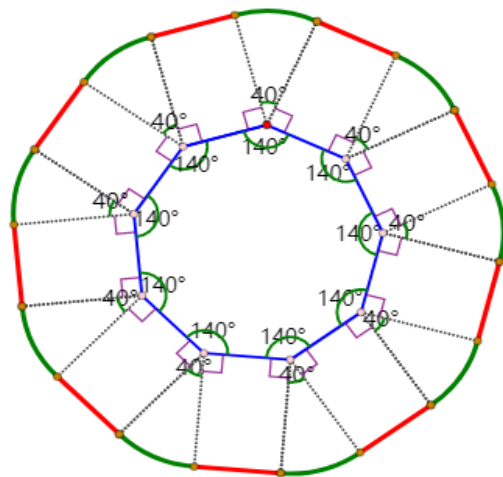
显二维码

重置

# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展



$R = 0.8$

$n = 9$

加1边



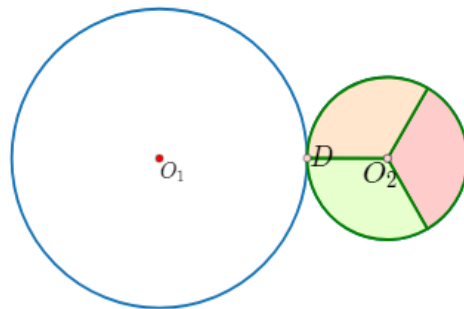
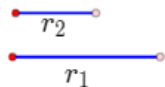


# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展

动画 ▶ ◀

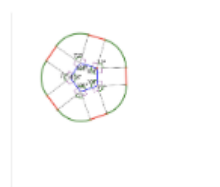
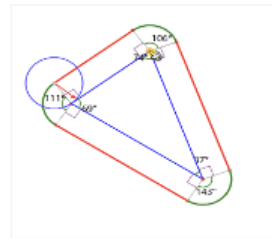
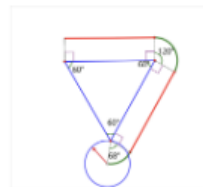
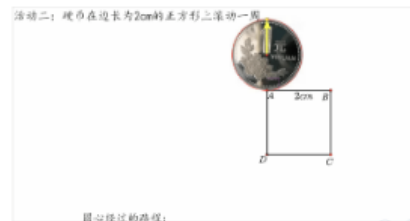


# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展

我们学了什么？怎么学的？你对今天的课怎么评价？



隐藏

# 硬币的滚动

平移+旋转

直线

$C_{\text{圆}}$

猜想

直角

$C_{\text{圆}} + 1/4 \text{ 圆}$

正方形

$C_{\text{正}} + C_{\text{圆}}$

验证

三角形

$C_{\text{三}} + C_{\text{圆}}$

多边形

$C_{\text{多}} + C_{\text{圆}}$

解释

.....

圆

$C_{\text{圆}} + C_{\text{圆}}$

应用

# 【四】 应用建模

应用推广

建模拓展



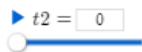
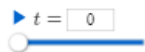
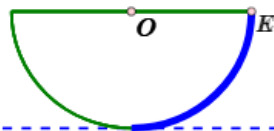
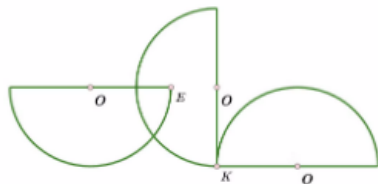
一个直径为6分米的半圆形工件，未搬动时如图所示，直径平行地面放置，搬动时为了保护圆弧不受损伤，将半圆做如图所示的无滑动翻转，使它的直径贴在地面上，这时圆心 $O$ 经过的路线的长为（ ）。

A、12dm

B、6dm

C、9.42dm

D、7.71dm



隐藏轨迹

思维导图▶



# 【四】 应用建模

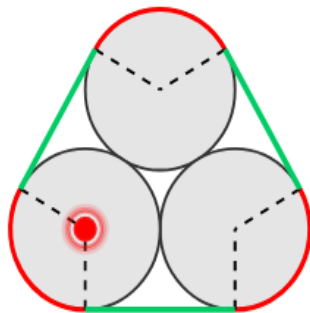
应用推广

建模拓展



## 捆扎圆柱形物体

有3根半径为50cm的圆柱形水管，现在用一根绳子将它们捆扎在一起，最短需要多长的绳子？（打结处不计）



闪烁点可以拖动

动画▶

结论

设置

帮助



智用网络画板，让几何“动”起来，让思维“活”起来。

会制作资源 → 善用资源设计学习任务与探究性活动  
(TPACK融合能力)

关注“技术炫酷” → 关注“数学本质揭示” (数学教学价值)



敬

请

指

教

