

- 国家新闻出版广电总局认定的首批学术期刊
- 全国中文核心期刊（第一版、第二版）
- 全国优秀科技期刊
- 人大复印资料重要来源期刊
- 中国知网、万方数据、龙源期刊、维普资讯、长江文库、超星等全文收录

中·学·数·学

导向性 · 探索性 · 实用性 · 资料性

ZHONGXUE SHUXUE



主管: 湖北省教育厅
主办: 湖北大学

9

2025年 第17期
上 | 总第735期



中·学·数·学

2025年第17期 9月上半月(总第735期)

2025年9月10日出版

主 管:湖北省教育厅

主 办:湖北大学

编 辑 出 版:《中学数学》编辑部

主 编:吕顺营

投 稿 信 箱:zxsxzzs@163.com

主 编 信 箱:823356045@qq.com

电 话:027-88661195

国 内 总 发 行:湖北省邮政报刊发行局

发 行 范 围:国内外发行

中国邮政报刊订阅网址:<http://bk.11185.cn>

国 内 邮 发 代 号:38-69(上半月)

国 外 邮 发 代 号:M4227

印 刷:武汉市楚风印刷有限公司

国 内 统 一 连 续 出 版 物 号:CN 42-1167/O1

国 际 标 准 连 续 出 版 物 号:ISSN 1002-7572

订 阅:全国各地邮政局(所)

订 阅 地 址:武汉市友谊大道 368 号

湖北大学《中学数学》编辑部

邮 编:430062

特色展台

讲题比赛

- 1 波利亚解题思想在新定义问题中的启发
——以2024年新高考I卷第19题为例
.....陈曼玉 张满义 刘晓丹 张玉环 张艺兵

课程视点

数学教育

- 4 “三新”背景下数学文化的渗透与应用胡勇
教材点击
6 聚焦新教材 探索新专题 深挖三角形系列性质
.....李梅 盛娇
8 一道课后习题的解题分析王小霞

教法探索

教学研究

- 10 GeoGebra辅助三棱锥的棱切球教学案例陶中满
13 用网络画板学习函数单调性概念汪卫先 何棋
16 导数大单元教学设计的若干思考
——以人教A版新教材为例程雷虎 陈耀忠 陶平
19 以直觉锁定特征 借目标优化运算
——函数极值点偏移的思考陈炳泉
教学导航
21 核心素养视角下的高中数学建模起始课聂莹莹
24 深度学习下教学评一体化在函数教学中的实践探索朱旭颖
案例赏析
26 “三新”背景下“概率与统计”教学案例赏析王春凤
29 回归原点提素养,高数视角本质彰
——以2023年新高考II卷第22题说题为例
.....贺婷婷 章媚媚 程玉坤
33 近几年全国新高考I卷试题的导向作用分析及教学启示
.....季国宾
35 高考整体性复习中主题化教学设计的实践与思考
——以“等差数列和等比数列”复习教学为例乔秀娟
37 指向深度学习的椭圆概念教学安金龙

学生学习

学生培养

- 39 运用“算两次”思想,培养学生的多角度思维崔绪军
42 立足数学运算,培养核心素养白焕
学习指导
44 数列求和问题的七种常用方法李秋慧
47 “同构法”在圆锥曲线切线问题中的应用王玉秀
49 函数与方程的转化,函数与图象的应用田宏达
51 三角函数解析式中参数“ ω ”的求解刘雪娇
53 对数均值不等式在导数解答题中的妙用刘冰
55 数列中的放缩技巧张云
57 借助平面向量的坐标运算速解最值习题罗文婷
59 化归法在高中数学解题中的应用分析马应梅

评价透视

试卷评析

- 61 2024年新高考I卷数列试题分析 杨锦坤
命题研究
63 对一道高考题进行改编的新尝试 王晓霞 刘 宠 王勤业
66 多项选择题的命制与应对策略 毕丽霞

解题天地

解题研究

- 68 高中生圆锥曲线解题的认知分析及建议 姜兴荣
70 GeoGebra在立体几何解题教学中的应用 冯梓涵 王建云 张茜茜
72 例谈“多元”数学问题的“一元化”处理 刘澍宁
74 直观想象、逻辑推理、数学运算的协同路径——2025年新高考I卷第17题解题评析与教学启示 吴琪
试题研究
76 圆锥曲线内接三角形的“变”与“不变” 韩建坤
78 一道平面向量试题的探究与思考 安世海
81 追根溯源巧拓展,发散思维妙应用 田曦
83 2024年新课标II卷第19题的证明、推广与背景分析 黄明才
85 代数与几何比翼,技能与素养齐飞——一道数量积取值范围题的探究 王娟娟
87 开拓思维巧发散,“一题多解”妙应用 段 兰
89 一道高三月考椭圆试题的拓展探究与教学启示 陆超群
91 2025年数学新高考I卷第14题的探究 李丹丹
93 追根溯源回教材,综合应用归基础——2025年高考数学新高考I卷第13题的探究 赵丽云
95 2023年新高考II卷和2020年全国I卷的解析几何大题的解法对比 邵国祥
解法探究
97 用导数法研究函数的零点问题 冯联英
99 主元法的巧妙应用 钱 宁
101 从“数”与“形”的交融破解高中数学难题 邵瑾波
103 同构函数显身手,特殊思维妙应用——一道大小比较题的探究 潘妙妙
105 类型与方法对应,技巧共素养一色:一道解三角形题的探究 姜国生
107 不等式恒成立,参数范围确定 唐旭萍
109 例谈三角函数最值的几种求法 陈 健
111 借助构造法,妙解不等式 孟祥安
新题征展
113 莫让“定义”遮望眼,唯有“探究”识真颜——以一道数列新定义题为例 朱艳
115 解密高中数学创新题型的解题思路 刘江燕

教师发展

教学感悟

- 117 “深度学习”生态形成:教学中的“加”“减”法 钟穗华
121 一次利用直观想象解题带来的风波 张 波
123 发挥课堂作用,提升数学素养 高 影
125 新高考模式下的高中数学教学策略 刘东海
争鸣探索
127 一类带绝对值的函数最值问题分析及应用 丁钰立 沈荣鑫



中学数学微信公众号



中学数学手机网站

投稿声明

本编辑部原邮箱 hbzxsx@126.com 作废,目前只从投稿邮箱(zxsxzs@163.com)接收稿件,本编辑部没有通过任何投稿网站、APP 或微信小程序接收稿件,所有标注《中学数学》的投稿网站、APP 或小程序均为假冒,欢迎广大作者踊跃举报(举报电话:027-88661195 18971096312). 凡经假冒《中学数学》的投稿网站、APP 或小程序投稿蒙受的损失,本编辑部概不负责.

撰稿指南

1. 选题反映当前教育教学的热点、突出解决教育教学中的重点难点问题. 论文选题及杂志栏目设置请关注微信公众号(湖北中数)或 h5.zxsx.vip 网站.

2. 稿件请按照本编辑部提供的排版格式模板进行排版,建议排成整版;具体要求请关注微信公众号(湖北中数)或 h5.zxsx.vip 网站下载排版格式模板.

3. 投稿电子信箱: zxsxzs@163.com.

4. 文责自负,谢绝一稿多投.若发现一稿多投或其他不良行为,将加入本杂志社的黑名单.

5. 审稿周期及录用通知:

(1) 稿件审稿周期为 15 天至 3 个月;

(2) 若通过审稿,编辑部会以电话、短信或邮件方式通知作者,除非作者要求,一般不采用录用通知单的方式通知;

(3) 编辑部电话: 027-88661195

15327418966.

版权声明

本刊已加入中国知网、万方数据、龙源期刊、维普资讯、超星期刊网、中教数据、长江文库等期刊数据库,凡经本刊刊发的文章,本刊享有其以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播权. 所有署名作者向本刊提交文章发表之行为视为同意上述声明. 如作者不同意网络传播,请在投稿时声明,本刊将做适当处理.

中 学 数 学

2025年9月上

第17期 总第735期

要让学生们从心底里热爱
所学的专业 愿意将精力
投入进去

— 龙以明

二〇二五年八月汪杰良书



国内统一刊号：CN 42-1167/O1

国际标准刊号：ISSN 1002-7572

国内邮发代号：38-69

定 价：15.00元



ISSN 1002-7572



9 771002 757254

17>

用网络画板学习函数单调性概念^{*}

● 四川省射洪中学校 汪卫先

● 北京市第一〇一中学 人教社数字教育重点实验室兼职研究员 何 棋(通讯作者)

摘要:利用网络画板创设动态数学平台,作出函数图象和图象的动点,并且测量出动点的坐标,在点运动的过程,观察横纵坐标的变化规律,进而归纳抽象出单调性是研究函数值随着自变量变化而变化的规律,形成函数单调性的规范定义.同时,也直观演示典型错误,加深对函数单调性概念的理解.培养学生的直观想象和数学抽象核心素养.

关键词:网络画板;动态数学;单调性

1 提出问题

学生在理解和使用单调性概念的时候经常出现诸如循环论证等错误,其原因一方面是学生还习惯于初中死记硬背式的学习方法,还没有形成高中数学以理解性学习为主的方法.而高中阶段函数是基于集合与映射的观念来定义的,各种性质也都是用数学符号语言来严格刻画,因此需要深刻、理解性且触及本质的学习.另一方面教师在教学时主要靠讲授,最多是在黑板上画个示意图,学生需要直接进行抽象的想象和思考,能否理解透彻就看学生自己的素质.

我们都知道对同一个数学对象,至少可以进行“数”和“形”两种形式的多元表征,并附以情境、操作、动态视觉等其他表征形式.唐剑岚^[1]教授的研究表明,通过数学多元外在表征和数学多元内在表征相互间的转化作用能促进学生对数学概念的理解,有助于学生完善认知结构,提高数学表达能力,提升数学素养.人教社章建跃主任的研究表明,借助信息技术实现数学对象变化过程的“可视化”“连续性”,以有序的变化过程帮助学生发现“不变量”“规律性”.他提出对照以核心素养为统领的课改诉求,必须从完善课程内容、加强实践环节入手,而以“数学实验”为载体的教学创新适逢其时^[2].因此,有必要借助信息技术手段,创设动态数学情境,帮助学生进行直观想象、抽象概括形成概念.

2 实践案例

2.1 创设情境,复习函数的概念

教师播放东京奥运会上中国田径首枚金牌获得

者巩立姣投掷铅球的视频,她夺冠成绩是 20.58 m.同时提出问题如果把铅球想成一个点,铅球的运动轨迹能够看作一个函数的图象吗?

教师根据学生的讨论,打开课件,点击动画按钮,铅球从点 A 出发运动到点 B 落地,重复几次后,再显示出运动的轨迹(如图 1).

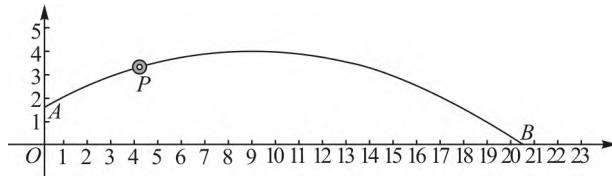


图 1

教师总结学生讨论的结果,形成共识,以铅球水平运动方向为 x 轴正方向,铅球出手位置的竖直线为 y 轴建立平面直角坐标系,则自变量 x 是铅球水平运动距离,因变量 y 是竖直高度,因为每个水平距离对应着唯一的一个竖直高度,并且水平距离的范围是区间 [0, 20.58],因此符合函数的定义,它是一个函数,定义域就是 [0, 20.58].教师操作课件,显示出点 P 坐标,拖动点 P,不断改变位置,坐标也相应改变,让学生体会函数的概念.

问题 1 从左往右看,这个函数图象怎么变化?

图象的变化趋势是先上升,达到最高点,再下降到 0.进一步归纳出:最高点左侧函数的值随着 x 的增大而增大,右侧函数值随着 x 的增大而减小,函数在每个区间上具有的这种性质称之为单调性.

设计意图:通过回顾巩立姣夺得奥运金牌的视频,激发学生参与学习的热情,培养爱国情怀;同时用网络画板模拟铅球运动轨迹,动态展现轨迹生成过

* 课题信息:四川省 2024 规划一般课题“‘三新’背景下网络画板与高中数学课堂教学深度融合的实践研究”,课题编号为 SCJG24C194.



程,显示出轨迹上点的坐标,引导学生从函数的概念来认识与分析动点轨迹,复习函数概念,调动学生原有函数的认知结构,引出函数的单调性.

2.2 单调性概念的构建

问题2 如何刻画函数值 y 随 x 增大而增大?

教师操作课件,先显示函数 $y=2x+1$ 的图象、动画 P 点, P 点在函数图象上从左下向右上方运动,然后显示出函数图象上的 Q 点,并且度量出 P, Q 的坐标,再运动 P, Q 两点,观察它们的横坐标大小关系、纵坐标大小关系.如图 2.

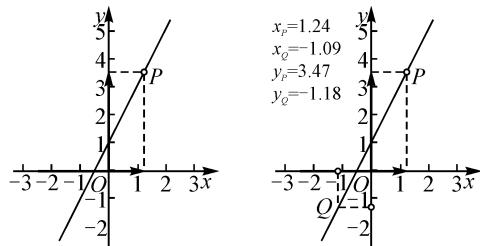


图 2

根据现象概括:在运动的过程中,当点 P 的横坐标比点 Q 横坐标大时,点 P 的纵坐标就比点 Q 纵坐标大.这说明对于 x 的两个值 x_1, x_2 ,如果 $x_1 > x_2$,相应的函数值 $y_1 > y_2$,这就叫 y 随 x 的增大而增大.

教师操作课件,先显示函数 $y=x^2$ 的图象,动画 P 点, P 点在函数图象上先向下运动再向上运动,然后显示出函数图象上的 Q_1, Q_2 两点,以及 P, Q_1, Q_2 的坐标,可以运动 Q_1, Q_2 两点,分别观察它们的横坐标大小关系、纵坐标大小关系,如图 3.

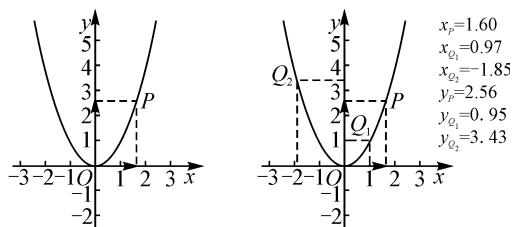


图 3

根据现象概括:在运动过程中,当点 P 的横坐标比点 Q 横坐标大时,点 P 的纵坐标比点 Q 纵坐标有时候大,有时候小,这时不能说明函数在 \mathbb{R} 上是增函数.

怎样才能保证函数是增函数呢?就需要做到“任意”的 $x_1 > x_2$,都有 $y_1 > y_2$,不能出现当 $x_1 > x_2$ 时,有时候 $y_1 > y_2$,有时候 $y_1 < y_2$.如果出现这种情况,就需要将定义域分成两个或者多个区间,来保证任意区间内的任意 $x_1 > x_2$,都有 $y_1 > y_2$ (或 $y_1 < y_2$).比如对于函数 $y=x^2$,在区间 $[0, +\infty)$ 上就可以保证“任意”的任意 $x_1 > x_2$,都有 $y_1 > y_2$;在区间 $(-\infty, 0)$ 上就可以保证“任意”的任意 $x_1 > x_2$,都有 $y_1 < y_2$.

因此,要对单调性进行严格定义,需要注意 3 点:一是基于某个区间,当然该区间是定义域的子集;二是需要有两个 x 值的比较,两个 y 值的比较;三是要强调任意性,就是对区间内的所有的两个 x 值,都要满足.在此基础上,教师引导学生概括总结出增函数、减函数的准确定义.

设计意图:通过课件展示函数图象,引导学生直观感受图象的升降,并度量出图象上每一点的横纵坐标,将点的运动变化和坐标的数量关系的变化对应,揭示 y 随 x 变化的规律.同时通过技术真正实现跟踪图象上的任意点,帮助学生完成数学抽象,深化对“任意”的理解,最终构建函数单调性的概念.

2.3 概念深化

问题3 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内是减函数,该说法是否正确?

学生进行讨论,教师

根据学生的讨论情况操作课件,显示出函数的图象及图象上的 P, Q 两点坐标,并且拖动点 P 和点 Q ,使得 P, Q 在 y 轴同侧和两侧,得出坐标的变化规律不一致,如图 4.同时强调,尽管函数在不同区间单调性可能一样,但是不能轻易用“ \cup ”连接两个区间,加深学生对概念的理解.

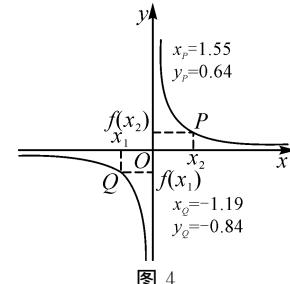


图 4

形成共识:该说法错误.因为当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 > y_2$,但是当 $x_1 < 0, x_2 > 0$ 时, $x_1 < x_2$,而 $y_1 < y_2$,这样就不满足任意性了,因此不能说函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内是减函数.

请同学用定义证明: $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

教师巡视,发现如下错误做法:

证明:设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,且 $x_1 < x_2$.

所以 $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$,故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

教师请学生分组讨论,但是没有学生指出问题.

教师指出:由 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,且 $x_1 < x_2$,得到

$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$,这是怎么得出的呢?

学生都认为好像自然应该这样,但得出这个结论

的过程用的就是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递

2025年9月上半月

减的性质.原来我们用的这个结论,并没有证明过.而现在我们要证明其单调性,不能再用函数自身的单调性来证明,这就出现了循环论证的错误.我们再回归定义,要说明 y 随着 x 的增加而减少,就必须说明当 x 增大时, y 相应减小,要把 y 的变化用 x 的变化表示出来,才能说清楚变化的相依性.

教师板书(略).

教师总结:证明的核心是把 y 的变化用 x 的变化表示出来,这里就是要把 $f(x_2) - f(x_1)$ 表示成含有 $x_2 - x_1$ 因式的表达式,利用 $x_2 - x_1$ 的符号,最后判断出 $f(x_2) - f(x_1)$ 的符号.

完成证明后,教师再引导学生总结利用定义证明函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上单调性的一般步骤.

设计意图:通过用网络画板课件直观揭示过程,以数形结合的形式来辨析错误,加深对定义中任意性的理解,帮助学生掌握用定义证明单调性的方法,核心是要表达出 y 的变化随着 x 的变化的规律.

3 教学反思

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》对于函数性质提出要求:借助函数的图象,会用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值,理解它们的作用和实际意义.函数单调性的教学,要引导学生正确使用符号语言清晰地刻画函数的性质,鼓励学生运用信息技术学习、探索和解决问题^[3].信息技术与学科教学的“深度融合”包含三个基本属性,即营造信息化教学环境,实现新型教与学方式,变革传统的课堂教学结构^[4].利用网络画板根据函数表达式作出图象、度量坐标等,将“数”“形”两个表征紧密结合,利用图形的直观动态变化,触发学生的思考,通过学生的直观想象和数学抽象完成单调性概念的建构.对错误的反思促使学生掌握用定义证明单调性的方法和步骤.网络画板在学习单调性概念和正确应用的过程中起到了重要作用.

函数单调性的概念是本节课的重点,而如何用符号语言严格定义单调性的形成过程以及能正确用定义证明函数的单调性是本节课的难点.教学中让学生充分感受单调性概念的形成过程,从函数的图象出发,经历观察发现、抽象概括、自主建构单调性概念的过程,在探索函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的单调性,并且用定义严格证明的过程中深刻理解概念和掌握证明步骤,突破这一难点.实现了从“图形语言”到“文字语言”再到“符号语言”的逐步深入,实现“形”到“数”的转换,对单调性概念进行建构.

3.1 怎样用数学语言刻画“增大”

要表示大小关系,需要比较,因此分别对于 x 和 y 都要有2个值进行比较,而学生会用特殊点说明问题,比如对于函数 $y=2x+1$, x 取 $-1, 2$,满足 $-1 < 2$,对应的函数值满足 $-1 < 5$.我们在网络画板课件中看到图象上两个点在很多点位置上变化,点的坐标也随之变化,当然只有用字母才能表示清楚,就是如果 $x_1 > x_2$,对应的函数值有 $y_1 > y_2$.

3.2 对“任意”的重要性理解

通过研究分析函数 $y=x^2$,在图象上任意作出了 P, Q_1, Q_2 三个点,并且测量出它们的坐标,移动点 Q_1, Q_2 到不同位置,发现当 $x_1 > x_2$,有时候 $y_1 > y_2$,有时候 $y_1 < y_2$,因此函数在 \mathbf{R} 上不是增函数,只有当在某个区间上“任意”取 $x_1 > x_2$,对应的函数值有 $y_1 > y_2$ 时,才是递增,因此只有确定好区间,满足所有的 $x_1 > x_2$ 时有 $y_1 > y_2$ 才行.学生更能够理解单调性是函数在某个区间上的局部性质,确定这个区间需要满足“任意” $x_1 > x_2$ 时有 $y_1 > y_2$ 或者“任意” $x_1 > x_2$ 时

$y_1 < y_2$.根据这个原理在探究分析函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的单调区间时,同样用图象上的动点来演示过程,这样学生能够深刻体会到,为什么两个减区间不能用“ \cup ”合并在一起.

3.3 对“随着”的理解和应用

单调性的本质是在某个区间上 y “随着” x 的增大而增大或减小,用定义证明单调性就需要把 y 的变化用 x 的变化表达出来,即要把 $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ 用 $\Delta x = x_2 - x_1$ 表示出来,然后用 Δx 的符号来判断 Δy 的符号,才能正确根据定义证明单调性.显然函数

$f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上递减的循环论证的错误其根本原因是没有利用 Δx 的符号来判断 Δy 的符号.这让学生深刻体会到“随着”的重要性.

参考文献:

- [1]唐剑岚.概念多元表征的教学设计对概念学习的影响[J].数学教育学报,2010,19(2):28-33.
- [2]章建跃.课程改革呼唤数学实验[J].江苏教育,2017(27):18.
- [3]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020.
- [4]何克抗.如何实现信息技术与学科教学的“深度融合”[J].教育研究,2017,38(10):88-92.