学校代码：11658　　　　研究生学号：202213045104010
分 类 号：G633　　　　密　　级：无

海南师范大学
HAINAN NORMAL UNIVERSITY

硕士学位论文

高中三角函数图像直观想象素养的教学探究
———基于网络画板和范希尔理论

论文作者：王思静
指导教师：胡晓华
李宁
专业学位领域：学科教学（数学）
申请学位类别：教育硕士
提交日期：二〇二四年五月

The teaching research of visual imagination literacy of trigonometric function image in senior high school

——based on web sketchpad and Van Hill's theory

A Dissertation Submitted for the Degree of Master

Candidate：Sijing Wang

Supervisor：Xiaohua Hu

Ning Li

Hainan Normal University

Haikou, China

摘　　要

函数内容是高中数学课程的四大主线之一，三角函数非常重要。新课标要求：以学生发展为本，培养和提高学生的数学核心素养。而直观想象素养是高中数学六大核心素养之一。因此，教师如何利用现代信息技术和相关理论去提升教学质量，培养与发展学生的直观想象素养显得尤为重要。这正是本文所关注和研究的问题。本文借助网络画板为多媒体教学辅助工具，以范希尔理论为依据和评价标准，探究如何提高直观想象素养。

研究方法采用问卷法、文献法、访谈法、测试法等。研究对象为笔者所在的某实习校高中一年级的两个班级，为了解学生的直观想象素养的水平，设计了一份调查问卷和相关测试题，并选取两个班作为对照组，实验班采用网络画板软件教学，常规班采用常规 PPT 展示教学，为期一个月。课程内容为三角函数相关章节。获得样本数据后，先通过 SPSS 软件进行了信度效度检验显示通过。其次，利用 SPSS 对范希尔理论的“四个水平”的分数进行了描述性统计分析，总体分析得出了两个班大多数同学的直观想象素养都处在范希尔理论的“水平三”，但是实验班处于“水平三”的学生人数比常规班的多 10%，使用网络画板教学是有助于提升学生的直观想象素养，尤其对通过非形式化的演绎，发现并推导图形分类的性质的能力有着改善效果；网络画板对空间想象能力、图形感知能力和图像描述能力、构建数学模型能力明显有改善，且为数形结合的思想方法打下基础；使用网络画板教学可以提高学生的学习积极性，使得上课节奏、气氛、参与度都得到改善。

为了培养和提高学生的数学直观想象素养，提出如下建议： 在学生层面：（1）提高自身思维能力，设计个性化学习路径，自主探索；（2）学会正确的归因方式，自我即时反馈和调节；（3）激发自身学习动机，充分挖掘自身潜力。在教师层面：（1）需注意理论与实际相结合；（2）尊重学生个体发展；（3）引入情境，培养多样化的解决途径；（4）利用多种表征方式来转化直观想象的图形，在相关图形教学中要充分利用网络画板。在教材方面应该注重学生的发展水平、实践机会、社会文化背景、合作学习、视觉化工具和个性化学习等方面以提高教学效果和学生的学习兴趣。

关键词：函数概念； 数学核心素养； 数学抽象； 教学策略：

Abstract

Function content is one of the four main lines of high school mathematics curriculum, trigonometric function is very important. The new course standard requests: take the student development as the foundation, raises and enhances student's mathematics core accomplishment. The intuitive imagination literacy is one of the six core literacy of high school mathematics. Therefore, how teachers use modern information technology and related theories to improve the quality of teaching, training and development of students' intuitive imagination literacy is particularly important. This is exactly the problem that this article pays close attention to and studies. With the help of the web sketchpad as the assistant tool of multimedia teaching, this paper studies how to improve the visual imagination literacy on the basis of Van Hiel's theory and evaluation criteria.

The research methods used include questionnaire, literature review, interview, and testing. The research subjects were two classes in the first year of high school at a certain internship school where the author worked. In order to understand the level of students' intuitive imagination literacy, a survey questionnaire and related test questions were designed, and two classes were selected as the control group. The experimental class was taught using online drawing board software, while the regular class was taught using conventional PPT presentation for a period of one month. The course content includes chapters related to trigonometric functions. After obtaining the sample data, reliability and validity tests were conducted using SPSS software, which showed that it passed. Secondly, a descriptive statistical analysis was conducted using SPSS on the scores of the "four levels" of Fancher's theory. The overall analysis showed that the intuitive imagination literacy of most students in the two classes was at "level three" of Fancher's theory. However, the number of students in the experimental class at "level three" was 10% higher than that in the regular class. Using online drawing boards for teaching is helpful in improving students' intuitive imagination literacy, especially in improving their ability to discover and deduce the properties of graphic classification through informal deduction; The online drawing board has significantly improved the ability to imagine space, perceive graphics, describe images, and build mathematical models, laying the foundation for the idea and method of combining numbers and shapes; Using online drawing boards for teaching can enhance students' learning enthusiasm, improve class pace, atmosphere, and participation.

In order to cultivate and improve students' visual imagination of mathematics, the following suggestions are put forward: At the student level: (1) to improve their own thinking ability, design personalized learning path, self-exploration; (2) to learn the correct attribution, self-immediate feedback and regulation; (3) to stimulate their own learning motivation, fully tap their potential. At the level of teachers: (1) pay attention to the combination of theory and practice; (2) respect for students' individual development; (3) introduce situations and cultivate diversified solutions; (4) transform intuitive images with various representation methods and network sketchpad should be fully used in the teaching of related graphics;。In terms of teaching materials, we should pay attention to students' development level, practical opportunities, social and cultural background, cooperative learning, visual tools and personalized learning to improve the teaching effect and students' learning motivation.

Key words: Function Concept; mathematics core literacy; mathematics abstract; teaching strategy:

目　录

第一章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 直观想象素养培养的需要

伴随着新一轮的教育变革，几乎所有国家的教育都把重点放在了发展学生的核心素养上。本文将数学的核心素养确定为具体的讨论内容，并对其进行研究。2017 年《普通高中数学课程标准》首次提出了直观想象素养的概念，并得到了普遍的关注，通常情况下，人们都会用自己的直观想象素养来发现和解决问题。通过这种方式，可以让他们对数学问题进行思考，从而更好地帮助他们分析、解决问题，同时也为解决数学问题这个过程提供了一个可视的架构。由此可见，直观想象素养在数学教育中占有非常重要的地位，因此对直观想象素养的培养就尤为重要。

1.1.2 高一学生的发展特点

通过阅读相关的材料，我们可以得到以下观点：高一的学生刚刚脱离初中的教学阶段，而且初中和高中的知识内容和教学方法都存在着不一样的地方，所以他们对高一部分的教学内容仍然处在一个适应期。高一阶段的教学理念和初中的教学理念是不一样的，高中部分的数学对学生的要求较高，要求他们具有较高的自学能力。另外，高中的数学教学和初中数学教学的最大区别就是知识的难度增加，对学生的思考能力提出了更高的要求。因此我们可以看出，刚刚步入高一年级的学生的学习能力不强，学习内容的难度却增加，他们需要加强直观想象素养，去理解平面、空间上具有挑战的新概念、新公式，并理解比较抽象的内容。在当前的形势下，加强高一学生的直观想象素养，已成为目前中学数学教育的热点问题。

1.1.3 课程改革对信息技术的需求

在信息技术迅猛发展的今天，教育信息化已经是一种不可避免的趋势。教育部印发了《教育信息化 2.0 实施方案》，这使得信息科技与课堂融合的呼声越来越高。在常规的教学中，老师们更多地关注于学习成果，忽略了对学生的数学思想和素质的训练，更多的是通过“灌输”式的方式进行。现在，国家经济的发展，教育的进步，老师们将会得到更加便利的教学辅助软件。这就要求我们关注利用 IT 手段进行教学，并将其应用

于数学教育中。在此基础上，本文提出了一种新的基于图形化技术的计算机辅助设计方法——网络画板。另外，网络画板也被列入了新一代《普通高等学校数学教科书》的信息化建设建议中。在上述研究的基础上，本文结合高一新生的发展特征，利用高一的数学教材，把网上画板与课堂教学相结合，从而能够发展直观想象素养。

1.2 问题提出

在高中数学课程改革中，三角函数的学习一直是一个难点，这一点在新课程改革中并没有得到很好的体现。我们国家的高中学生的直观想象水平究竟如何。老师在课堂上的教学策略和辅助工具的选择是否能进一步提高学生的直观想象水平。教科书的编制是否已经趋于完美。这是值得我们深思的问题。这篇论文就是关于高一新生的思考问题的探讨。为教学提供了有效的资料。以下是调查的问题：

（1）高一学生的直观想象素养是怎样的？

（2）教师的授课对网络画板这个软件的使用抱有怎样的看法。

（3）将网络画板软件应用于教学中所得来的成果，是否能在范希尔理论对直观想象素养的评定中，得到较为改善的数据表现。

（4）我们怎样更进一步去结合软件和理论，去对我们现在的学生、教师、教材提出更多的建议。

1.3 研究方法

本篇文章使用了文献研究法、问卷调查法、访谈法、测试法和问答法来研究。通过收集、梳理与范希尔理论、直观想象素养以及网络画板有关的科学内涵、实践经验与实施策略，查阅大量的学术期刊、优秀硕士、博士生和著作，了解学术界主流意见，并据此设计访谈问卷和测试卷。根据网络画板和范希尔理论的适用原则，设计教学设计并实施，为构建本文的理论架构打下理论依据。并且为了更好地了解教师的教学状况，以及学生对课堂授课的理解，笔者随机抽取了部分学生进行了访谈。

1.4 研究思路

本文以高中三角函数知识为载体，研究高一学生的直观想象素养的水平，并用范希尔理论为评价依据进行评估，再用网络画板为教学软件，来测试是否能提高学生的直观

想象素养的水平，制定如下研究思路，如图 1 所示：

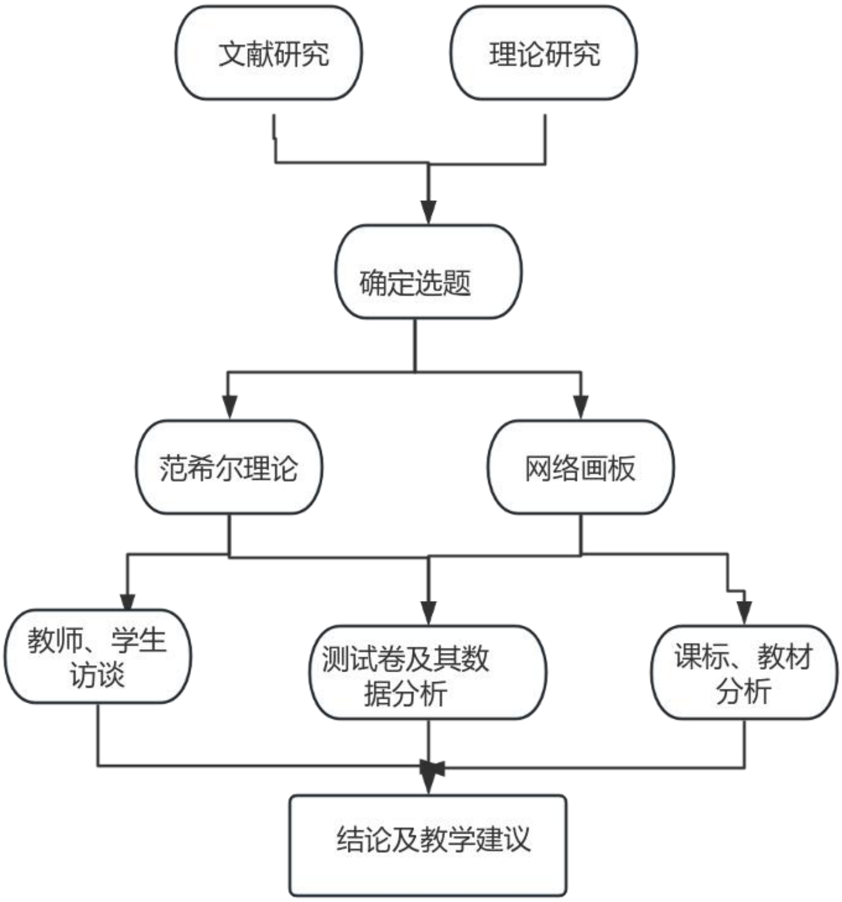


图 1 研究思路框架图

第二章 文献综述与理论基础

2.1 直观想象素养

2.1.1 直观想象素养的概念与内涵

《课程标准（2017 年版）》的“直观想象”含有两个关键词：“几何直观”和“空间想象”[1]。“几何直观”主要是指利用图形进行问题的描述和分析，“空间想象”是指通过直接感知周围环境，学生得到对二维平面和三维空间图形及其性质的理解。在高中阶段，更加强调空间几何图形之间的相互关系、图形变换以及坐标表征。从这里可以看出，学生直观想象素养的形成，需要依托空间形式特别是几何图形，进行数学化的思考和想象。

2.1.2 直观想象素养的教学研究

随着教学法的发展，数学素养的具体内涵也在不断地扩展和变化。

早在 1988 年，加拿大学者就提出了“数学素养”，它是指学生学习、应用数学知识、应用数学方法解决实际问题的能力。它涉及到度量的知觉、解释量的信息、估价和心算的能力[2] 。

2016 年乔霁文以超级画图为工具，研究了学生直观想象素养的培养[3]。通过探究动点问题，动态面积问题等实例，探讨了在应用超级画板的动态函数中，怎样化简数学问题，找出解决问题的方法，并在此基础上，对学生的直观想象素养进行了培养。

2019 年周德明在研究直观想象的基础上，提出了用“几何直观”去认识问题，并在此基础上构建“直观模型”[4]。他认为，教师应通过数形变换拓宽学生的思路，借助几何的直观性，加深对所学知识的理解，进而建立起一种直观的模型，促进其学习能力的提升，从而有效地提高学生的直观想象能力。

朱艳宇于 2020 年发表的《高中生数学直观想象素养的培养策略研究》一文中，采用深度访谈与问卷调查相结合的研究方法，得出了学生在直观想象力培养中存在的最大问题是缺乏空间想象力和实践作图能力。最后，笔者认为，在高中阶段，要加强对学生的实践活动的指导，提高他们的制图能力，并将多媒体和几何技术相结合；通过对学生的观察和思考，将“数形结合”的观念渗透到教学中。

李姝萍于 2020 年发表了《基于核心素养的高中生立体几何解题能力的调查研究》，她认为直观想象素养和逻辑推理素养的缺乏是制约学生解决立体几何问题的最重要的两个原因。在此基础上，从学生和老师两个方面，对如何提升学生的立体几何解题能力，给出了一些可操作的建议[5]。

上述研究证明：直观想象是建立在现实基础上的，经过抽象后，产生了一种新的理解表象并拓展问题的解决途径，加深了学生的抽象认识[6]，增强了对几何的认识。在运用资讯科技来发展学生的直观想象素养方面，已经有关以几何画板与超级画板来提升学生的直观想象力能力的研究，而以网络画板为基础的直观想象素养则几乎未见。

2.1.3 直观想象素养的评价研究

2017 年，陈蓓在其博士学位论文《高中生数学核心素养评价研究》一书中，根据学生的学习特征和发展阶段的特点，把高中学生的数学核心素养划分为“知识技能”、“问题解决”和“综合发展”三个层次。三个层次一层一层地进行，高层次包含低层次内容（如图 2)

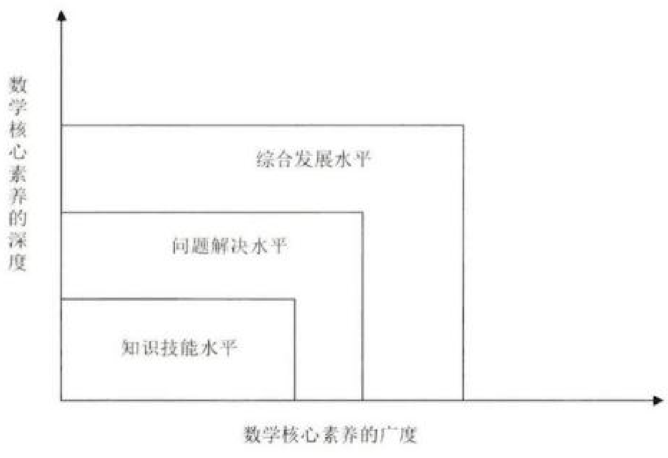


图 2 数学核心素养的广度

郑雪静于 2020 年对福建省 2111 名高中学生进行了《高中生直观想象素养的测量与评价研究》的调查。本研究将直观想象素养水平划分为五个等级，依据对情境和图表的掌握能力的不同将其划分为五个等级，并依此制定相应的测验量表；同时，从实验结果来看，学生的直观想象素养属于中等偏上。男性和女性之间存在着明显的差异。城区整体上好于县，县好于乡。

2.2 网络画板概述

2.2.1 网络画板的定义

网络画板是一种在线应用程序或软件，提供了一个虚拟的绘图工作区，让用户可以通过网络连接进行绘画和创作[7]。它通常包括绘图工具（如画笔、画板、橡皮擦等）、颜色调色板、图层管理功能以及保存和分享作品的功能。用户可以在网络画板上自由绘制、涂鸦、添加文本、插入图片等[8]，实现数字绘画的过程。网络画板的特点是可以通过互联网实时协作，多个用户可以同时在同一画板上进行绘画，实现远程协作和创作。它广泛应用于教育、团队协作、娱乐等领域，为用户提供了一个便捷、灵活且具有互动性的数字绘画平台。

2.2.2 网络画板的功能

(1) 强大的作图功能

网络画板的作图功能包括多种绘图工具，如画笔、橡皮擦、形状工具等，可绘制自由线条、图形，还可添加文字、插入图片，支持图层管理、颜色调整，用户可以通过这些工具创建各种绘画作品，实现数字绘图的过程[9]。

（2）精准测量

网络画板的精准测量功能允许用户在绘图中测量距离、角度等尺寸参数，确保绘制的图形符合预期的尺寸要求。用户可以轻松选择两点，获取它们之间的距离或角度，并在绘图过程中实时获得准确的尺寸信息，提高了绘图的准确性和效率[10]。

(3) 简易的函数图像功能

网络画板的简易函数图像功能允许用户绘制基础数学函数的图像，如线性、二次、三角函数等。用户可以输入函数表达式，画板将自动生成对应的函数图像，并显示在绘图区域内。这种功能使用户能够可视化数学函数的形态和特征，便于学习和教学。

（4）高级的追踪功能

网络画板的高级追踪功能允许用户在绘图过程中实时追踪和记录绘制路径以及可以即时编辑操作。通过追踪功能，用户可以回放绘图过程、撤销或重做操作，并进行详细的编辑和修改。这种功能使用户能够更精细地控制和调整绘图内容，以及更好地理解绘图的历史记录和演变过程，提高了绘图的灵活性和效率[11]。

（5）神奇的变化功能

“轴对称”和“平移与旋转”是数学的难点，也是必考的内容之一。因此，要想提高自己的学习成绩，就必须进行相关的学习。但大多数高一学生的空间想象力水平较低，抽象思维能力较差；这就导致了学生在学习这些学科的过程中难以获得好的结果。网络画板是解决这一难题的较好方法，因为网络画板可根据需要修改某些参数，显示生成的立体图，使学生更加直观地理解图形的演变规律。还能增强它的空间想象能力。

（6）丰富的迭代功能

网络画板的该功能，可以很好地展示教复杂的函数图形。网络画板不仅可以解决这一问题，而且可以在线绘制大量精美的图形，满足不同学生的学习需求。此外，通过改变图形参数，能够有效地转换图形，实现对图形的动态控制[12]。而且还可以吸引学生的课堂注意力，激发他们在动态图形方面的探索兴趣。

2.2.3 网络画板的应用原则

2.2.3.1 适度性原则

界面设计要简洁明了，避免过多复杂的功能，以降低使用难度，使学生能够更轻松地理解和操作。教师在提供适度的提示和指导，帮助学生能在课堂上快速操作，同时又不剥夺学生自主探索的乐趣，从而平衡了引导性和自由度。教师还需要考虑学生的年龄段和技能水平，提供相应的难度调整选项，使得学生能够根据自身情况进行学习和创作。网络画板还具备良好的互动性，并且鼓励学生之间的交流和合作，以及与平台提供者的反馈机制，从而促进学生和教师间的学习和成长。

2.2.3.2 适应性原则

网络画板的教育和培训功能，提供了丰富的学习资源和指导内容，在帮助学生提升直观想象素养的同时，也提供了一个教育性和娱乐性相结合的平台。网络画板的适应性原则包括多样化的用户界面和功能设计、可访问权限和易用程度、跨平台和设备兼容性，以及教育培训功能等方面，以满足不同学生和教师群体的需求，促进直观想象素养的全面提升。

2.2.3.3 目的性原则

网络画板研究直观想象素养的目的性原则在于提供一个有针对性的学习和创作平台，通过优化设计和功能，培养学生的直观想象力，促进创造性思维的发展。作为教育

和培训工具，网络画板还为学生提供丰富的学习资源和指导内容，帮助其在绘画和创作领域取得更好的成就，从而实现直观想象素养的全面提升。

2.2.3.4 循序渐进原则

网络画板通过简单易用的界面和功能引导学生和教师快速上手，了解基本操作和绘画技巧。再逐步引入更多复杂的工具和特效，让用户有机会探索和学习更深层次的绘画技法和创作方法。同时，网络画板也提供适度的挑战和练习，让学生和教师在不断实践中逐步提升技能水平和想象力。此外，通过分级课程或教程，将学习内容分解成多个阶段，按照循序渐进的原则进行教学和指导，让学生能够系统性地学习和提高。最后，鼓励学生进行实践和创作，通过不断的实践和反馈，巩固所学知识，并且培养创造性思维和直观想象素养。

网络画板是一种在线工具，允许用户通过网络在虚拟画板上进行绘画和创作。网络画板还具备创造性、交互性、教学性、实用型、灵活性和跨平台性。这些性质使得网络画板成为了一个功能强大、灵活多样的工具，适用于各种创作、教学、协作和沟通场景。其在直观想象素养的发展和提升的优点主要体现在：1.网络画板提供了实时共享和协作的功能，使得用户可以与他人共同绘制，分享创意，这有助于拓展用户的想象力和创造力，促进了集体智慧的发挥。2.网络画板常常具有丰富的绘画工具和特效，如各种颜色、笔刷、图层等，用户可以通过调整这些工具来实现更加直观、丰富的想象表达，从而提升了用户的美感和审美能力。3.网络画板通常支持多种设备和平台，如电脑、平板、手机等，用户可以随时随地进行创作，这种便捷性有助于激发用户的创作欲望，培养了用户的创造性思维。

2.3 范希尔理论

2.3.1 范希尔理论的几何思维水平

范希尔理论基于格式塔心理学与皮亚杰的认知理论，结合教学实践中遇到的问题，已经成为衡量几何思维水平的重要理论依据。由于翻译及后期范希尔夫妇对该理论进行了修正，因此，国内外学者对该理论的表述存在分歧，本文所采用的是鲍建生、周超《数学学习的心理基础与过程》中 W. Burger 与 W. Shughnessy 对该理论的表述。范希尔夫妇从整体上将学生的几何思维发展分为五个阶段水平[13]，如下表 1 所示：

表 1 范希尔理论的几何思维水平

水平	分析
水平零：前认知水平	学生仅能辨认出物体的局部特点，还无法分辨两种或多种不同形状，但可以辨认同种物体。能够刺激触觉的，更具体的图像，是学生进行推理的目标。
水平一：直观化水平（visual）	学生对于几何的本质并不理解，但是能够分辨出这两个图形。通过对两个图形的直观观察，或根据所学的图形，学生可以做出正确的推断。
水平二：描述/分析（descriptive / analytic）	学生对数的推断，主要是根据数的类别或数的一致性来进行判定。通过推理，学生能发现事物间的关系，对事物进行归类，判断事物的属性。
水平三：抽象/关联（abstract / relational）	学生可以对图形进行分层次的分类，通过非形式化的演绎，发现并推导图形分类的性质，但是，他们仍不能够理解逻辑推理是建立几何真理的方法。
水平四：形式推理（formal deduction）	可以对定理进行证明，并通过形式化的推理加以说明定理和公理。
水平五：严密性/元数学（rigor metamathematical ）	学生能够导出几何公理和定理等几何表达式。在学习过程中，学生通过构建自身的几何公理体系或在形式结构间建立联系来进行推理。一般情况下，数学家可以做到这一点。

2.3.2 范希尔理论的几何教学阶段

范希尔夫妇认为儿童的几何思维能力的水平，很大程度上取决于教育影响，而不是儿童的年龄和生理成熟度，这与皮亚杰的认知理论有很大的差异[14]。在此基础上，范希尔等人将其划分为五个时期，提出了在老师指导下，要经过五个时期的学习，以获得新的几何思维能力。

（1）阶段 1：学前咨询（Information）

在这个过程中，老师和学生以学习目标为媒介，建立起一个双向沟通的局面，老师可以通过问题来知道学生掌握的准备知识的大体状况，以此来判定学生的思考层次，同时也可以让学生明白要学习的知识的大概意思。

（2）阶段 2：引导定向（Guided orientation）

在这个过程中，老师会用问题作为指导，指导他们进行多思考，并给他们安排相应的研究性学习任务，让他们能够理解接下来的课程，为理解新知识积累大量的体验。

（3）阶段 3：阐明（Explication）

这一步，师生之间已形成了一种双向交互的机制，通过之前积累的体验以及老师的一些细微的暗示，学生能够理解新知识意味着什么，也能够表达出自己对知识结构的理解。教师应采用适当的教学方法来纠正已有的知识体系[15]。学生能够将自己的学习经历与知识相结合，对所学的知识进行灵活的运用。

（4）阶段 4：自由定向（Free orientation）

这一时期，老师要调动学生的积极性，让他们自己去解决有关的问题，同时也能获得一些解决问题的经验，从而对未来的学习有一个清晰的认识。

（5）阶段 5：整合（Integration）

在这个时期，学生们可以对所学到的知识进行整理，通过对已有的知识的概括与归纳，将已有的知识与自身的知识相结合，创造出新的知识体系[16]。

2.3.3 基于范希尔理论的几何教学研究

在国外，范希尔理论首次运用于小学、中学的几何课，源于原苏联的皮卡什罗，他通过细致地研究范希尔定理，为孩子们提供了一条符合“几何发展的连续性路径”。以皮卡什罗为基础，在 1968 年，苏联逐渐建立了一种八年学制时常的完整的几何教育体系，为苏联的几何教育带来了极大的成就。这一发现吸引了美国学术界的注意，美国继而对范希尔学说进行了较为深入的研究，并将其应用于几何学科的课程改革中，也取得了显著的成绩。吸引了许多国家的学者去研究范希尔的数学思想，并将其应用到各个国家的数学教育和教学中去。

在国内，台湾首次运用范希尔理论。台湾九年义务教育的几何教科书，也主要是从范希尔的几何思维层面出发。林俊志于 1992 年对范希尔几何概念的理解和偏误的关系进行了探索性的探讨，发现随着几何思维水平的提高，认知风格逐渐向“场独立”方向发展。来自城镇的学生对几何概念的理解水平显著高于来自农村的学生。数学思维能力

差的学生，其错误观念的发生概率较高。我国内地对范希尔理论在几何教学中的应用研究起步比较晚，且多集中于小学和初中的几何教学，对范希尔理论应用于中学立体几何的研究也是近几年的事情，多见于一些大学的硕士学位论文[17]。

就目前而言，范希尔在教育教学方面所起到的作用，国内也有类似的研究：范希尔基于范希尔几何五层思维模式，将其划分为五个阶段：幼儿辅导、引导方向、说明、活动、整合。在此基础上，将范希尔理论层面作为教学设计的理论框架，对教学设计的研究更为丰富与完善。再者如何合理地组织教学内容，选择材料，是提高学生几何思维能力的关键。因此，教师在教学活动中起着至关重要的作用。本文的研究发现，范希尔理论可以帮助老师们更好地理解和掌握数学知识，从而为老师们营造一个更好的几何学习环境，从而有效地提高数学课堂的教学效果。

《新课标》从问题与情境，知识与技能，思维与表达以及交流与反思等四个方面描述了对直观想象素养水平的要求，并且分别对应高中毕业、高考和高校自主招生的需求，提出了各个层次的目标。整理的内容见表 2。

表 2 《新课标》中直观想象素养的描述概要

	水平一（高中毕业）	水平二（高考）	水平三（高校自主招生）
问题与情境	熟悉的情境	关联的情境	综合的情境
知识与技能	发现规律、描述特性	掌握方法、探索规律	理解关联、建立模型
思维与表达	认识、表达问题	提出、解决问题	表达问题本质
交流与反思	利用图形交流	探讨数学问题	探讨问题本质

范希尔夫妇将皮亚杰的空间观念发展理论与格式塔心理学相结合，将儿童的几何思维层次分为不同的层次，并在此基础上建立了“五阶段”的几何教学观。跟表一中的分类相对比，可以看出用范希尔理论来研究直观想象素养比起课标的评价标准，有以下的优点：

多学科交叉融合：范希尔理论整合了认知心理学、教育学等多学科理论，建立了直观想象素养的综合性评价准则，突破了单学科视角，实现了对个人直观想象能力的全方位评价。

多样性评价：基于范希尔理论，从图像知觉、意象表现、创新思维三个维度构建多元评价体系，既考察个体的直观想象能力，又考察其在特定任务中的表现与运用能力。

关注发展：范希尔理论强调直观想象素养的发展，也就是每个人在不同的发展时期都有自己能达到的水准，所以评价时要把这个因素纳入考量，而不只是对目前的状况进行评价。同时也要考虑到个人的发展潜能以及未来的晋升空间。

综合评价：基于范希尔理论，将直观想象素养与实践任务相融合，提出基于任务的评价方式，以完成特定任务为依据，评价个人的直观想象素养，该评价更接近于现实，能较好地体现个人想象力的水平。

总体而言，范希尔理论对直观想象力素养的评价具有创新意义，并通过跨学科融合、多元化指标、发展性考虑和全面评价等手段，提高了评价的全面性和精确性，更好地引导教育实践，并培养学生的直观想象素养。并且在理论上进行了加深，综合性也更全面，指导价值更大，与现实情况的联系也更紧密，是具备很大的研究价值的。

2.4 理论基础

2.4.1 建构主义

建构主义理论也被称作结构主义理论。建构主义主要强调教学中培养学生的自主建构能力。其主要内涵体现在知识观、学生观、教学观[18]。

（1）知识观

“知识总是在变化中”，它体现了当前学生对这个世界的看法和理解。由于学生的思想系统发生了变化，原有的对知识的认识也随之发生了相应的转变。每一个人都有其固有的认知基础，因而其对知识的理解也不同。因此，光靠认识是无法了解所有事物的，还需要持续的革新。

（2）学生观

建构主义理论指出，参加学习的人不是什么都不知道，而是已经在生活中积累了一些生活的认识。在教学中，老师要以学生已有的知识和经验为基础，用自己已有的知识和生活经历对学生进行引导。

（3）教学观

建构主义认为，以学生为中心是教学的关键，老师可以针对每一个孩子的具体状况，对他们进行因材施教，并有针对性地设置具体的问题情景，使学生在原来的认知基础上建立起一个新的、完整的知识系统。

本文借助网络画板，把学生作为学习的主体，让学生自己去探索，去总结，去发现。在教师的积极引导下，学生可以自主建构知识，深化对知识的认识，并以此为基础发展其直观想象力。

2.4.2 认知负荷理论

认知负荷理论（CLT）研究表明，工作记忆和长期记忆之间的相互影响对学习产生重要影响。认知负荷是指人脑在运行时所消耗的记忆资源，在教学中，一些不恰当的教学设计会导致不必要的认知操作，加重学生的认知负担，加重学生的学习压力[19]。为了解决这个问题，本课题提出了一种基于网络图板的教学设计方法，旨在降低学生的学习负担。在此基础上，根据认知负载理论，对教学设计进行动态调整，实现“减负增效”，减轻内外部认知负担，提高有效认知负荷。其主要目的是为了减轻学生的数学负担，培养他们的想象力[20]。从而有效地激发了学生的学习热情，提高了课堂教学的有效性。

2.4.3 经验之塔理论

美国教育家戴尔等人在视听说教学中提出“经验之塔”的概念，它是根据学生的学习体验与教学媒介表现的形式，由具象到抽象、由实物到抽象符号，以自下而上的方式建构起的一座高塔，并将其命名为“经验之塔”（如图 3）[21]。“塔”基的学习经验最具体，越向上就会变得越抽象。戴尔根据不同教材和方法所展示或需要的学习经验的具体程度将它们分类。同时也要注意在学习间接经验的过程中，应该尽可能地利用直接经验来充实自己。与此同时，应适时指导学生进行抽象思维的培养[22]。因此该理论是教师根据学生需求和能力，根据教学任务性质选择合适媒体的理论指南。

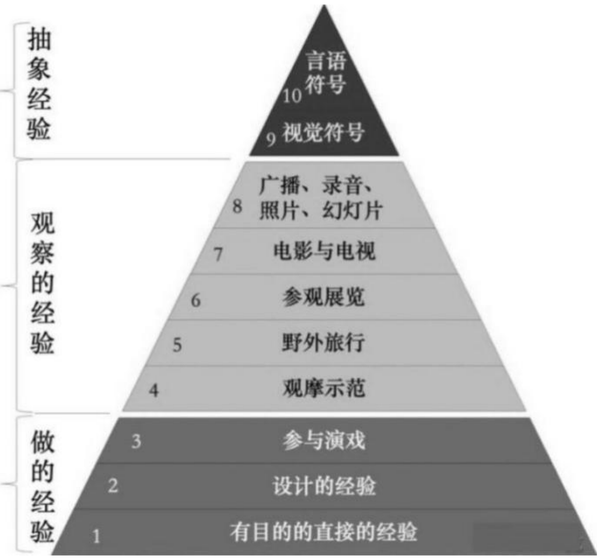

抽象经验
观察的经验
做的经验
10 言语符号
9 视觉符号
8 广播、录音、照片、幻灯片
7 电影与电视
6 参观展览
5 野外旅行
4 观摩示范
3 参与演戏
2 设计的经验
1 有目的的直接的经验

图 3 经验之塔

第三章 访谈调查的设计与实施

3.1 对教师的访谈调查的设计与实施

3.1.1 访谈目的

网络画板软件作为一种辅助教学的工具，在教育教学中发挥着重要的作用，但由于其操作较为复杂，并且对计算机硬件要求较高，因此目前网络画板软件在教师中的使用还存在一定的问题。为了促进网络画板软件在教育教学中的应用，对教师在网络画板软件使用过程中存在的问题进行了调查与分析。

3.1.2 访谈对象

笔者访谈了海口市某中学的 8 位高中数学教师。其中教龄 15 年以上的有 2 位，10—15 年的有 2 位，是一线教学经验丰富的专家型教师；5 年以下的有 4 位，是精通多媒体技术的初学者，均有相关的授课经历。此外，该校还配备了先进的多媒体教学设施，充分利用了现代科技的优势。

3.1.3 访谈提纲

教师的访谈提纲和访谈内容记录都在了附录 A

（1）了解对直观想象素养的认识是否全面；

（2）是否能并将直观想象素养的培养贯彻在教学理念

（3）了解教师对三角函数章节中的直观想象素养的认识是怎样的；

（4）了解是否在课堂上正确使用网络画板软件，并且收到了正向反馈；

（5）是否很好得利用了网络画板去提高了学生的直观想象素养；

（6）是否在符合课程标准、课程大纲得条件下，做到了自己的融合与创新。

3.1.4 访谈过程记录

笔者针对每一个问题对专家型教师和新手教师都进行了访谈，将访谈过程进行了记录，之后再进行总结，具体结果如下：

问题 1：谈谈自己对直观想象素养的理解。

回答 1（初级教师）：是数学六大核心素养之一的直观想象力素养。

回答 2（专家教师）：在我看来，直观想象素养就是对图形的认识和理解。所以，培养学生的直觉想象力，就是在教学中渗透数形结合的思想方法，让学生能运用数形结合的方式来理解问题，同时也能培养学生的直觉想象力。

回答 3（专家教师）：关于直观想象素养，在我的理解中，直觉想象力是指用周围可见的东西来理解不可见的东西。可见之物为直观之物，无形之物须藉由视觉之物来想象。

【小结】与初学教师相比，专业老师能够更深入地分析直觉想象素养的能力，从而更深入地了解它。

问题 2：您是否能并将直观想象素养的培养贯彻在教学理念中？

回答 1（初级教师）：按照新课程标准，在三角函数该章节中规定了对学生的直观想象素养的培养，但由于时间有限，在教学中，教师要注意怎样设计好实例，使学生能够灵活地应用所学到的理论和方法来解决一些具体的问题。

回答 2（初级教师）：目前，新一轮的课程改革倡导实施素质教学，从把重点放在怎样促进学习成绩的提升上转到要把重点放在怎样发展学生的各项能力上，使他们得到全方位的发展。但是，事实上，学业成绩依然是学校、教师、家长以及学生最为关心的问题，要能够有创新的贯彻该素养是较困难的事情

回答 3（专家型教师）：在设计指标函数、对数函数、幂函数等函数时，要注意把“数形结合”的思想和方法融入到函数教学中，利用函数图象的变换，培养和发展学生的直观想象能力。

【小结】就当前的状况而言，如何在三角函数教学中加强学生的直观想象能力是一个十分重要的课题。注重“生存”的初级教师，由于受到外在环境的限制，其教学设计的重心多放在了如何让学生更好地理解、掌握所学知识，而不是素养的提高上。而专家型教师更能将直观想象素养融入教学理念中。

问题 3：你是否重视对学生的直观想象素养的培养？你是怎样在三角函数教学中贯彻发展直观想象素养这一目标的？

回答 1（初级教师）：既然是关于三角函数的，那就一定要有图片的诠释。例如，在教学指对幂函数时，我都会用图片和多媒体软件动画来解释，多给孩子们一些生动的演示，有利于培养他们的直观想象能力。

回答 2（初级教师）：我认为三角函数这部分知识的理解和直观想象素养的层次有一定关联，因此在教育中，我会使用多媒体软件，既可以增强学生的识图判断能力又可以提升教学的效率和品质。

回答 3（专家型教师）：在教授函数的时候，我觉得大多数学生对于函数的理解还存在着一些困难，必须要通过图形来了解。因此，我觉得在函数一节中，要培养学生的感知和想象力。在函数的教学过程中，无论是在对知识点的解释上，或是在练习题的解答上，我都更加注意对学生进行数形相结合的训练。

【小结】根据对 3 题的访谈，无论是专家型老师还是新手老师都认为直观展示是一种很好的教学手段，将三角函数图形化、识图和数形结合的能力是学生在函数学习中的核心。与专家型教师相比，具有较强的多媒体应用能力的初手教师更能利用数学软件进行图形的展示。从访谈结果来看，新来的老师们觉得，利用多媒体软件，既能确保教学进度，又能提升教学的效率与品质，同时也能在课堂上落实培养学生的直观想象素养的目标。

问题 4：第四个问题：你觉得在三角函数这一节里，对孩子们的直观形象思维素养的发展有什么需要解决的痛点？

回答 1（专家型教师）：在三角函数这一节中，学生需要进行直观的联想，因此教师最主要的任务就是加强对函数图象的运用，让学生看到更多的数学模型和动态图片，这样在数学软件的帮助下才能达到最佳的教学效果。但其制作难度较大，要求教师对数学软件的掌握程度较高。

回答 2（初级教师）：因为缺少对直观想象力素养系统、完整的了解，所以无法深入地了解在我们的课堂上有没有很好得促进了学生的直观想象素养的发展。

回答 3（专家型教师）：在制作演示图形时，手工绘制效果往往不够理想，仍需加强计算机辅助教学，提高教学水平。

【小结】由于专家型老师不会使用数学软件，所以他们只能够用板书和 PPT 来展示静态的图片，这对于提高学生的直观想象素养是非常不利的。但是，大多数教师普遍面对的一个问题就是，一些函数的可视化建模过程非常繁琐，对数学软件的要求很高，并且计算时间长，因此对教师进行有特殊指导的研究是必要的。

问题 5：在平常的课上，是否会利用网络画板来教授三角函数呢？你认为利用如网络画板这样的数学软件对提高孩子的直观想象力有很大帮助？

回答 1（初级教师）：我只是听说过，不太懂，所以从来没有用过。但是，和其它的数学软件相比，我对“几何画板”了解得更多，它可以用来做某些图像，尤其是动画的图像。我认为利用计算机辅助教学，一是能吸引学生的注意，二是能调动学生的积极性，有利于提高课堂的教学质量。由此可见，利用计算机辅助教学，可以增强学生的直观想象素养，合理地应用于课堂教学。

回答 2（专家型教师）：我对这些程序了解的不多，而且使用这些程序的次数也不多。从我们课上讲到的关于函数的内容中，对高一年级学生而言，一些比较抽象的功能内容有些困难，运用网络画板确实可以让更透彻得他们明白。

回答 3（初级教师）：我会使用网络画板进行教学的。比如，在学习指数函数的特征时，可以通过网络画板的动画演示，让同学们更清楚地了解底数以及幂变化和函数图像的变化，再通过对所学内容的分析，总结，可以更好的掌握该部分章节的知识。运用网络画板，这样既能加深学生对抽象知识的理解，又能培养学生的直观想象素养。

【小结】对于网络画图软体，专业型教师及初级教师都不太熟悉，且大部分教师不常使用电脑。新教师比专家教师更多地使用“几何画板”，教学效果更好。因此通过数学软件进行三角函数教学的实践，我们发现利用几何画板、网络画板等工具可以更好地提高学生的直观想象力。在实践中，一些具有一定实践的专家型老师则认为，在一定程度上运用信息化手段，可以使学生对一些抽象的函数概念有更为清晰的认知。

3.1.5 访谈结果分析

通过对访谈结果的分析，能够总结了以下三点结论：

1. 无论是专家型教师还是新手教师对直观想象素养都有一定的了解，大部分教师不常使用计算机软件。相对于专家型教师，新手教师在函数教学中使用“几何画板”的比例明显高于专家型教师，所取得的教学效果较好。在此基础上，可以提出利用“几何画板”和“网络画板”等辅助工具来培养学生的直观想象能力。在实际操作过程中，有些具备实际操作能力的专家教师表示，通过信息化教学，可以让学生更加清晰得理解某些抽象的函数概念。

2. 专家型教师和新手教师一致认为培养学生的直观想象素养非常重要。然而，对于专家型教师来说，因为受传统的教育观念和教学方式的影响，还不能熟练的使用计算

机软件进行教学。而新手教师因为缺乏实践经验，处于“关注生存”的状态，也会更注重学生的学习成果，所以，如何将直观想象素养的培养目标落实到三角函数的教学中，并且需要采用什么样的教学方式和手段这仍需要商榷。

3. 利用网络画板进行三角函数教学的现状并不乐观。由于新教师常用的是“几何画板”，他们的授课效率相对于未使用信息软件的教师来说比较高，并且动画的展示也能活跃教室的气氛，帮助同学们加深对所学的内容的了解与记忆。因此，对于数学软件在课堂上发展学生的数学核心素养该方面大多数教师也认为是有利的。

通过对教师的访谈，在教学中更好地利用网络画板来提高学生的直观想象素养，已显示出其亮点。有助于学生体验数学学习的乐趣，培养学生的数形结合思想。教师要根据数学课程的内容与教学需要，运用网络画板来创设情境，实施演示教学，开展探究活动，帮助解决问题，对复习进行优化，让数学教学从抽象到具象，从静态到动态，让学生积极地参与到课堂中，进行动手实践，培养出好的解题思路和复习能力，这样才能凸显出网络画板的应用价值。为此，作者提出了几个具有可操作性的教学实例，以期广大的一线老师更好地利用网上画板进行直观想象素养的培养。

第四章 范希尔理论下三角函数（周期性）的教案设计与实施

4.1 基于范希尔理论培养直观想象素养的教学原则

新课标包含了三个基本理念：以学生为中心，以教师为中心，强调以学定教。在上述三个基本思想和范希尔理论内容的基础上，提出了五条教学原则。

4.1.1 学生主体性原则

学生是学习的主体，范希尔理论把学生的心理发展顺序划分为五个层次，然后根据几何思维的五个层次，提出了相应的教学步骤并把这五个教学步骤运用到培养直观想象素养实践中，就演变成了：提出猜想，动手操作，验证猜想，应用实践，课堂总结。同时，教师在教学过程中也需要学生积极参与，给予相应的反馈[23]。在这个过程中，教师适时地给予指导，最大限度地让学生自主地获得知识，将所学知识内化于心，外化于形，使学生成为课堂的小主角。

4.1.2 教师主导性原则

无论是范希尔理论，还是新课程改革，都主张教师要发挥主导作用。教师要在课堂上扮演一个引导者的角色，引导学生去发现问题，去解决问题，获得新的知识。在范希尔理论的指导下，培养直观想象素养的教学的每一个环节都离不开教师的指导。

4.1.3 教学直观性原则

在范希尔理论的指导下，几何课堂要尽量做到简单、直观。直观教学在一定程度上能提高高一学生的学习兴趣，减轻他们的学习负担。高一的学生们的想象力水平还不够高，运用网络画板等数学作图软件，以及动手操作、实验等方式，能够使学生们不会被抽象的数学几何知识所困扰，把抽象的数学几何知识变成生动的知识板块，使抽象的数学几何知识变得生动形象。

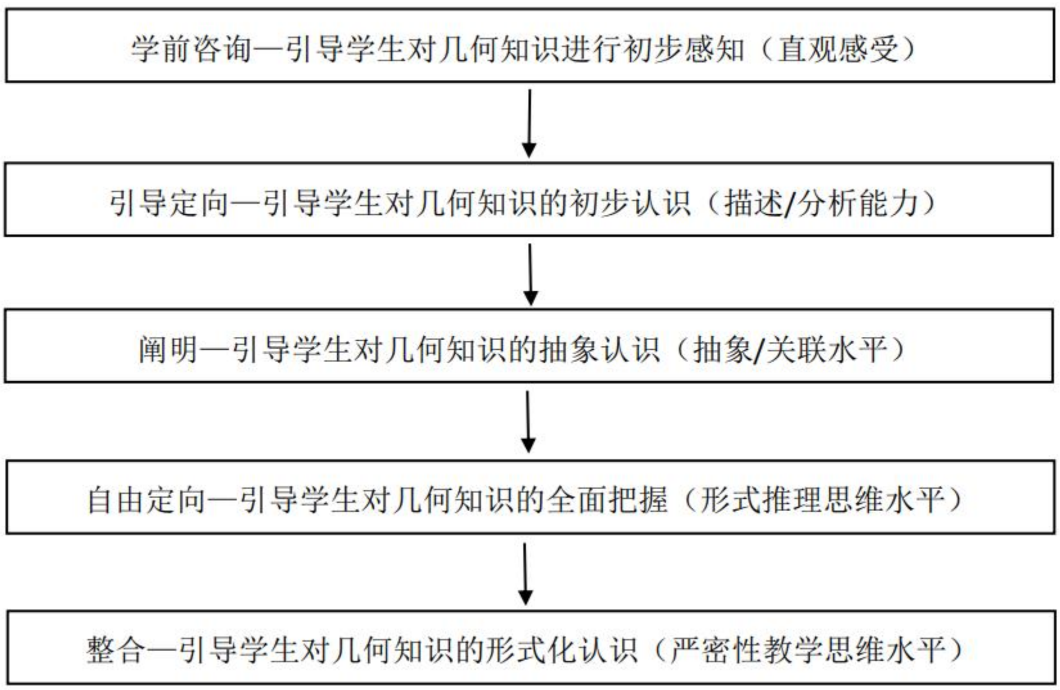
4.1.4 思维发展动态性原则

范希尔几何思维层次具有顺序性、进阶性、内隐外显、语言性和不适配性等特点。教学方法和评价方式的多样化有利于提高学生的直观想象素养。范希尔理论提倡学生在几何学习过程中要循序渐进，从一个层次到另一个层次平稳过渡，每一个层次都能有一定的提高，呈现螺旋式上升的趋势，从而使学生的直观想象能力能够在几何学习过程中保持稳定的动态发展。

4.1.5 知识总结系统性原则

学习几何知识对学生几何思维水平的提高起着重要的促进作用。在实际教学过程中，许多学生无法对自己所学的几何知识进行归纳和总结，从而对自己所学的知识缺乏系统性的认识。这个时候，教师可以采用循循善诱、师生互助的方法，使学生能够自己归纳出课堂内容的大框架，理顺每节课所学内容之间的逻辑关系，使学生能系统地掌握所学的知识。

4.2 基于范希尔理论培养直观想象素养的教学流程



4.3 现行教材中研究三角函数直观想象素养的必要性

高中版本教材中三角函数的内容如下表 3 所示：

表 3 高中三角函数内容的教材整理

人教 A 版（2019）必修 1 第五章	北师大版必修 4 第一章
5.1 任意角和弧度制	1.1 周期现象
5.2 三角函数的概念 阅读与思考 三角学与天文学	1.2 角的概念的推广
5.3 诱导公式	1.3 弧度制
5.4 三角函数的图像与性质 探究与发现 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$及函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期 探究与发现 利用单位圆的性质研究正弦函数、余弦函数的性质	1.4 正弦函数和余弦函数的定义与诱导公式 1.4.1 任意角的正弦函数、余弦函数的定义 1.4.2 单位圆与周期性 1.4.3 单位圆与诱导公式
5.5 三角恒等变换 信息技术应用 利用信息技术制作三角函数表	1.5 正弦函数的性质与图像 1.5.1 从单位圆看正弦函数的性质 1.5.2 正弦函数的图像 1.5.3 正弦函数的性质
5.6 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	1.6 余弦函数的图像和性质 1.6.1 余弦函数的图像 1.6.2 余弦函数的性质
5.7 三角函数的应用 阅读与思考 振幅、周期、频率、相位	1.7 正切函数 1.7.1 正切函数的定义 1.7.2 正切函数的图像与性质 1.7.3 正切函数的诱导公式
	1.8 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像
	1.9 三角函数的简单应用

在教学方法上这两个版本的教材的研究手段和方法都是一样的，都是利用单位圆和直角坐标系作为工具，把代数与几何有机地结合起来，通过数形相结合的方式来对三角函数进行研究，在探究性的学习过程中，学生不仅能够掌握三角函数的数量关系，还能够理解它的空间结构，在整个教学的过程中都贯彻着培养学生直观想象素养的教学理念。

再接着分析了两个版本内容中三角函数各部分内容所体现的数学核心素养的要求，并整理出了各部分的具体体现，如下表 4 所示：

表 4 三角函数部分数学核心素养具体体现

知识内容		核心素养目标
数学概念	任意角和弧度制	数学建模、数学抽象 直观想象
	三角函数的概念	
数学命题	诱导公式	逻辑推理、直观想象 数学抽象
	三角恒等变换	
图像与性质	三角函数的图像与性质	直观想象、数学建模 数学抽象
	函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	
应用	三角函数的应用	数学建模、数学运算

由此可见直观想象素养贯彻数学概念、命题、图像分析、辨析性质，并且帮助最后综合运用的整个过程，因此研究基于三角函数的内容去培养直观想象素养是具备研究价值的，是可行的。

4.4 三角函数有关周期性内容的直观想象素养的体现

数学知识是通过直观获得的，这种直观并不是老师教给他们的，而是让他们自己去理解。中学数学教师要通过创设情景，让学生认真地观察、主动地进行思维活动，发展他们的直观想象力。感知是人的天性，而知觉和想象力的发展离不开经验。三角函数的概念非常抽象，其内涵非常丰富，而且思维非常精细，用图像来学习三角函数，用形来帮助数，达到了数和形的有机融合。在学习数学的过程中，通过图形的直观形象来进行思维，可以帮助他们树立起对数学的自信。在教授“三角函数”的时候，我一方面要使学生明白概念，掌握公式，另一方面，也要让他们明白其中所蕴含的图象知识以及相应的性质，如周期、振幅等，在进行这些知识的教学时，可以采用用图像学函数的思想来进行教学，将函数与图象的关系充分地发挥出来，从形的视角，用图像使学生对三角函数的概念以及与之相关的概念有了更深的认识，在学习三角函数的性质时，通过图像为学生建立了一座不等式与函数的联系，并通过图形建立了一个直观的立体模型，使抽象的函数问题变成了具体的、可感知的[24]。以此为基础，培养高中学生的直观想象素养。三角函数的内容量较大，本文选取有关周期性内容的直观想象素养的教案设计，其中三角函数有关周期性内容的直观想象素养体现在以下四个方面：

1. 通过图形展示正弦函数、余弦函数等的周期性特点，让学生直观感受到函数图像的规律性和重复性，培养其对周期性现象的观察和理解能力。

2. 引导学生通过调整参数来探索不同的图像变化，培养其对函数特征的感知和把握能力。

3. 通过实际应用场景如音波、振动，摩天轮、时钟的旋转，一周的课程表，还有十二生肖，十二宫，又如：黑夜白昼，潮起潮落，春去秋来等，将三角函数的周期性与实际问题相结合，帮助学生将抽象的数学概念与实际情境联系起来，提升其对数学概念的理解和应用能力。

4. 通过综合性的例题和练习，让学生能够运用所学的周期性知识解决实际问题，培养其数学建模和问题解决的能力，从而全面提升其直观想象素养。

4.5 高一（12）班(常规班）教学设计与实施

4.5.1 常规班的教学设计（一）

教案一：三角函数的周期性

教学目的：1.认识“周而复始”的正弦函数和余弦函数图像的几何特性，理解其运用的背景。了解周期的概念。

2.通过观察、发现和归纳等探索活动，培养学生从具体到抽象，从特殊到一般的思维方法。

3.体会三角函数循环的简化美、概化美和统一美。了解化无穷大问题为无穷小问题之化归之思路，并在此基础上建立数学探究意识。感受“周期”这一概念的科学性与实用性，培养“数学崇拜”精神，培养学生的直观想象能力，提高直观想象素养能力。

教学重难点：

重点：研究函数图象以及怎么判断周期的一般机理和方法.
难点：周期函数、（最小正）周期的定义.

教学准备：多媒体教学设备

教学过程：

一、创设情境，引入课题

（1）趣味引入

师：大家好，之前我们学过正弦函数的图像，并通过平移转换获得了它的图像，这些图像都是起伏不定的，我们将这种特殊的几何特性称为“周期性”。

师：其实，这样的循环在我们的日常生活中到处都是，例如：摩天轮、时钟的旋转，一

周的课程表，例如：十二生肖，十二宫，又如：黑夜白昼，潮起潮落，春去秋来；“阴阳圆缺，花谢花开”，都是指“在一定的时间内，有同样的结果”。

（1）抽象问题

问题 1: 2022 年的元旦是周六，你知道 2023 年的元旦是周几吗？

生：周日！

师：为什么？

生：因为每隔 7 天都是周六，364 天后还是周六，第 365 天就是周日.

师：很好！每隔 7 天都是周六，每隔 7 天都是相同的结果，你能用数学函数表达式来描述吗？

生：$f(x+7)=f(x)(x\in \mathrm{N}^*)$.

师：太棒了！即自变量x每增加 7 或者 7 的整数倍时，与x对应的函数值是相等的.再比如诱导公式$\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in \mathrm{Z})$表示自变量$x$每增加$2\pi$的整数倍时，与$x$对应的函数值是相等的.因此周期现象是：每隔一特定时间就出现相同结果；那么周期函数就是：自变量每增加或减少一个固定的值时函数值就相等.即$f(x+T)=f(x)$.

【设计意图】数学来自于生活，又要比它更好地为它服务。它是一种对自然界法则的一种很高的总结和抽象。它能让同学们用自己身边的例子来对它的概念进行抽象，并且对它的教学内容有很大的兴趣。

二、尝试定义、深化理解

（1）创设障碍

师：表达式中T是任意的吗？

生：不是，$T\neq 0$，如果$T=0$，表达式$f(x+T)=f(x)$恒成立，意味着任意函数都是周期函数.而我们学过的二次函数、指数函数、对数函数就不具有周而复始的现象.所以$T\neq 0$.

师：它对自变量x有没有要求呢？我们先来看看以下问题.

问题 2：下列命题正确吗？

（1）当$x=\frac{\pi}{4}$时，$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin x$，所以$\frac{\pi}{2}$是$y=\sin x$的周期.

（2）当$x=\frac{\pi}{3}$时，$\sin(x+\frac{2\pi}{3})\neq\sin x$，所以$\frac{2\pi}{3}$一定不是$y=\sin x$逆周期.

师：第（1）题对吗？

生：错误，诱导公式可知$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，这个等式只是$x$取某些值时才成立，不是对定义域中的每一个$x$都成立。

师：太好了！第（2）题呢？

生：对。如果在一个定义区域内有一个数值导致一个表达式无效，那么该常量就肯定不是一个周期.

师：哇，真厉害！所以周期性是函数的一个整体性质，必须对定义域中的每一个x，

$f(x+T)=f(x)$ 都成立才行.

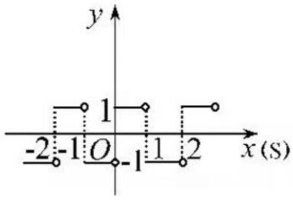
【设计意图】在辨别函数周期的基础上，从“某一个值”的含义出发，了解“非零常数”与“定义区域中所有值”之间的关系，从而加深对概念的理解，使学生体会到，数学性质的研究是一步一步地被认识、被完善的。

（2）形成周期函数概念

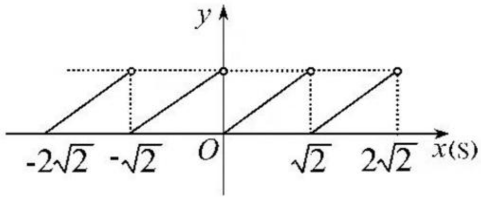
1、周期函数：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数. 非零常数 T 就叫做这个函数的周期.

（3）数形结合，深化理解

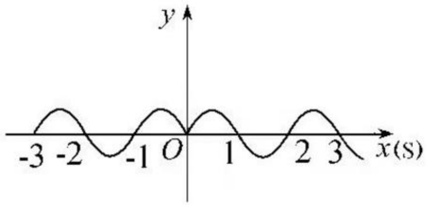
例：下列函数图像中，哪一些反映了函数具有周期性？



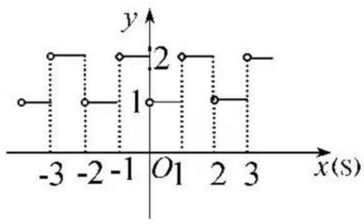
(1)



(2)



(3)



(4)

生：老师，好像都是周期函数.

师：到底是不是，得问周期函数的定义哦！ $f(x+T)=f(x)$ ，这个式子从图像上来说即函数 $f(x)$ 往左（右）平移 T 个单位后与原函数图像重合.你再仔细看看.

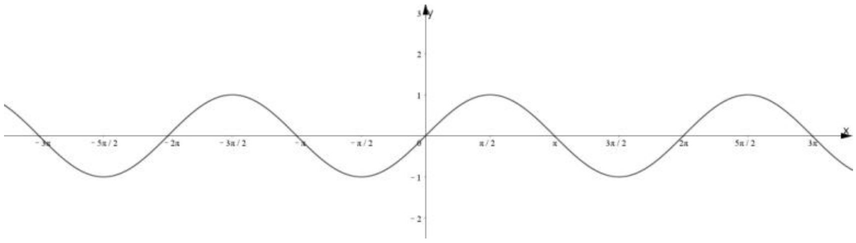
生：第（3）不是！原点附近的图像经过左右平移后，不会和原函数的图像重合.

师：对的，你找到了问题的关键所在！

【设计意图】从函数图象的角度帮助学生理解周期性的概念.

（4）特殊入手

问题 3：我们知道正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，周期是多少，唯一吗？



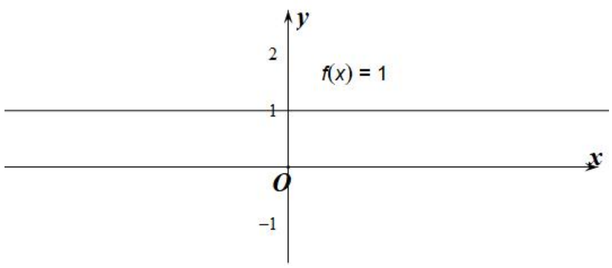
生：周期是 2π ，不唯一，且 $k\in Z)$ 都是它的周期.

师：哦，周期函数的周期有无数个.若 T 为函数的周期，则 $kT(k\neq 0,k\in Z)$ 也是它的周期.在这么多周期中，我们挑了一个具有代表性的“最小的正数”作为函数周期，这就是“最小正周期”的概念.

（5）形成最小正周期概念

2、最小正周期：如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小正数，那么这个最小正数就叫做的最小正周期.

师：周期函数的周期中一定存在最小正数吗？我们来看看这个常函数 $f(x)$=1，它的图像是这样的：



师：是周期函数吗？

生：是的。

师：周期是多少？ $f(x+?)=f(x)$

生：任意非零常数，常函数的周期是任意非零常数！

师：很好！这里我们要做如下说明：

①周期函数不一定有最小正周期；

②对于周期，如果不加说明，一般指函数的最小正周期.

师：下面我们来看三角函数的周期.

（6）概括总结三角函数周期

问题 4：我们知道正弦函数 $y=\sin x$ 、余弦函数 $y=\cos x$ 周期都是 2π 结合诱导公式 $\tan(x+k\pi)=\tan x(k\in Z)$ 和正切函数图像，你知道 $y=\tan x$ 的周期是多少了吗？

生：老师，正切函数周期是 π.

师：恭喜你，答对了！

【设计意图】数形结合，让学生深刻体会周期函数的图像特征，结合最小正周期的概念，并通过观察图像得出三角函数的周期.

三、课堂小结、作业布置

4.5.2 常规班的教学设计（二）

教案二：正弦函数、余弦函数的性质（周期性）

一、教学目标

1.能领悟三角函数图像的基本特征并画出三角函数的图象；

2.了解三角函数的周期性

3.理解研究三角函数图象与性质的一般思想和方法；

4.培养学生的数学抽象能力，逻辑推理能力，直觉思维能力和数学模型能力，提高直观想象素养。

二、教学重难点

1.重点：正弦、余弦图象及其主要性质（周期性）；研究函数图象与性质的一般思路和方法.

2.难点：理解函数的图象及其性质；进一步总结出函数的性质。

三、教学过程

1.新知探究

1.1用“五点法”作正弦函数和余弦函数的简图

（1）在正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象中，五个关键点是：$(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$.

（2）在余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象中，五个关键点是：$(0,1)$，$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(\pi,-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,1)$.

师：带领学生一起画“五点法”作正弦函数、余弦函数的图象

思考1　描点法作函数图象有哪几个步骤？

答案　列表、描点、连线.

思考2　“五点法”作正弦函数、余弦函数在$x\in[0,2\pi]$上的图象时是哪五个点？

画正弦函数图象的五点	(0,0)	$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$	$(\pi,0)$	$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right.$	$(2\pi,0)$
画余弦函数图象的五点	(0,1)	$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$	$(\pi,-1)$	$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$	$(2\pi,1)$

答案

梳理　“五点法”作正弦函数$y=\sin x(x\in[0,2\pi])$、余弦函数$y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$图象的步骤

(1)列表

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0
$\cos x$	1	0	−1	0	1

(2)描点

画正弦函数$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象，五个关键点是

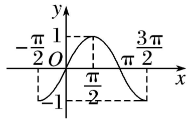
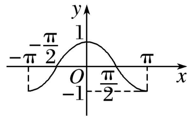
$$(0,0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0)\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0)$$

画余弦函数$y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的图象，五个关键点是

$$(0,0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0)\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0)$$

(3)用光滑曲线顺次连接这五个点，得到正弦函数$y=\sin x(x\in[0,2\pi])$、余弦函数$y=\cos x(x\in[0,2\pi])$的简图.

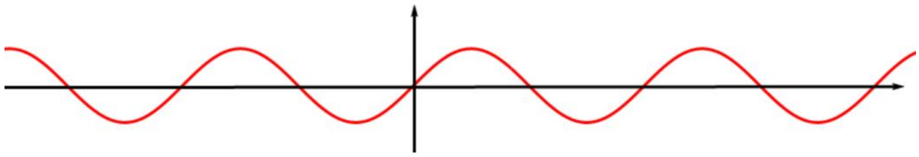
1.2 总结正弦、余弦、函数的图象与部分性质(下表中$k\in Z$)

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象		
定义域	R	R
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$

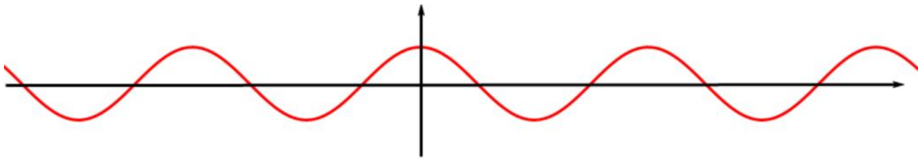
1.3 深入探究

师：现在同学们观察其图象，用自己的语言描述一下正、余弦函数的图象具有哪些特点？

$y=\sin x$：



$y=\cos x$：



生：函数图象循环往复，周而复始地向两边延伸，而且有起有伏，具有很好的对称性。

师：图象的这些特点其实蕴藏着正弦函数、余弦函数丰富的规律性，即函数的性质，与“周而复始”相对应的是周期性，而与“对称”相对应的是函数的奇偶性。下面我们一起来探索学习这两大性质——周期性、奇偶性。

设计意图：正弦函数、余弦函数的图象形态优美，波浪起伏，周而复始，既是轴对称图形也是中心对称图形。学生首先通过直观感知函数图象，发现其中所蕴含的规律，从而激发起探索的欲望。

2.师生互动，新知探究

师生活动：观察正弦函数的图象，可以发现，图象上横坐标每隔 2π 个单位长度，就会出现纵坐标相同的点，即自变量 x 的值增加 2π 的 整数倍时所对应的函数值保持不变，数学上，用周期性这个概念来定量地刻画这种“周而复始”的变化规律。

定义：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对每一个 $x\in D$ 都有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做**周期函数**。非零常数 T 叫做这个函数的**周期**。

师：根据周期的定义，正弦函数 $y=\sin x, x\in R$ 的周期是多少？其周期唯一吗？

生：$2\pi,4\pi,6\pi,\cdots$ 以及 $-2\pi,-4\pi,-6\pi,\cdots$ 都是正弦函数的周期。事实上 $\forall k\in Z$ 且 $k\neq 0$，常数 $2k\pi$ 都是它的周期。

师：这一点可从定义看出，也能从诱导公式$\sin(x+2k\pi)=\sin x(k\in Z)$中体现出来。咱们都知道：$\sin\pi=\sin 2\pi=\sin 3\pi=\cdots=0$，那么$\pi$是正弦函数$y=\sin x$的一个周期吗？为什么？

生：不是，比如$\sin(\frac{\pi}{2}+\pi)\neq\sin\frac{\pi}{2}$，并不是对定义域内的每一个$x$都有$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin x$。

师：若一个函数$f(x)$的一个周期是T，则$kT(k\in Z，k\neq 0)$都是函数的周期吗？

生：是的，由定义可知：$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\cdots=f(x+kT)$。

师：这说明周期函数的周期不止一个。

定义：如果在周期函数$f(x)$的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做$f(x)$的最小正周期。

注：①如无特殊说明，这里所说的“周期”通常指的是一个函数的最小正周期。

②并非所有的周期函数都有最小正周期，例如，对于常数函数$f(x)=c$（c是常数），在非零实数集合中，没有任何正最a小值。。

设计意图：从正弦函数的图象入手分析其规律，归纳一般得到周期函数的定义，全方位理解周期及最小正周期的含义，为下面研究做铺垫。

例 1 求下列函数的周期：

(1)$y=\cos 2x, x\in R;$　　　(2)$y=2\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}), x\in R$

师生活动：对于这些问题，学生能够求出周期，但是不清楚如何规范地表达，这是本例的难点所在教师要基于学生课堂上的生成，给出分析求解的思路和程序，并加以示范，帮助学生理解.

求解的步骤如下：

第一步，先用换元法转换. 比如对于“（1） $y=\cos 2x$， $x\in\mathbf{R}$”，令$2x=t$，所以

$y=f(x)=\cos 2x=\cos t$；

第二步，利用已知三角函数的周期找关系. 有$\cos(2\pi+t)=\cos t$，代入可得

$\cos(2\pi+2x)=\cos 2x$；

第三步，根据定义变形. 变形可得$\cos 2(\pi+x)=\cos 2x$， 于是就有$f(x+\pi)=f(x)$；

第四步，确定结论. 根据定义可知其周期为π.

师：回顾例 1 的解答过程，你能发现这些函数的周期与解析式中哪个量有关？

生：周期和自变量的系数有关。

师：一般地，你能说出函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in R)$与$y=A\cos(\omega x+\varphi)(x\in R)$的周期吗？（其中 A，$\omega$，$\varphi$为常数，且$A\neq 0$），请给出证明。

师生探究：令$z=\omega x+\varphi$，由$x\in R$得$z\in R$，且函数$y=A\sin z,z\in R$及函数$y=A\cos z,z\in R$的周期都是2π，由于$z+2\pi=(\omega x+\varphi)+2\pi=\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi$，所以$y=A\sin(z+2\pi)=A\sin[\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi]=A\sin(\omega x+\varphi)$，自变量$x$增加$\frac{2\pi}{\omega}$时，函数值不变，从而函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in R)$的周期为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$。同理，函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)(x\in R)$的周期也为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$。

师：上述求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in R)$与$y=A\cos(\omega x+\varphi)(x\in R)$周期的方法是否能推广到求一般周期函数的周期？即命题“如果函数$y=f(x)$的周期是T，那么函数$y=f(\omega x)$的周期是$\frac{T}{|\omega|}$”是否成立？

师生活动：由猜想到证明，教师引导学生利用周期性定义证明猜想。

设计意图：通过例题深化对周期和最小正周期概念的理解，形成求解的具体步骤，进而帮助学生理解函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期，为后续学习作准备。从特殊到一般，进一步研究函数的性质，从三角函数推向一般函数的周期研究。

3 活学活用，及时巩固

4. 课堂小结，知识升华

本节课我们利用正弦函数和余弦函数的图象学习了周期性，并应用这些性质解决了相关问题，希望大家在今后的学习中不断深化对正弦函数和余弦函数周期性的理解，下节课我们将在此基础上继续探究正、余弦函数的其他性质。

4.5.3 常规班的教学设计（三）

教案三 正切函数的周期性

1. 创设情境，引发思考

【类比联想情境】三角函数包含正弦函数、余弦函数、正切函数.我们已经学过正弦函数、余弦函数的图像与性质，那么根据正弦函数、余弦函数的图像与性质的由来，能否得到正切函数的图像与性质.

【预设的答案】取点作图法，单位圆法，计算机演算法。

【设计意图】创设数学情境，让学生自由发言，教师不做判断。而是引导学生进一步观察.研探.

2. 提出问题，引发思考，小组讨论

【活动预设】阅读课本《正切函数》该小节的内容，思考并完成以下问题

1. 正切函数图像是怎样的？

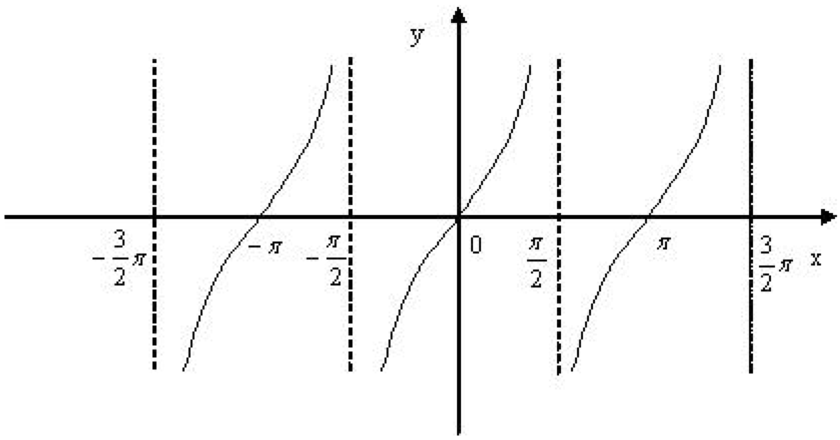
2. 类比正弦、余弦函数性质，通过观察正切函数图像可以得到正切函数有什么性 质？

【预设的答案】取点作图法；定义域，值域，单调性，奇偶性，周期性，对称性

【设计意图】学生独立完成，以小组为单位，组内可商量，最终选出代表回答问题。

3. 新知探究，教师讲授

1.1 正切函数 $y=\tan x \quad x\in R$，且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in z)$ 图象：



1.2. 观察正切曲线，回答正切函数的性质：

定义域： $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in z)$

值域：R（$-\infty$，$+\infty$）

最值： 无最值

渐近线：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z)$

周期性：最小正周期是π

奇偶性：奇函数

单调性：增区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in z$

图像特征：无对称轴，对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)\mathrm{k}\in\mathrm{Z}$

【设计意图】在学生进行小组讨论之后，教师引导学生去探究出新的知识内容。

4. 初步应用，理解概念

例 1 函数$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$的周期为多少？一般地，函数$y=\tan(\omega x+\varphi)(\omega\neq 0)$的周期是什么？

【预设的答案】$\mathrm{T}=\frac{\pi}{2}$；$\mathrm{T}=\frac{\pi}{|\omega|}$

【设计意图】会求正切函数的周期

例 2 比较下列两组数的大小：

（1）$\tan\frac{9\pi}{8}$；$\tan\frac{\pi}{7}$

（2）$\tan\frac{7\pi}{8}$；$\tan\frac{\pi}{5}$

【预设的答案】（1）$\tan\frac{9\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{7}$（2）$\tan\frac{7\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{5}$

【设计意图】比较两个同名三角函数值的大小，先利用诱导公式把两个角化为同一单调区间内的角，再利用函数的单调性比较.

例 3 求满足下列条件的x的取值范围.

（1）$-1<\tan x\leq\sqrt{3}$

（2）$\tan x>-1$

（3）$\tan x\leq 1$

【预设的答案】（1）$\left\{x\middle|k\pi-\frac{\pi}{4}<x\leq k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\right\}$

（2）$\left\{x\middle|k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$

（3）$\left\{x \middle| k\pi-\frac{\pi}{2}<x\le k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$

【设计意图】利用函数图像，已知值域求定义域

例 4 （1）求函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期、定义域、单调区间；

（2）解不等式：$\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ge 1$

【预设的答案】（1）周期 $T=\frac{\pi}{2}$；定义域 $\left\{x \middle| x\ne\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in Z\right\}$；

单调增区间：$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$，$k\in Z$

（2）$\left\{x \middle| \frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{24}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in Z\right\}$

【设计意图】解题技巧：（求单调区间的步骤）

用“基本函数法”求函数 y＝Atan(ωx＋φ)(A＞0，ω＞0)的单调区间、定义域及对称中心的步骤：

第一步：写出基本函数 y＝tan x 的相应单调区间、定义域及对称中心；

第二步：将“ωx＋φ”视为整体替换基本函数的单调区间(用不等式表示)中的“x”；

第三步：解关于x的不等式.

例 5 求下列函数的值域

（1）$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

（2）$y=\sin^2 x+\sin x$

（3）$y=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

（4）$y=\frac{2-2\cos^2 x}{1-2\cos^2 x}$

【预设的答案】（1）[−2, 1] （2）$\left[-\frac{1}{4},2\right]$ （3）(−1, 0] （4）$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

【设计意图】利用单调性，换元法求值域

5.归纳小结，文化渗透

【设计意图】

（1）梳理本节课对于正切函数的认知；

（2）进行数学文化渗透，鼓励学生积极攀登知识高峰。

四、课外作业

4.5.4 常规班课堂小测情况及其分析

课堂实施效果与反思：在课堂上，以学生为主体，在教师的指导下，学生能够积极地参与到问题的研究和解决之中，教室的氛围非常好，而且，在形成概念之后，通过对问题的设置和解决，可以加深对函数单调性的定义的理解。这是三堂让人非常满意的课程，只要注意对时间的掌握和例题的难度就可以了。在这三节周期性内容课程上完以后，给高一（12）班留了 20 分钟做题时间，并让同学们把做题时间写在纸上面。选择了两道例题，来考察学生的大致情况，从而敲定测验题的难度，看看是否满足范希尔理论水平一到水平四的评价标准。一些学生的做题情况放在了附录 C。

1、判断下列函数是否为周期函数，并画出图像；是周期函数的写出周期，不是的打叉。

（1）$y=|\sin x|$、$y=|\cos x|$、$y=|\tan x|$；

（2）$y=\sin|x|$、$y=\cos|x|$、$y=\tan|x|$

【设计意图】考查学生对周期性概念的认知是否清晰以及对函数图像性质是否熟练，并且观察学生画简图是否能做到简约、整洁。

2、拓广探索：

（1）已知 $f(x+2)=-f(x)$，且 $f(1)=5$，$f(5)=$______；

（2）已知 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，且 $f(1)=5$，$f(5)=$______；

（3）若定义域内的每一个 x 都满足 $f(a+x)=-f(x)$（a 为常数，且 $a\neq 0$），则函数 $f(x)$ 具有周期性吗？

（4）若定义域内的每一个 x 都满足 $f(a+x)=-\dfrac{1}{f(x)}$（a 为常数，且 $a\neq 0$），则函数 $f(x)$ 具有周期性吗？

【设计意图】考查学生是否具备抽象推理能力。

全班共收上来 58 份，全对的有 11 份，证明在经过三角函数周期性系统学习过程后，学生的基本能做出三角函数图像，具备做不同水平测验题的能力。以及第一道题普遍做题时间为 10 分钟，第二道题普遍做题时间也为七分钟，时间上也符合要求。

综上，高一（12）班的学生超越能辨认出物体的局部特点，还能分辨两种或多种不同形状，且辨认同种物体。将能够刺激触觉的，更具体的图像作为进行推理的物体，已经较轻松，所以可以看出同学们基本超越水平 0：前认知水平，达到可测水平一的阶段。

4.6 高一（6）班（实验班）教学的改进与实施

高一（12）班常规班的教案设计和高一（6）班实验班的教案设计大致是一致的，具体的改进部分单独另详细说明。

4.6.1 实验班的教学设计（一）改进与实施

改进点 1：在课堂引入部分加入圆的展示图例

师：事实上，周而复始的现象在我们生活中随处可见，比如：摩天轮和钟表的转动、一周课表，比如：十二生肖、十二星座，再比如：黑夜白昼、潮起潮落、春去秋来、阴晴圆缺、花谢花开等等，都是“每隔一特定时间就出现相同结果”。具体地，咱们来看这个图，大家是不是发现该圆是周而复始地重复与又开始的？

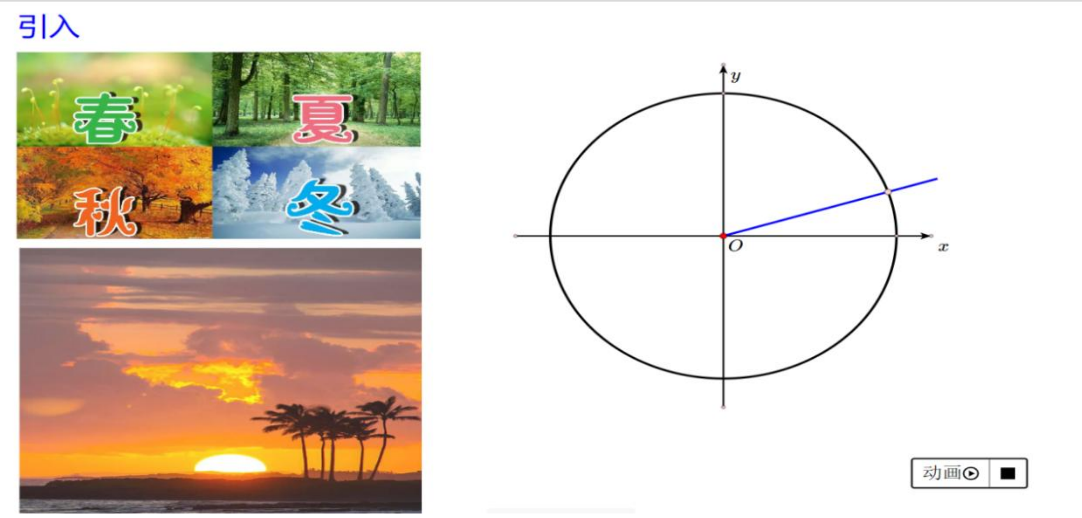


图 4 引入页 PPT 示例图

【设计目的】不再局限于文字表述“每隔一特定时间就出现相同结果”这一概念，而是在引入实例的同时，就展示网络画板所创的动态圆的轨迹图，从而让学生能够将生活和

数学紧密联系。

改进点 2：在定义形成环节，把文字描述的抽象概念讲授环节，改成网络画板的画图展示环节，教师带领学生使用网络画板操作的步骤如下所示：

1. 选择画板工具： 打开网络画板，并选择适合的绘图工具，如画笔、线条工具等。确保选择的颜色和粗细适合学生自己的需求。

2. 绘制坐标系： 在画板上绘制直角坐标系，包括 x 轴和 y 轴。可以使用直线工具或画笔工具绘制坐标轴，并确保坐标轴的刻度和标签清晰可见。

3. 确定函数范围： 根据需要确定绘制函数图像的范围，包括 x 轴和 y 轴的取值范围。通常，你会选择一个周期内的一段范围来绘制函数图像。

4. 绘制图像：绘制一个单位圆先向同学讲清在单位圆里面各三角函数值是可以通过坐标直接表达的，如图所示；再然后再设置一个变量k和一个变量α，k的取值为-5 到 5 的整数，α的变量为 0 到 180°的其中一个度数，并将该度数转化为弧度制的形式，保持单位一致；再画一条射线，规定该射线与 x 轴正方向的夹角为变量，并将其命名为$\alpha + 2k\pi$，其中要注意这里的k就是先前甚至的变量，再然后点计算，分别输入

$sin(\alpha + 2k\pi), cos(\alpha + 2k\pi)$和$tan(\alpha + 2k\pi)$；最后再点击变量$k$的按钮，观察数值的变化，最后图形如图 15 所示。

6. 标注特征点：在绘制的图像上标注出一些关键特征点，如交点。这有助于理解函数图像的性质和周期性特征。

7. 添加标签和说明： 在图像周围添加标签，包括 x 轴和 y 轴的标签，以及函数名称。你还可以添加说明，解释函数图像的特征和周期性，比如在界面添上每当终边旋转一周后，中间位置是相同的，此时三角函数的值是相同的，即三角函数具有周期性的描述性话语。

8. 调整细节： 最后，检查绘制的图像，确保坐标轴、曲线和标签清晰可见。根据需要进行调整和修正，使图像更加美观和易于理解。

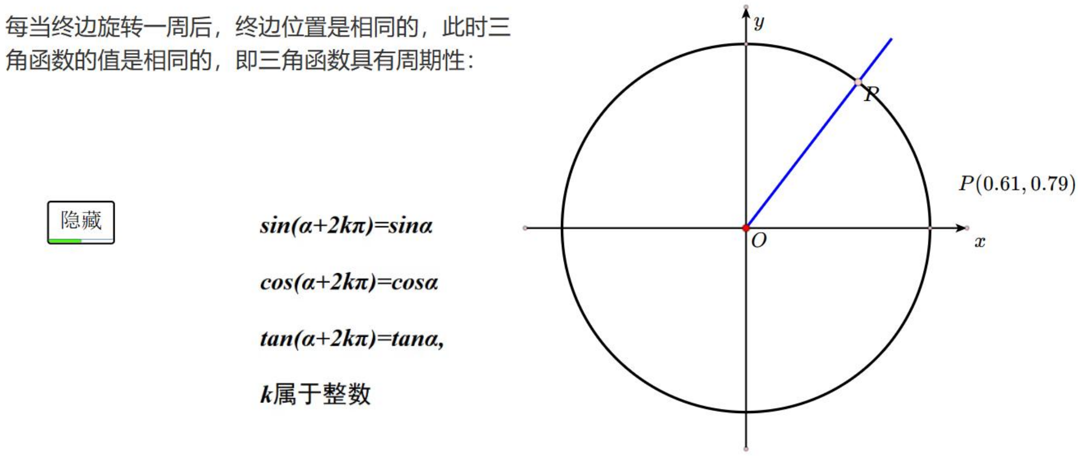


图 5 三角函数的周期性的图例

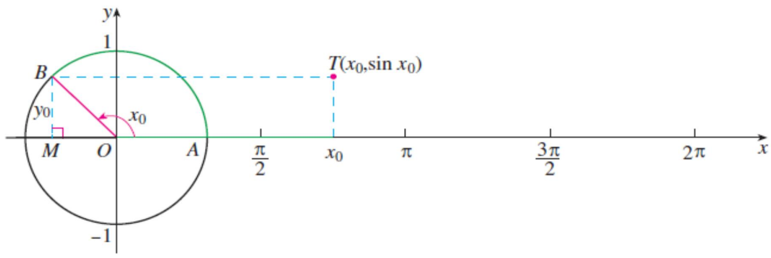
【设计意图】老师指导学生看图，进行归纳。通过对实例中的图形和对其进行分析，找出其规律，从而让学生由特殊向一般的转变，教师应用网络画板将$\alpha+2k\pi$值进行变化是图像的变换过程展示，由直观、动感的图象可知，无论何时结束一次转动，其中心点都不变，这时三角形的数值不变，也就是三角形是周期的。让同学们去探索新知识。

4.6.2 实验班的教学设计（二）改进与实施

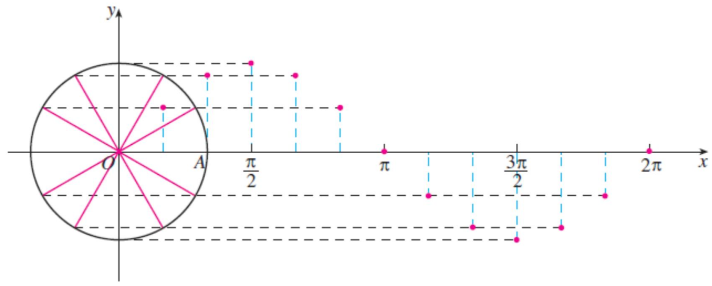
改进点 1：在创设问题情境环节，把正弦函数图像的变化改成一起研究网络画板如何研究正弦函数图像。

下面先研究函数$y=sinx$， $x\in$R 的图象，从画函数$y=sinx$，$x\in$［0，2π］的图象开始.在［0，2π］上任取一个值x_0，如何利用正弦函数的定义，确定正弦函数值$sinx_0$并画出点T（x_0，$sinx_0$）？

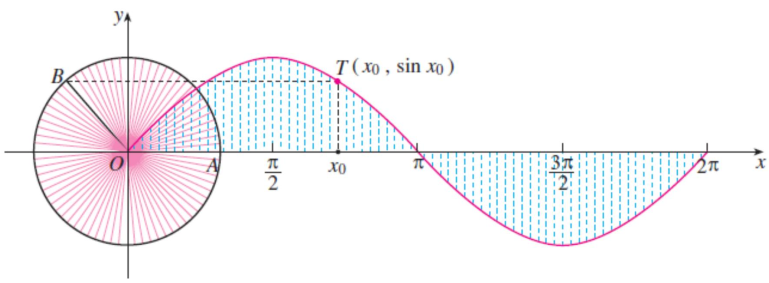
如图，在直角坐标系中画出以原点O为圆心的单位圆，⊙O与 x 轴正半轴的交点为A（0，2π）. 在单位圆上，将点A绕着点O旋转x_0弧度至点B，根据正弦函数的定义，点B的纵坐标$y_0=sinx_0$. 由此，以x_0为横坐标，y_0为纵坐标画点，即得到函数图象上的点T（x_0，$sinx_0$）.



若把x轴上从 0 到 2π这一段分成 12 等份，使x_0的值分别为 $0,\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\cdots 2\pi$，它们所对应的角的终边与单位圆的交点将圆周 12 等分，再按上述画点 T（x_0，$sinx_0$）的方法，就可画出自变量取这些值时对应的函数图象上的点



事实上，利用信息技术，可使x_0在区间［0, 2π］上取到足够多的值而画出足够多的点T（x_0，$sinx_0$）, 将这些点用光滑的曲线连接起来，可得到比较精确的函数$y = sinx$，$x \in$［0,2π］的图象.

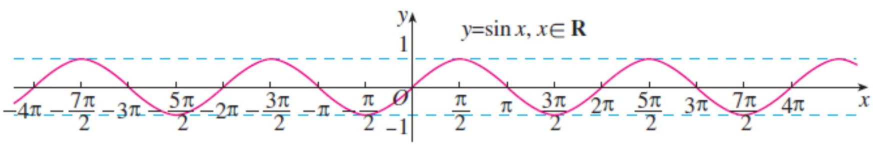


根据函数$y = sinx$， $x \in$［0,2π］的图象，你能想象函数$y = sinx$， $x \in R$ 的图象吗？

由诱导公式一可知，函数$y = sinx$， $x \in$［$2k\pi$，$2(k+1)\pi$］，$k \in Z$且$k \neq 0$ 的图象与$y = sinx$， $x \in$［0,2π］的图象形状完全一致.

因此将函数$y = sinx$， $x \in$［0,2π］的图象不断向左、向右平移（每次移动 2π个单位长度），就可以得到正弦函数$y = sinx$， $x \in$R 的图象。

正弦函数的图象叫做正弦曲线，是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线.



思考：在确定正弦函数的图象形状时，应抓住哪些关键点？

【设计意图】学生更能清楚的明白正弦函数图象的关键点，还有其图像自带的性质——连续光滑的曲线，并且在网络画板展示正弦函数图像的过程中，也初步积攒了微积分的认识。

改进点 2：把纸上画五点画图法也改成用网络画板作图的基本流程。

观察图 5.4.3，在函数$y = sinx$，　$x \in [0,2\pi]$ 的图象上，以下五个点：

$$(0,0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0)\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0)$$

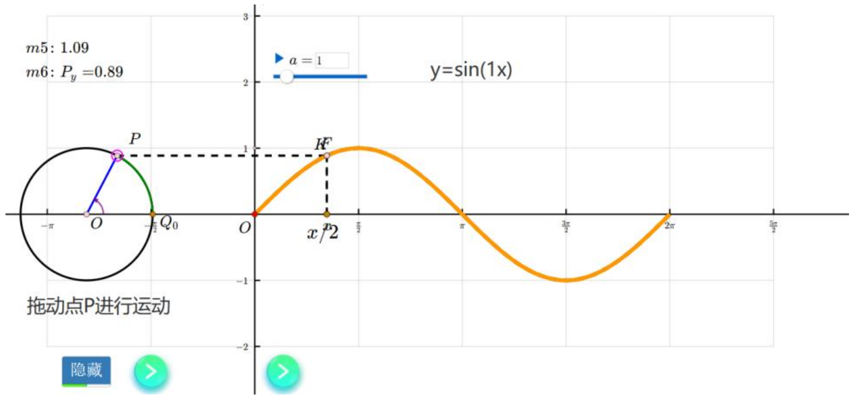


图 6 $y = sinx$的一般图像

在确定图象形状时起关键作用．描出这五个点，函数$y = sinx$，　$x \in [0,2\pi]$ 的图象形状就基本确定了．因此，在精确度要求不高时，常先找出这五个关键点，再用光滑的曲线将它们连接起来，得到正弦函数的简图，这种近似的“五点（画图）法”是非常实用的。

【设计意图】让学生更能直观清晰得明白x作为自变量，其具备的一一对应的性质，从而对三角函数图像的变化理解更透彻。

4.6.3 实验班的教学设计（三）改进与实施

改进点 1：将讲授正切函数 $y=\tan x \quad x\in R$，且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in z)$ 图象改成带领学生使用网络画板画出正切函数的图像。步骤如下：

1. 打开网络画板软件，并准备一个坐标系作为绘图区域。

2 标记坐标轴：在绘图区域内绘制出x轴和y轴，并标注坐标轴的刻度。

3. 绘制正切函数图像的基本周期：正切函数的基本周期是π，因此我们可以在 x 轴上每隔π绘制一个周期的点。首先，从原点开始，在 x 轴上标记出 0、$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$等点。

4. 计算函数值：根据正切函数的定义，计算每个点的函数值。正切函数的计算公式是 $\tan(x)=\frac{sin(x)}{cox(x)}$。

5. 绘制图像：连接相邻点，并绘制出正切函数的图像。需要注意的是，在绘制过程中，要注意观察正切函数在特殊点（如$\frac{\pi}{2}$的奇点）的特殊性质。

6. 标注坐标轴：标注出坐标轴上的$\frac{\pi}{2}$、$-\frac{\pi}{2}$等特殊点，以及图像上的极值点和拐点。

7. 优化图像：根据需要，可以调整绘图的样式，如线条粗细、颜色等，以使图像更清晰易读。

8. 总结结果：在图像旁边或下方，添加图例或文字说明，说明绘制的是正切函数的图像，并简要说明函数的性质和特点。

通过以上步骤，可以使用网络画板绘制出正切函数的图像，并详细记录绘制的过程。

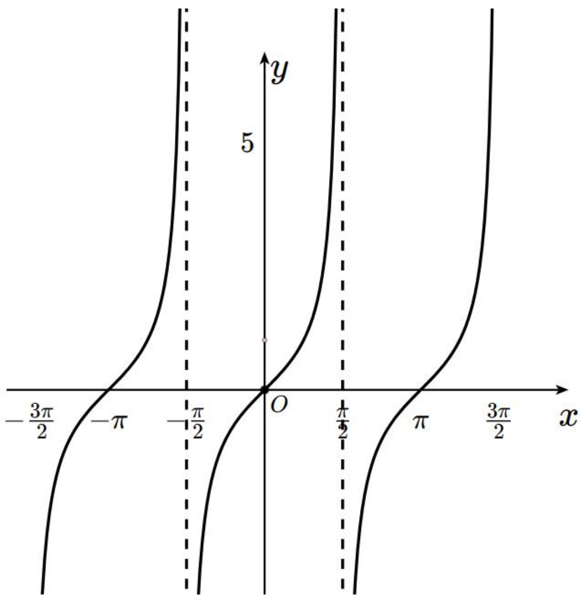


图 7 正切函数图像

4.6.4 实验班课堂小测情况及其分析

课堂实施评价：整个学习氛围良好，知道如何对学生的参与进行有效的指导，在教学过程中，可以将网络画板运用到实际操作中，指导学生将新旧知识连接起来，以学生已有的知识体验为出发点，这是一个不错的选择。但是，在课堂上，知识的量比较大，可以将使用函数的解析式的问题可以放到练习课上来讲解，这样就有了更多的时间来完成。高一（6）班选择的课堂小测的题目与高一（12）班的测验题目是一样的，都给了20 分钟的作答时间，用来检测该班教学后的直观想象素养是否达到可测水平，为下文范希尔理论用于评估作铺垫，该班的课堂小测情况在附录 E 展示。

一共收上来 60 份，其中全对的有 12 人。且同学们第一题的做题时间大致在九分半，第二题的做题时间大多在 7 分钟。相对于常规班来说，在画图这方面速度是较快的，至于具体的直观想象素养水平，还需要测试卷来进行检测。

综上所述，高一（6）班同学的直观想象素养达到可测水平，学生超越能辨认出物体的局部特点，还能分辨两种或多种不同形状，且辨认同种物体。将能够刺激触觉的，更具体的图像作为进行推理的物体，已经较轻松，所以可以看出同学们基本超越水平 0：前认知水平，达到可测水平一的阶段。

4.7 网络画板进行教学的教案实例

用网络画板进行教学的一些案例展示：如三角函数的相关章节的讲解，如图 8-13 所示；并且选取特定的三角函数的周期性有关的章节，列举了教案设计。

使用网络画板来画出三角函数去讲明三角函数的概念（如图 8）、三角函数的切线（如图 9）、三角函数的周期性（如图 10）都可以通过以下步骤实现：

1. 准备工作： 打开网络画板软件并创建一个新的画板。确保你已经熟悉了软件的基本操作，包括绘图工具、形状工具等。

2. 绘制坐标轴： 使用直线工具或形状工具在画板上绘制出坐标轴。通常，x 轴水平向右延伸，y 轴垂直向上延伸。确保标注出坐标轴的刻度和标签。

3. 绘制三角函数图形： 根据需要选择要绘制的三角函数，如正弦函数、余弦函数或正切函数。根据函数的周期和幅度，在坐标轴上画出至少一个周期的函数图形。

4. 选择切点： 在所选的三角函数图形上选择一个点作为切点，这个点将是切线与函数图形相切的点。

5. 绘制切线： 根据切点处函数曲线的斜率，绘制出与函数图形相切的直线。切线的斜

率应该等于函数曲线在切点处的导数值。

6. 标注切线： 添加标签或注释，标注出切线方程、切点坐标以及切线的斜率等重要信息。

7. 调整和完善： 仔细检查绘制的图形，确保切线与函数图形相切，并且切线的斜率正确。根据需要进行调整和完善，确保图形清晰易懂。

8. 保存和分享： 最后，保存绘制的图形，并将其分享给需要的人员，或者将其用于演示、教学等目的。

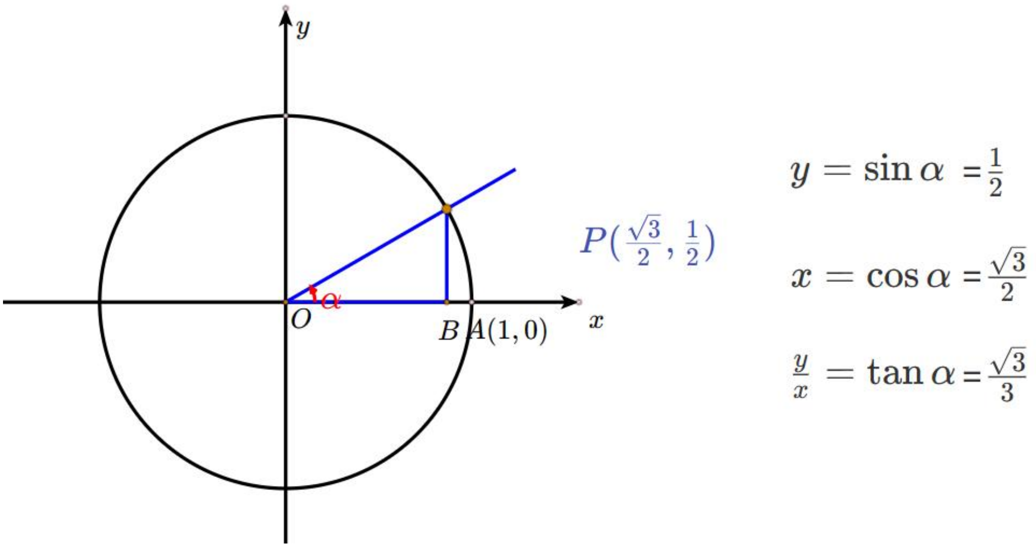


图 8 三角函数的概念的网络画板示意图

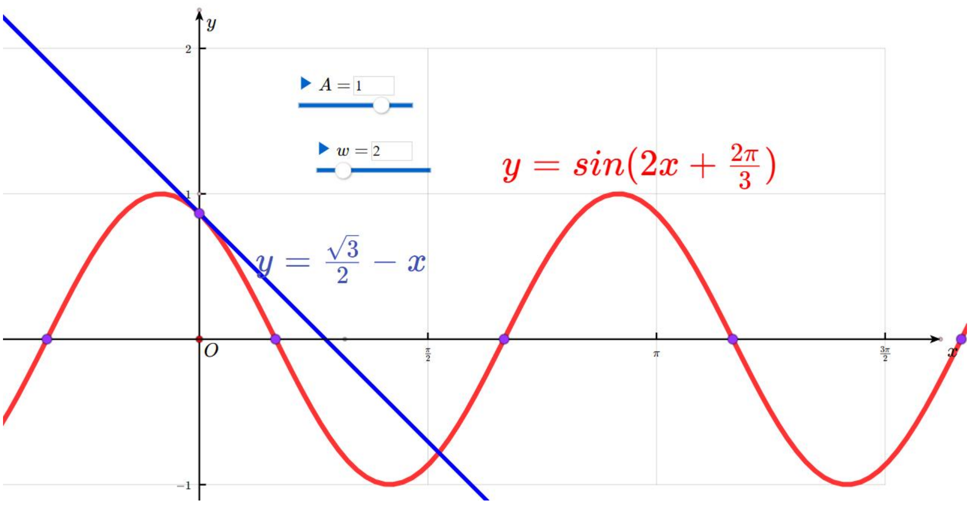


图 9 三角函数切线的网络画板示意图

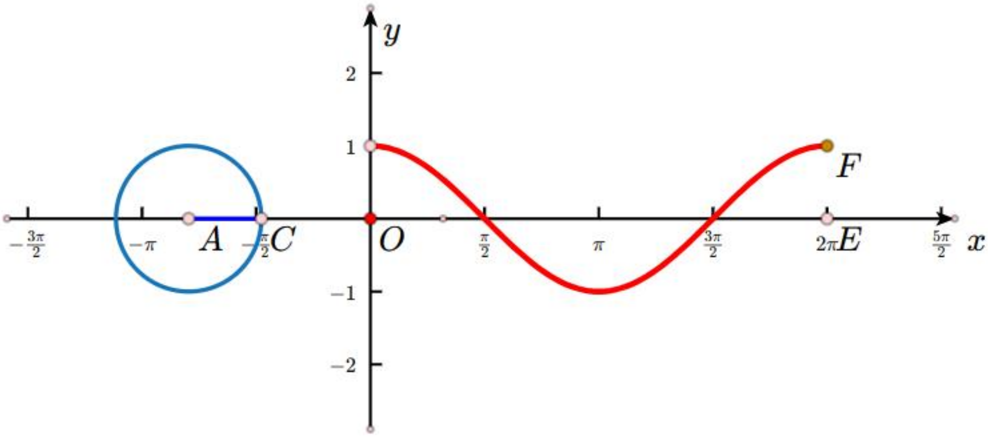


图 10 轨迹法作余弦函数图像的网络画板示意图

诱导公式推导的过程：使用网络画板软件探究三角函数的诱导公式（如图 11）可以按照以下步骤进行：

1. 绘制单位圆：在画板上绘制一个半径为 1 的圆，并标记出圆心 0、半径为 1 的正向x轴和y轴。并绘制角度：选择一个角度θ，通常在 0 到 360 度之间，并在单位圆上绘制角度θ对应的终边。标记点：将终边上的点坐标标记为（x，y），其中x为点在x轴上的坐标，y为点在y轴上的坐标。

2. 绘制直角三角形：从点（x，y）向x轴作垂线，与x轴和y轴分别构成直角三角形。再应用三角函数：根据直角三角形的定义，计算 $\sin\theta$、$\cos\theta$和 $\tan\theta$，并将结果标记在画板上。观察特点：观察 $\sin\theta$、$\cos\theta$和 $\tan\theta$之间的关系，并尝试推导出诱导公式。

3. 推导公式：根据三角函数的定义和特性，推导出 $\sin(\theta \pm \alpha)$和 $\cos(\theta \pm \alpha)$的诱导公式，其中α为任意角度。最后总结结果：将推导出的诱导公式写下来，并总结推导过程中的关键步骤和观察结果。通过以上步骤，可以使用网络画板软件探究三角函数的诱导公式，并详细记录推导过程。

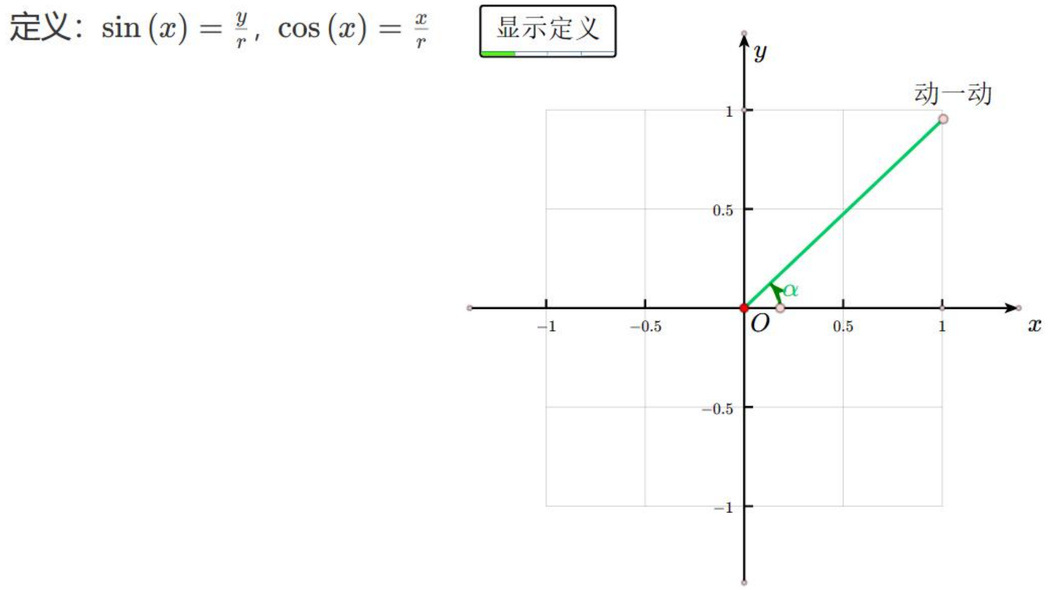


图 11　诱导公式推导的网络画板示意图

还有例如一般性随机变化的三角函数图像就需要在基础图象画出之后，注意多变量的设置，如图 12；再如三角函数周期性转换示意图，就需要变量之间的联动性，如图 13，教师要加强对网络画板软件的熟练度，争取做到有直观展示的需要，就有相对应的图例。

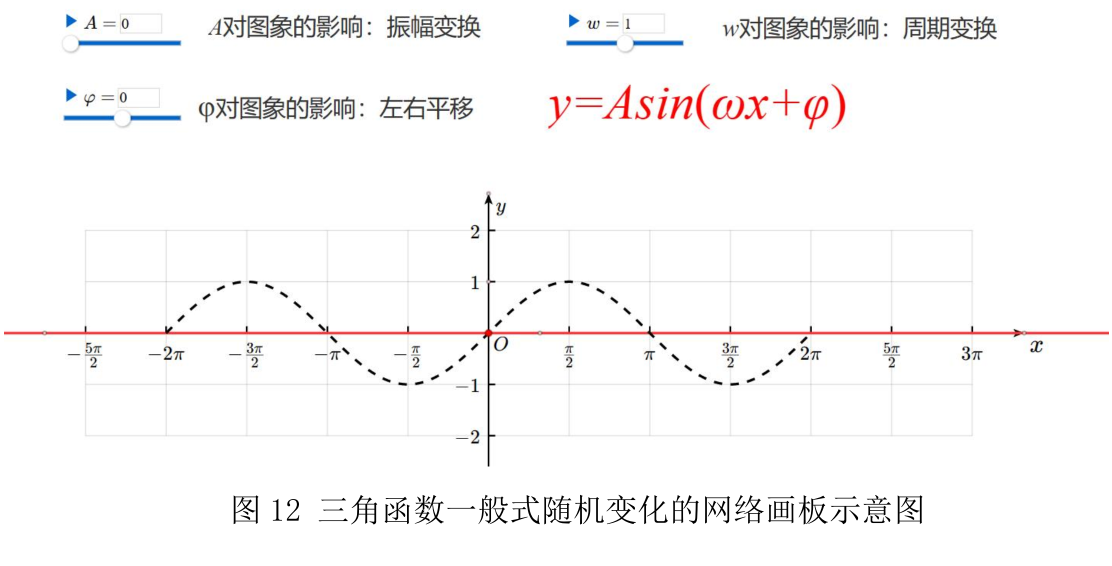


图 12 三角函数一般式随机变化的网络画板示意图

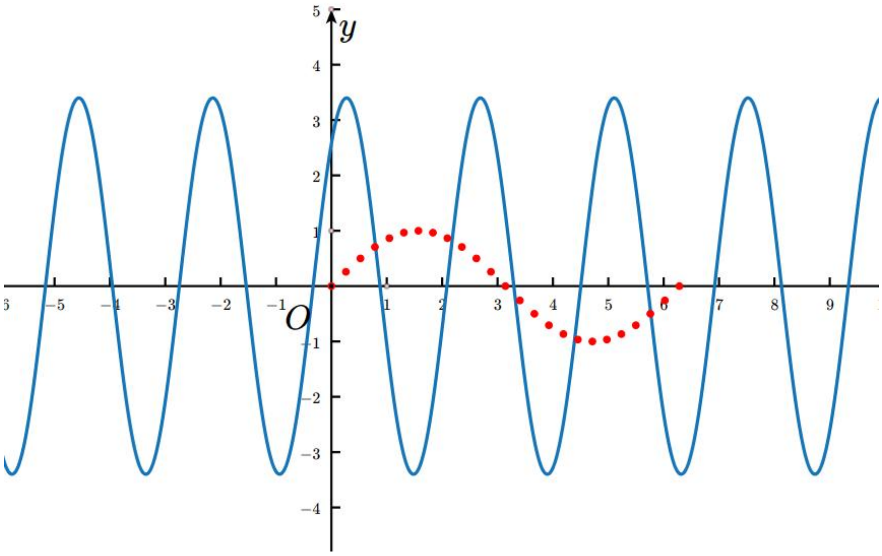


图 13　学生们自由赋值创作的网络画板示意图

第五章 教学实践情况数据分析

5.1 测试卷的设计

5.1.1 研究对象

根据本文的研究问题，研究者选择的调查对象是海口市某中学高一年级的两个班，分别是高一（6)、高一（12），属于理科平行班，参加本次测试的学生总人数为 124 人。

5.1.2 测试题类型

测试题有三种：选择题、填空题、解答题。并要求选填题写出解答过程，体现思考过程。

5.1.3 测试题内容与关键点解析

因本人在海口市某中学担任高一数学实习教师，正在教授三角函数课程，方便了解学生对三角函数的掌握程度，也可以收集到正确的数据，所以选择了三角函数作为测试内容。

试题内容是根据 4 个水平来选取的，每个水平选取了 3 道题目，总共 12 道题，下面是对这 8 道试题进行水平分析，在课堂小测中我们已经发现学生基本的识图能力是都能达到的，且大多数高中生都无法达到数学家的水平，所以我们考察范围去掉水平一和水平五，单测学生水平一到水平四的分布情况。并且将测试题整理完放在了附录 C。

水平一：视觉水平

第 1 题：下列命题正确的是（）

A. 第一象限角一定不是负角　　B. 小于 $90°$的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限角　　D. 第一象限角一定是锐角

第 2 题：下列命题正确的是_____________（填序号）.

①$-30°$是第一象限角；

②$750°$是第四象限角；

③终边相同的角一定相等；

④$-950°12'$是第二象限的角.

第 3 题：已知α为第二象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角

第 1 题考查学生对任意三角函数的概念，包括锐角、钝角、象限角的定义。

第 2 题考查对任意角度的三角函数的定义和应用，对同一端点的角和象限角等的概念进行考察，测试学生对三角函数的概念有没有掌握，是否能够通过图像对概念进行直观的了解。

第 3 题考查学生是否弄清楚象限角的概念，是否还能灵活运用分类讨论思想。需注意：

（1）判断象限角的步骤

①当 $0° \leq \alpha < 360°$时，直接写出结果；

②当$\sigma < 0°$或$\sigma \geq 360°$时，将α化为$k \cdot 360° + \beta$($k \in \mathbf{Z}$，$0° \leq \beta < 360°$)，转化为判断角 β 所属的象限．

（2）一般地，要确定$\frac{\sigma}{n}$所在的象限，可以作出各个象限的从原点出发的n等分射线，它们与坐标轴把周角分成 $4n$个区域，从x轴的非负半轴起，按逆时针方向把这 $4n$个区域依次标上 1,2,3,4，…，$4n$，标号为几的区域，就是根据α所在第几象限时，$\frac{\sigma}{n}$的终边所落在的区域，如此，$\frac{\sigma}{n}$所在的象限就可以由标号区域所在的象限直观地看出．

水平二：分析水平

第 4 题：作出$-\frac{5\pi}{8}$的正弦线、余弦线和正切线．

第 5 题：在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边的范围，并由此写出角α的集合．

(1) $\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$.

第 6 题：利用正弦曲线，求满足$\frac{1}{2} < sin\,x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$的$x$的集合

第 4 题考查了三角函数的性质，并初步考察了学生自己做出图像的过程. 该题做法如图 14 所示，该类题具体做法如表 4 所示。

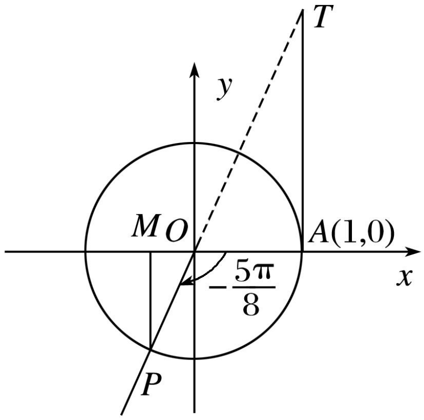
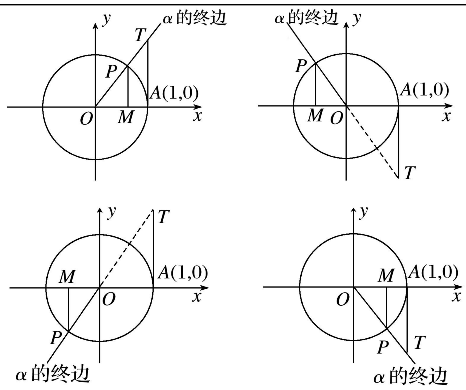


图 14 引单位圆的切线

表 5 三种线的画法

图示	
正弦线	角α的终边与单位圆交于点P，过点P作PM垂直于x轴，有向线段$\underline{MP}$即为正弦线
余弦线	有向线段OM即为余弦线
正切线	过点$A(1,0)$作单位圆的切线，这条切线必然平行于y轴，设它与σ的终边或其反向延长线相交于点T，有向线段$\underline{AT}$即为正切线

第 5 题让学生建立起计算任意角的三角函数与其边上点的坐标之间的关系。首先应让学生明白三角函数值与角终边点的位置的选取无关，然后通过不同象限下的角演示，逐渐形成计算任意角的三角函数的操作过程。

（1）作直线$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$交单位圆于A，B两点，连接OA，OB，则OA与OB围成的区域（如图（1）所示的阴影部分，包括边界），即为角 α 的终边的范围．如图 15 所示。

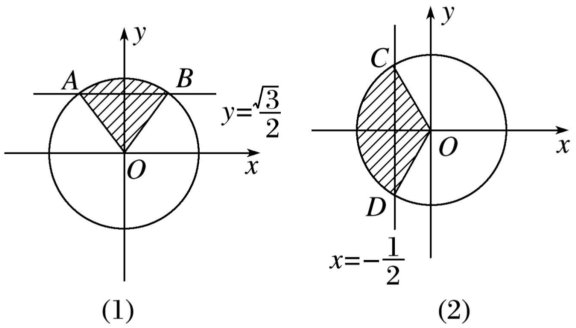


图 15 边界示意图

故满足要求的角 α 的集合为$\left\{\alpha \middle| 2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq\alpha\leq 2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2）作直线$x=-\frac{1}{2}$交单位圆于C，D两点，连接OC与OD，则OC与OD围成的区域（如图（2）所示的阴影部分，包括边界），即为角 α 的终边的范围.

故满足条件的角 α 的集合为$\left\{\alpha \middle| 2k\pi+\frac{2\pi}{3}\leq\alpha\leq 2k\pi+\frac{4\pi}{3}，k\in\mathbf{Z}\right\}$.

第 6 题：首先作出$y=\sin x$在$[0,2\pi]$上的图像，如图所示，作直线$y=\frac{1}{2}$，根据特殊角的正弦值，可知该直线与$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的交点横坐标为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{5\pi}{6}$. 如图 16 所示。

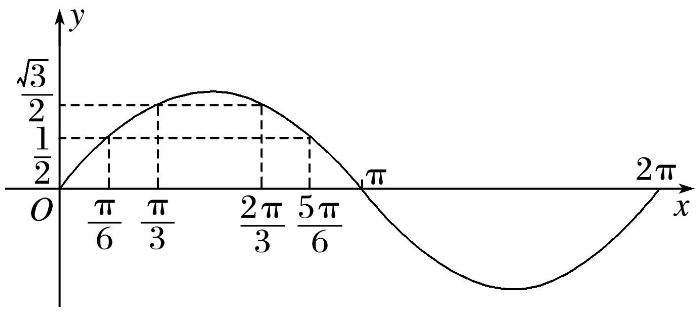


图 16 正弦函数一个周期的图例

作直线$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，该直线与$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的交点横坐标为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{2\pi}{3}$.

观察图像可知，在$[0,2\pi]$上，当$\frac{\pi}{6}<x\leq\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}\leq x<\frac{5\pi}{6}$时，不等式$\frac{1}{2}<\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$成立．所以$\frac{1}{2}<sin\, x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$的解集为$[\frac{\pi}{6}+2k\pi<x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi]\cup[\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leq x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi]$.

几何法作图的一般图例为图 17 所示：

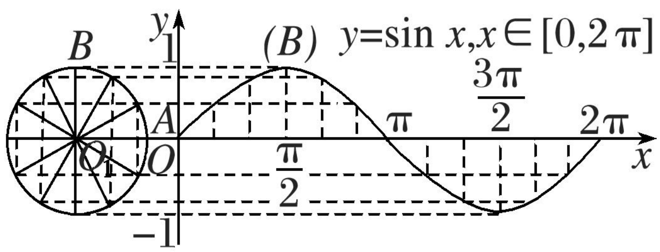


图 17 几何法作图

因为终边相同的角有相同的三角函数值，所以函数$y=\sin x$，$x\in$
$2k\pi$，$2(k+1)\pi$)，$k\in\mathbf{Z}$且$k\neq 0$ 的图像与函数$y=\sin x$，$x\in 0,2\pi$）的图像的形状完全一致．于是只要将函数$y=\sin x$，$x\in 0,2\pi$）的图像向左、向右平行移动（每次 2π 个单位长度），就可以得到正弦函数$y=\sin x$，$x\in$ R 的图像，如图 18 所示。

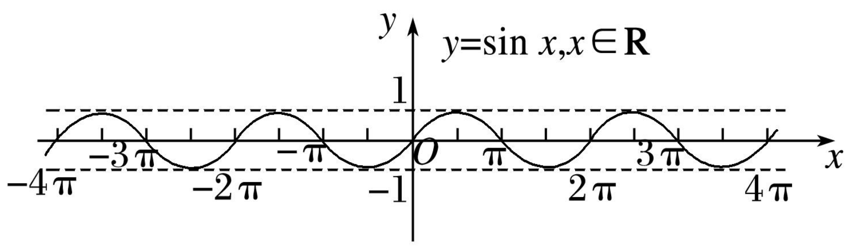


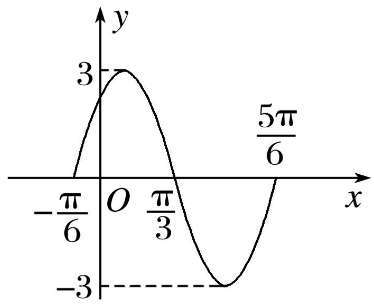
图 18 正弦函数图像

水平三：抽象水平

第 7 题：已知$f x$)是以π为周期的偶函数，且$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，f(x)=1 - sin x，当$x\in\left[\frac{5\pi}{2},\ 3\pi\right]$时，求$f(x$）的解析式.

第 8 题：求函数$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的单调递增区间

第 9 题：如图是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像，求$A$，$\omega$，$\varphi$的值，并确定其函数解析式.



第 7 题周期函数的定义是一个学习的难点。学生可以从“周回的反复出现”开始，比如“日夜、日夜”，一步一步地将自己的语言表达得更加准确，用“每隔一段时间出现”“自变量增减一个值就反复出现”等方式，逐渐提炼出了函数的周期性。理解函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$都是周期函数，都存在最小正周期。并会求函数

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$及$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的周期.

$$x\in\left[\frac{5\pi}{2},\ 3\pi\right]\text{时，}3\pi-x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],$$

因为$x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$时，$f(x)=1-\sin x$，

所以$f(3\pi-x)=1-\sin(3\pi-x)=1-\sin x$.

又$f(x)$是以π为周期的偶函数，

所以$f(3\pi-x)=f(-x)=f(x)$，

所以$f(x)$的解析式为$f(x)=1-\sin x$，$x\in\left[\frac{5\pi}{2},\ 3\pi\right]$.

第 8 题考察了是否能掌握正弦函数、余弦函数的单调区间，并用整体替换法求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$或$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的单调区间时，如果式子中$x$的系数为负数，先利用诱导公式将$x$的系数变为正数再求其单调区间．求单调区间时，需将最终结果写成区间形式.

令$z=x-\frac{\pi}{4}$，则$y=-2\sin z$.

因为z是x的一次函数，所以要求$y=-2\sin z$的单调递增区间，即求 $\sin z$的单调递减区间，

即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le z\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

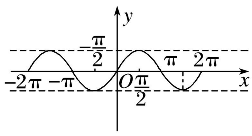
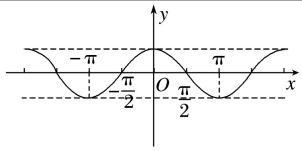
$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{7\pi}{4}$（$k\in$Z），

$\therefore$函数$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的单调递增区间为$\left[2k\pi+\frac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\right]$（$k\in$Z）.

而关于$y=A\sin(\omega x+\varphi)$或$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的解法总结如表 2 所示。

表 6 y＝Asin(ωx＋φ）或y＝Acos(ωx＋φ）知识点总结

解析式	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图像		
值域	[−1,1]	[−1,1]
单调性	在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in$Z 上递增，在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in$Z 上递减	在$[-\pi+2k\pi,\ 2k\pi]$，$k\in$Z 上递增，在$[2k\pi,\ \pi+2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$上递减
最值	当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{max}=1$；当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{min}=-1$	当$x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$时，$y_{max_x}=1$；当$x=\pi+2k\pi$，$k\in$Z 时，$y_{min}=-1$

第 9 题进一步研究函数 y＝Asin(ωx＋Φ）的简图的画法，由此揭示这类函数的图像

与正弦曲线的关系，以及 A、ω、ϕ的物理意义，这不仅是对函数图像变换的拓展，而且是对函数特性的直接反映.

由图像知振幅$A=3$，

又$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$， $\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

由点$\left(-\frac{\pi}{6},\ 0\right)$可知，$-\frac{\pi}{6}\times 2+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

又$|\varphi|<\pi$，得$\varphi=\frac{\pi}{3}$， $\therefore y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

水平四：形式化水平

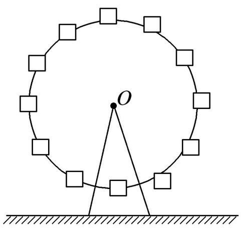
第 10 题：已知曲线$y=A\sin(\omega x+\varphi)$上最高点为（2，$\sqrt{2}$），该最高点与相邻的最低点间的曲线与$x$轴交于点（6, 0）.

（1）求函数的解析式;

（2）求函数在$x\in[-6,0]$上的值域.

第 11 题：求函数$f(x)=2\sin^2 x+2\sin x-\frac{1}{2}$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$的值域.

第 12 题：如图所示，游乐场中的摩天轮匀速转动，每转一圈需要 12 分钟，其中心O距离地面 40.5 米，半径为 40 米. 如果你从最低处登上摩天轮，那么你与地面的距离将随时间的变化而变化，以你登上摩天轮的时刻开始计时，请解答下列问题：



（1）求出你与地面的距离y（米）与时间t（分钟）的函数关系式;

（2）当你第 4 次距离地面 60.5 米时，用了多长时间？

第 10 题指导学生比较、分析转换目标的目的，促进他们在解题时，对公式的选取方式进行选择，并按照问题的条件对公式进行变形，在转换过程中所包含的换元、逆向使用公式等数学思想方法的认识，同时还要注意每个学生的个性差异和不同的学习需要。

（1）由题意可知$A=\sqrt{2}$，$\frac{T}{4}=6-2=4$，

$\therefore T=16$，即$\frac{2\pi}{\omega}=16$，$\therefore\omega=\frac{\pi}{8}$，

$\therefore y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)$.

又图像过最高点$(2,\sqrt{2})$，$\therefore\sin(\frac{\pi}{4}+\emptyset)=1$

故$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

由$|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$，得$\varphi=\frac{\pi}{4}$，$\therefore y=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4})$

(2) $\because -6\le x\le 0$，$\therefore -\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$，

$\therefore -\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$.

即函数在$x\in[-6,0]$上的值域为$[-\sqrt{2},1]$.

第 11 题研究了各种通用函数的值域计算方法，求其值域的方法有：观察法、配方法以及判别法；三角函数是一种比较特殊的函数，通常的解法也可以应用，但必须与三角函数自身的特性相联系.

令$t=\sin x$，因为$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

所以$t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，则$f(x)$可化为

$y=2t^2+2t-\frac{1}{2}=2(t+\frac{1}{2})^2-1$，$t\in[\frac{1}{2},1]$，

所以当$t=\frac{1}{2}$时，$y_{min}=1$，

当$t=1$时，$y_{max}=\frac{7}{2}$，

故$f(x)$的值域是$[1,\frac{7}{2}]$.

第 12 题研究表明，在求解三角函数的实践应用问题时，一定要遵循普通应用题的解答过程。（1）仔细地阅读题目，把问题中的已知条件和所求的结论都弄清楚。（2）构造三角函数的数学模型，使实际问题得到有效地解决。（3）运用三角函数的相关知识求解三角函数，得到相应的数学模型。（4）从实际问题的重要性出发，对一个具体的问题进行求解。（5）把得到的结论返回并转换为实际问题的解答。

（1）由已知可设$y=40.5-40\cos\omega t$，$t\geq 0$，

由周期为 12 分钟可知，当$t=6$时，摩天轮第 1 次到达最高点，即此函数第 1 次取得最大值，

所以 $6\omega=\pi$，即$\omega=\frac{\pi}{6}$,

所以$y=40.5-40\cos\frac{\pi}{6}t(t\geq 0)$.

（2）设转第 1 圈时，第t_0分钟时距离地面 60.5 米.

由 $60.5=40.5-40\cos\frac{\pi}{6}t_0$，得 $\cos\frac{\pi}{6}t_0=-\frac{1}{2}$,

所以$\frac{\pi}{6}t_0=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{\pi}{6}t_0=\frac{4\pi}{3}$,

解得$t_0=4$或$t_0=8$,

所以$t=8$（分钟）时，第 2 次距地面 60.5 米，

故第 4 次距离地面 60.5 米时，用了 12＋8＝20（分钟）.

梳理　(1）应用三角函数法求解实践问题的通用程序

第一阶段：读懂题目，了解题目的意思

阅读题目时，要一个字一个字地去看，把题目里的每一句话都看得明白，明白了问题的真实情况，然后再对自己已经知道什么、求什么进行分析，然后把相关的数学问题提取出来。

第二个步骤是数据的采集和整理，并对其进行建模

在搜集的资料基础上，找到变化的规律，利用已经掌握的三角函数、物理等知识，构建一个联系，把实际的问题转换成一个与三角函数相联系的数学问题，也就是，要构

建三角函数的模型，把实际问题的数学化。

第三个步骤：运用已有的三角函数知识，求解出三角函数的数学模型。

第四个步骤：把得到的结论翻译为真实问题的解答。

（2）三角函数模型的建立程序

如图所 19 所示：

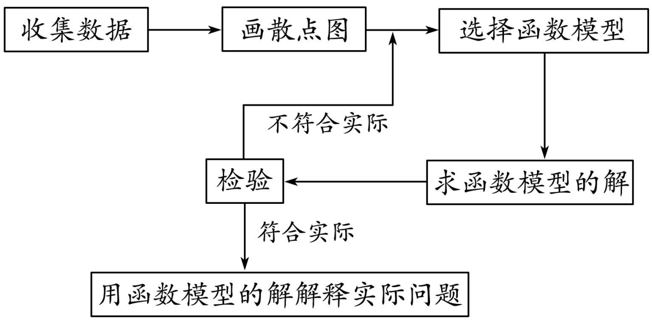


图 19 三角函数模型解决实际问题的一般步骤

5.2 测试卷实施情况与可信性

5.2.1 测试卷的实施情况

本文以海南省海口市一所高中为例，因现实情况所限，仅选择一所高一（6）班 61 名和高一（12）班 63 名，测验试卷的测试日期为 2023 年 11 月，并在指定期限内自行进行，严禁同学之间相互讨论和交流，考试试卷按时发放。

5.2.2 测试卷的回收情况

试卷总共发出去 124 张，其中高一 （6）班级收到 61 张，高一 （11）班收到 63 张，其中 6 张无效的被删掉，有效的 118 张纳入考虑。

表 7 测试卷回收情况

	发放试卷	有效试卷	有效率
高一（6）班	61	60	98.56%
高一（12）班	63	58	92.13%

5.2.3 评价方式

水平一得分 20 分，水平二得分 25 分，水平三得分 25 分，水平四得分 30 分，满分

得 100 分。

表 8 评价方式

	题量	分数
水平一	3	20
水平二	3	25
水平三	3	25
水平四	3	30

5.2.4 测试卷的信度分析

Cronabach α可靠性测试最常用的可靠性系数，公式是

$$\alpha=\frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}VAR(i)}{VAR}\right)$$

α为信度系数，k为试题数，VAR(i)为被测学生在i个题目得分方差，VAR为所有被测学生总分得分的方差。由$Spss$20.0 软件统计得

表 9 案例汇总表

		N	%
案例	有效	118	100.0
	已删除	0	.0
	总计	118	100.0

表 10 可靠性统计量

Cronbachs Alpha	基于标准化项的 Cronbach Alpha	项数
.839	.769	5

经过 SPSS 统计结果可知，本测试卷的可信度为 0.839，超过了 0.7，表示试卷可信度较高，是可以反映学生的实际水平的。

5.3 关于学生直观想象素养的调查分析

5.3.1 高一两个班学生直观想象素养的总体情况

在能解出一些较简单的概念性题目时，能凭目测辨认，并绘出三角函数图像，这样就能使学生达到水平一。如果能用三角函数的基本特性来解决问题，并将其归类，就可以认为是水平二。学生如能运用三角函数的公式，定义，性质进行推理，可判水平三。在能了解论证的重要程度，并能建构出定理与知识间的连结时，即可判定学生已达水平四。研究情况如下：将两个班级 118 名学生的测试成绩进行统计，如下图 20 所示：

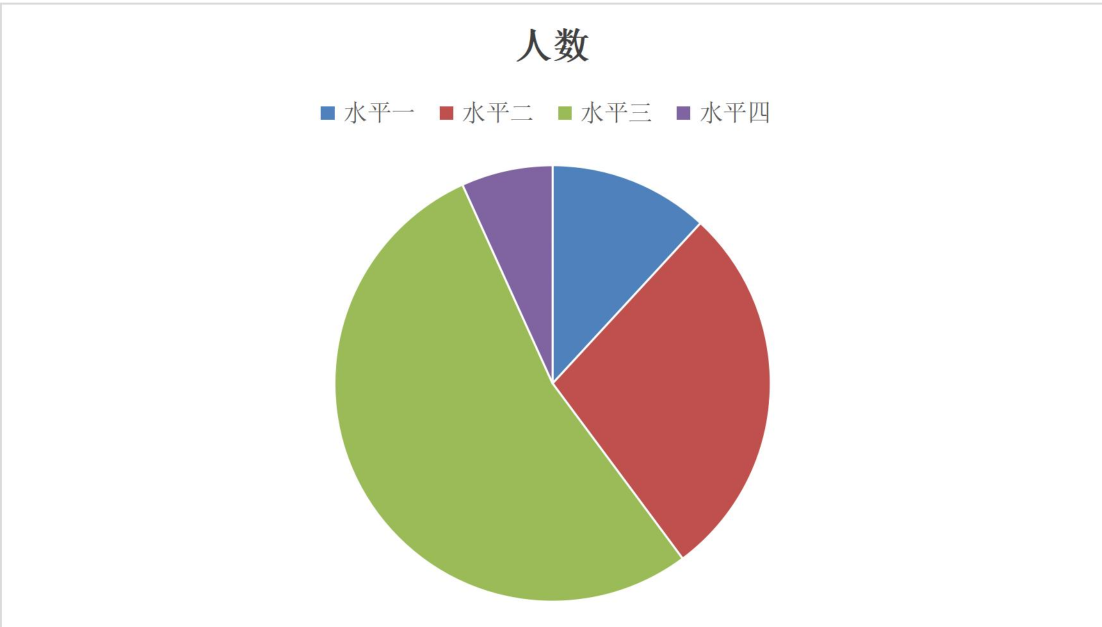


图 20 两班总人数思维水平所占百分比

根据以上统计结果可知，在参加测试的 118 名同学中，能达到水平一的有 14 人，占测试总人数的 11.8%， 达到水平二的仅有 33 人，占测试总人数的 28%，达到水平三的有 63 人，占测试总人数的 53.3%，仅能达到水平四的有 8 人，占测试人数的 7%。

从数据分析来看，大多数高一年级学生的思维能力都在水平三左右，能够进行抽象思考、象征式思考、推理；只有极少数的尖子生，才能到达水平四，这说明他们对三角函数的理解已经很深了。但仍有 11%的同学停留在水平一，对三角函数中的各类概念性质有一定的混淆，仅能区别一些简单的图形，无法进行证明和推理；这一时期的学生要强化对三角函数的概念和性质的学习，老师要对其进行合理的指导，使他们的学习动力得到提升。

5.4 高一两个班级分别的测试情况

5.4.1 高一（6）班（实验班）思维水平分布情况

海口某中学高一（6）班 60 名同学的思维水平分布及水平，如图 21 所示：

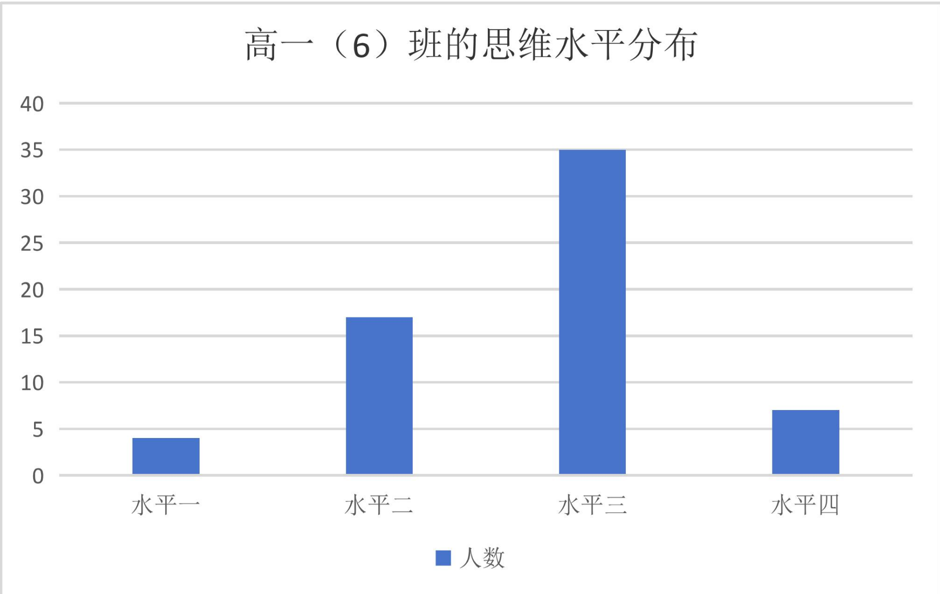


图 21 海口某中学高一（6）班思维水平分布

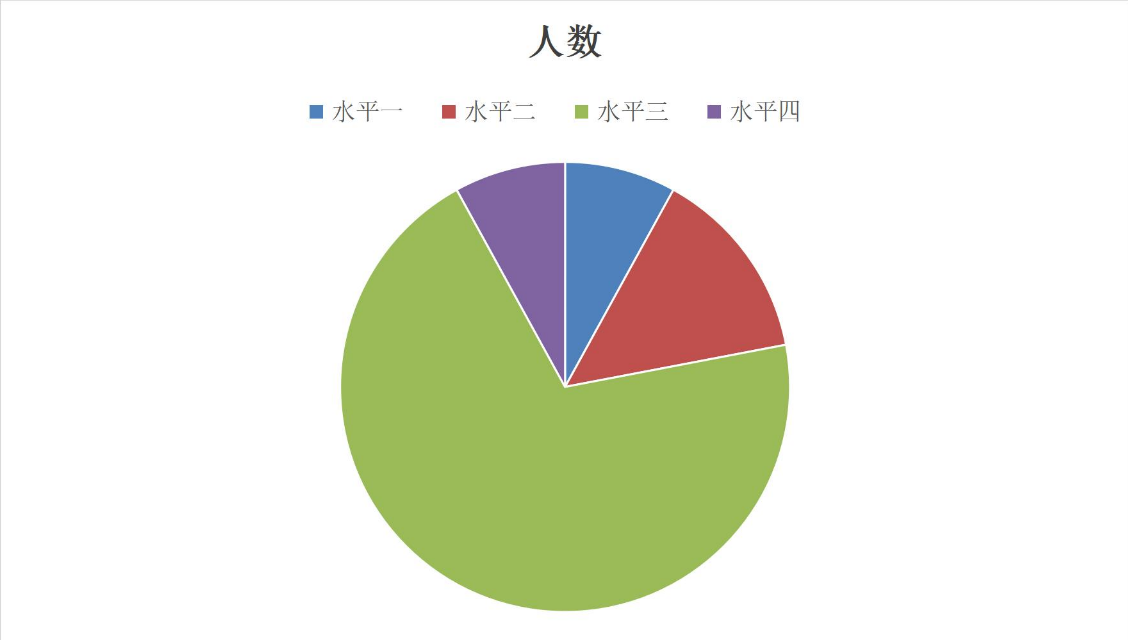


图 22 海口某中学高一（6）班学生各水平所占比例

表 11 思维水平

		频率	百分比	有效百分比	累计百分比
有效	水平一	4	6.7	6.7	6.7
	水平二	17	28.3	28.3	35.0
	水平三	35	58.3	58.3	93.3
	水平四	4	6.7	6.7	100.0
	合计	60	100.0	100.0	

从上表中我们可以看到，六班一共有六十人参加了考试，有 4 人达到了水平四，占参加人数的 6.7%；能达到第 3 水平的学生有 35 人，占总人数的 58.3%；学生达到第 2 级水平的有 17 人，占总人数的 28.3%；只有 4 名学生处于水平一，占全部学生的 6.7%。均值为 2.58，表示学生的平均水平在 3 左右，与整体水平基本一致，标准差小，说明数据与平均水平偏差较小。

5.4.2 高一（12）班(常规班）思维水平分布情况

海口市某中学高一（12）班 58 同学的思维水平分布及水平：

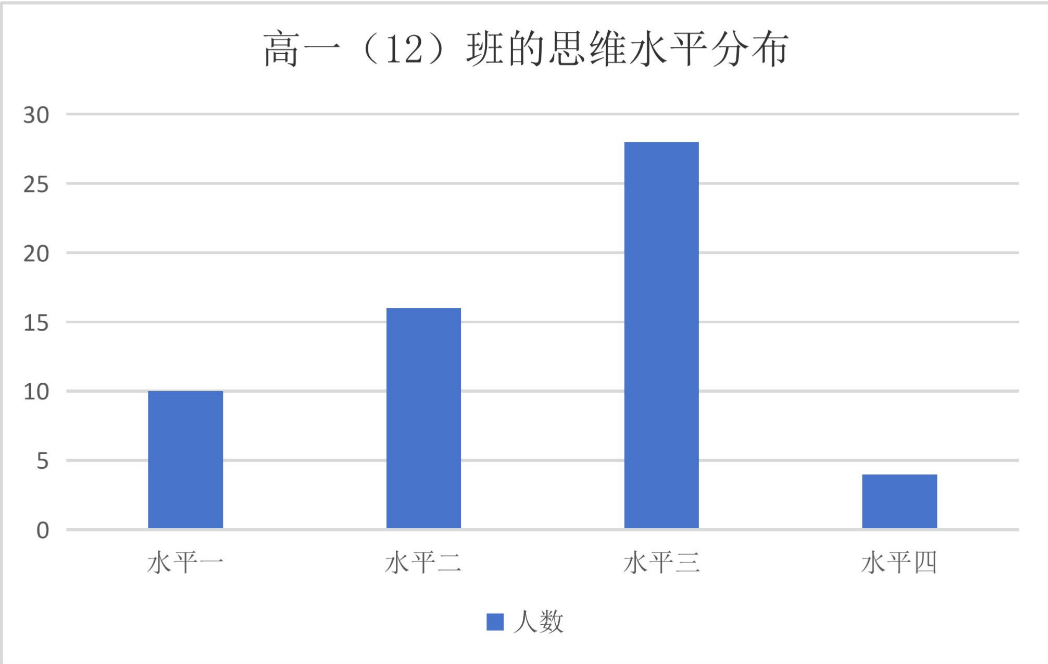


图 23 海口市某中学高一（12）班思维水平分布

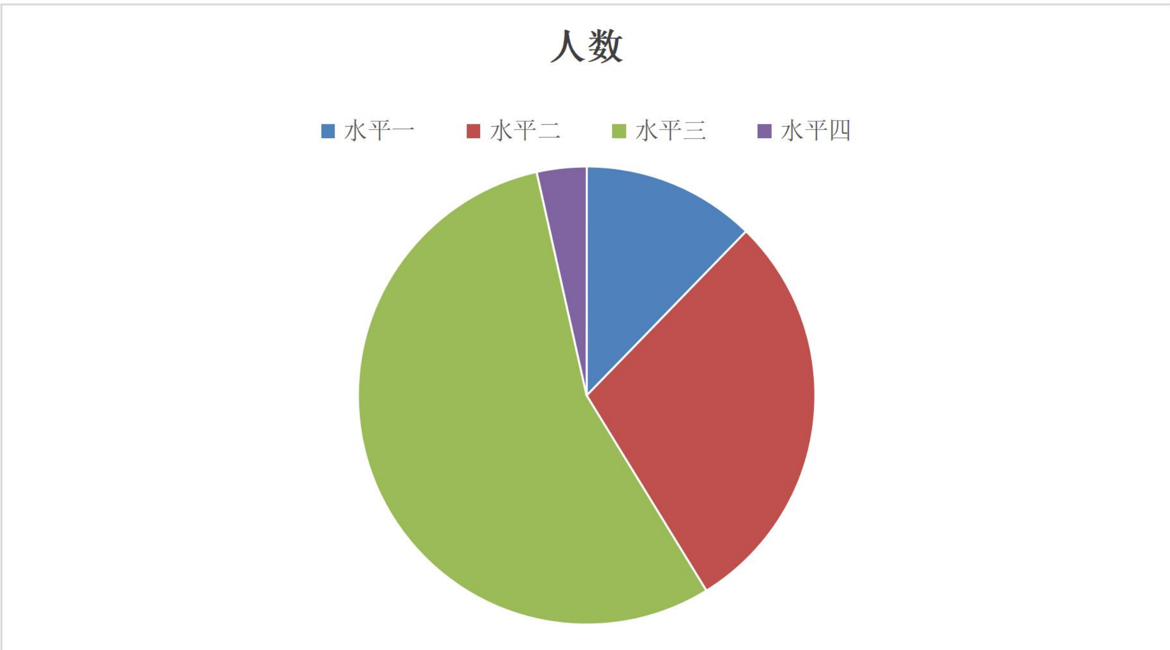


图 24 海口市某中学高一（12）班学生各水平所占比例

表 12 思维水平

		频率	百分比	有效百分比	累积百分比
有效	水平一	10	17.2	17.2	17.2
	水平二	16	27.6	27.6	44.8
	水平三	28	48.3	48.3	93.1
	水平四	4	6.9	6.9	100.0
	合计	58	100.0	100.0	

由上表可知，12 班 58 名学生中，达到水平四的有 4 人，占总数的 6.9%。28 名学生达到水平三，占总人数的 48.3%。达到水平二的有 16 人，占总人数的 27.6%。达到水平三的有 10 人，占总人数的 17.2%。平均分 2.55 分，说明学生的学业成就处于水平三左右，符合总体水平，标准偏差较小。

5.4.3 两个班级之间思维水平成绩的比较

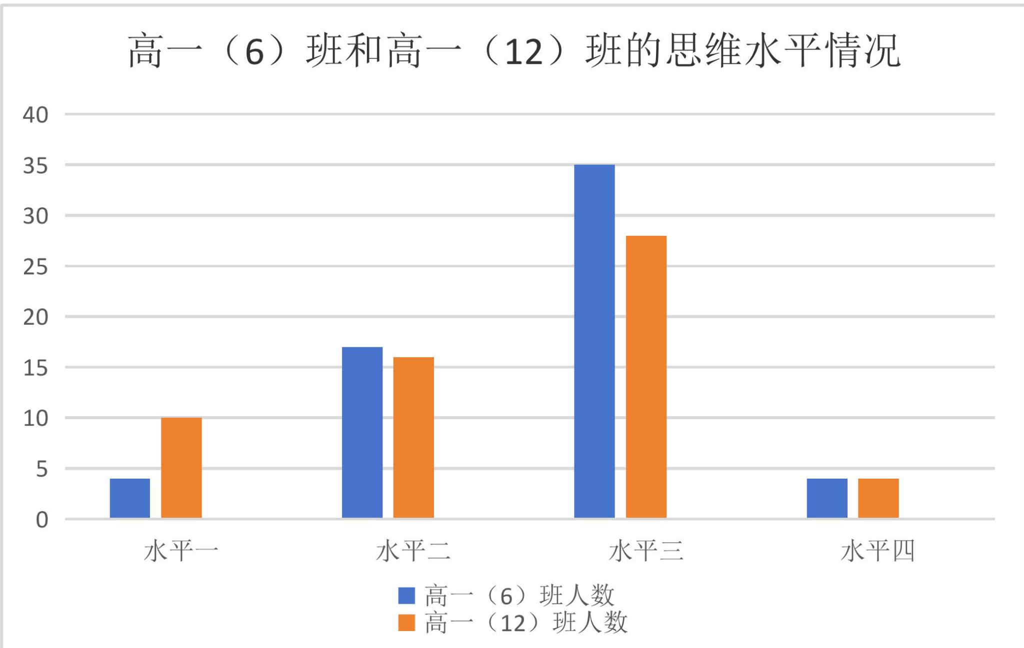


图 25 两个班级之间思维水平成绩的比较

表 13 独立性样本 T 检验的基本描述统计量

	班级	N	均值	标准差	均值的标准误差
水平	高一（6）班	60	2.58	.831	.109
	高一（12）班	58	2.45	.862	.113

其中， N 表示各班学生的总数，均值表示每个班级的平均水平，标准偏差表示数据的离散度，平均值的标准差表示样本平均之间的离散性，显示了抽样误差的大小。经过对比发现，两个班的平均水平差异很小，只有 0.13。6 班的标准偏差较小，说明均值具有较好的代表性，两个班级的均值均偏小，说明均值的离散性较小，有较好的信度。

表 14 独立样本 T 检验的检验结果

		方差方程的 Levene 检验		均值方程的 t 检验						
		F	Sig.	t	df	Sig.(双侧)	均值差值	标准误差值	差分的 95% 置信区间	
									下限	上限
水平	假设方差相等	.038	.835	3.669	116	.043	.182	.172	.102	.713
	假设方差不相等			3.667	114.338	.046	.169	.183	.002	.704

表 14 为独立样本 T 测试的平均值测试结果，其中 0 0 38 是 F 统计量的值；0.835 是一个概率 P 值，所以我们发现 P 值在 0.05 以上，因此能够通过 Levene 方差齐性检验，因此可以认为这两个群体的方差不存在显著差异。对 t 进行了统计观察，水平为 3.669,3.667，双侧检验概率 P 分别为 0.043 和 0.046，在显著水平 0.05 时，如果 t

统计量的概率 P 值小于 0.05，则表示两个班的整体均值有明显的差别。

5.5 数据的总结分析

通过对高一两个班的研究，得到如下几个结论。

第一，大部分学生思维水平处于水平三，整体呈正太分布。由测试统计可知，参与本次考试的高一年级 118 人，其中 14 人达水平一，占全部考生的 11.8%；只有 33 名学生到达了水平二，占全部学生的 28%；63 名学生进入水平三，占参加学生总数的 53.3%；4 级的有 8 个，占总人数的 7%，总体来说，是一个很好的例子。从数据来看，大多数的高一同学的思想能力都在水平三左右，他们能够进行抽象思考和象征式思考，并且能够进行逻辑分析，极少数的尖子生能够在水平四上取得很好的成绩，他们对三角函数的理解也很好。但是还有 39.8%的同学在中等偏下，他们对于三角函数的各个概念的本质都不清楚，仅能够将一些简单的图形区别开来，无法进行论证和推论，因此，在这一时期的同学要加大学习力度。在教学中，老师还是要注重基础概念、定义、推理证明的讲解，让中低级的学生的思维得以训练，对中、高级的学生要有更高的要求，在课堂上进行各种程度的讲解，可以锻炼和提高各个程度的学生的思维。两组样本间差异无显著性。总体来说，两个班处于水平四位置的学生人数大差不差，能具备理解抽象的证明的这部分学生的人数都比较少，能在理论知识间建构出一种网络结构的能力对于高一学生来说依旧较难。6 班水平三的比例比 12 班水平三高出 10%，这意味着经过网络画板的教学后，6 班的推理能力和计算能力要优于 12 班，而且，两个班中水平三的学生占总人数的比例较大，这表明这两个班的大多数学生的思维水平都是中等，具有一定的抽象能力、符号意识和推理计算能力。但是值得注意的是，仍有很多学生还停留在水平一及水平二上，他们对三角函数的概念、定义和性质还不太清楚，因此，在教学过程中要加强学生对概念、定义和性质的认识。从这一点来看，在直观、想象力和抽象能力方面，使用网络画板教学并没有太大的区别；对于水平三的学生（大多数学生）来说，他们可以通过自己的方式来构建图像，理解函数，突破抽象的能力，因此，将网络画板用于教学，有利于提高学生的直观想象力能力。

第二、范希尔理论中的水平三教学指的是“知识、能力、品德”三个层面。网络画板的教学在这三个方面都能够表现出提高：（1）知识（Knowledge）： 使用网络画板进行教学可以更直观地呈现知识，帮助学生更好地理解抽象的概念。通过绘制图表、标记关键点等方式，可以使知识更具体、形象化，有助于学生的理解和记忆；（2）能力

（Skills）： 网络画板可以促进学生的多种能力发展，包括观察、分析、解决问题等。通过自己绘制图像、解释概念，学生可以提高自己的表达能力和批判性思维能力。同时，与其他同学合作使用网络画板也可以培养学生的团队合作能力。;(3)品德(Character)：网络画板的教学可以培养学生的责任心和自律能力。学生需要按照老师的要求、要求完成绘图任务，这有助于培养他们的自我管理能力和积极性。同时，通过与其他同学分享和讨论自己的作品，也可以促进学生之间的合作和互助，培养良好的品德和社交技能。

第三、通过课堂观察分析，在课堂上，对实验班和常规班的学习气氛进行了比较，结果表明，实验班有很多的学生都愿意举手和积极地解答问题，班内的合作程度很高，学生们利用网络画板进行了协作，因此，整个课堂都变得非常的活跃。当老师和学生一起利用网络画板进行探究时，他们的学习热情被调动起来，他们在课堂上的精力也变得更强了。总体来说，无论是在教学气氛上，还是在学习积极性上，都要好上一些。

5.6 后续对学生的访谈内容

访谈研究是一种以口头语言为主的研究方法，它要求收集客观的事实资料，精确地解释样本的代表性，特别是对于复杂的问题，要求不同的人理解不同的资料。特别是对处于阶段的水平一学生，成绩依旧提不上来，分析是否能有效的对策应对。

5.6.1 访谈提纲

对学生的访谈提纲放在了附录 B。

1. 你对三角函数的内容的兴趣度怎么样？
2. 你对老师教授三角函数这章节内容的教授进度如何看？
3. 你觉得老师课上选取的例题的难度是偏低、中等还是偏高？
4. 你觉得老师的教学风格大致是怎样的，符合你的预期吗？
5. 你觉得教师课外布置的习题和任务符不符合你的训练要求？

5.6.2 访谈情况

这次访问，为了更好地了解学生对课堂内容的理解，我们选择了 6 位学生作为访谈对象，将 6 位学生分成“好”——水平四、“中等”——水平三和“差”——水平一和水平二这三个等级。其中水平一和水平二 2 人， 水平三 2 人， 水平四 2 人。

1.你对三角函数的内容的兴趣度怎么样？

水平四的同学觉得三角函数的内容很容易，并且他们能轻松地解出问题，觉得学三角形更有意思；许多图形能与现实生活中的事物产生关联，并能在现实生活中得到应用。

水平三的同学更倾向于容易的三角函数的例题，对测验或家庭作业中综合性较强的问题较为厌恶，期望能够学到一些较为容易的知识。

水平一和水平二的学生不太喜欢目前的三角函数的内容，他们觉得三角形的知识很难懂，教师在讲解一些比较困难的知识时，他们无法听懂教师所说的；想要学些比较容易的东西。

2.你对老师教授三角函数这章节内容的教授进度如何看？

水平四的同学觉得教师的授课进展缓慢，这是由于 A 级的同学有更强烈的学习兴趣和动力，在上课之前会主动地把教科书上的知识提前一步，所以他们的思维水平也更高。因此，他们会觉得老师进步很慢。

水平三的同学觉得教师的教学进展不大，是由于他们的学习兴趣、动机和努力程度不如水平四的同学，因此他们觉得进展还可以。

水平一和水平二的同学觉得教师的授课速度过快，这是由于 C 级的同学基本上对学习不感兴趣，他们的思想层次还没有完全发展起来，无法理解教师课堂上讲的东西；这也是他为什么会感觉到，老师讲课的速度太快的原因。

3.你觉得老师课上选取的例题的难度是偏低、中等还是偏高？

水平四的同学觉得题型容易，可以适当提高难度，这样就能训练思维能力。

水平三的同学觉得这个难度刚刚好，说难也不难，说难也不容易，说难了反而会让人摸不着头脑。

水平一和水平二的同学觉得这门课很难，有时连老师讲课的内容都搞不明白。

4.你觉得老师的教学风格大致是怎样的，符合你的预期吗？

水平四的同学觉得这种教学方法很适合他们，教学严谨细致，没有闲聊，整个课程很充实，很有收获。

水平三的同学觉得教师的教学方法更适合他们，他们认为每一位教师的教学方法都大同小异，差别不大。

水平一和水平二的学生对教师的授课方式有不同的看法。他们觉得教师的课程过于单调，缺乏能引起他们注意的有趣事物，而且在课堂上很容易被分散注意力。

5.你觉得教师课外布置的习题和任务符不符合你的训练要求？

水平四的同学觉得作业太容易了，觉得可以出一些难度较大的作业，可以让自己的思想得到更好地训练。

水平三的学生觉得难度不大，难度不大，就得花点时间去想了。

水平一和水平二同学觉得这次的家庭作业很难，他们想让教师给他们出一些比较容易的问题。

5.6.3 访谈记录

主要对水平一和水平二的学生进行了访谈分析，从概念、辨析、分析、综合以及学习积极性等角度进行考察，为后进生的教案设计提供新的思路。

（1）考察学生对定义是否准确：发现水平一和水平二的学生对三角函数的定义不够准确。

老师：你能谈谈对三角函数的想法吗？

生：基本按照教师在课堂上说的那些公式，把它们融入做题中去，不知道定义的具体含义是什么。

师：你们中学里学过三角函数有关的铺垫吗？

生：我们中学的时候，我们学习了基础的三角函数。

老师：那么，您是否还记得这个公式？

生：记住这个公式，正弦是对边比斜边，余弦是邻边比斜边。

师：你能看懂三角函数的定义吗？

生：我是直接把方程式背下来，做题时就用方程式，不去想它的意思。

师：能不能判定在不同的象限，不同的轴上，三角函数的符号是什么？

生：人们常把正负号搞混。

因此可以看出来：对于三角函数的定义，水平一和水平二的学生不能很好地掌握，对概念也是相当的含糊，只是单纯地死记硬背一些公式，并没有深入地了解这些概念。在学习中，学生应注重自身的风格，需要进一步培养学生的分析和空间的思考能力。

（2）考察水平一和水平二学生的概念辨析能力：发现学生（第二位学生）对三角形的正余弦转化不是很清楚，转化速度较慢。

师：你可以分清楚a与$-a$、$\pi-a$之间的关系吗？

生：看得出来。

老师：你知道怎样运用“奇变偶不变，符号见象限”这一说法么？

学生：能用，但常常忘了转换。

师：那你理解正余弦之间相差奇数倍的$\frac{\pi}{2}$，为什么要变换吗？

生：这个应该不能理解，平时会用就行。

学生能较好地解答一些基础的几何问题，但是无法分辨出两种三角函数的关系。

(3) 考察水平一和水平二的学习积极性：学生（第一位学生）不能利用图形的公式、性质分析图形。

师：你对这个话题有什么看法？

生：见到图形解析题就害怕，不会写关于图形的问题。

师：你会不会三角函数公式里的一些基本量？

生：懂，但是要我把它画出来就很难了。

师：在课堂上，你有没有听到老师对图像的分析。

生：在课堂上听得明白，自己在家也不会写相关的例题，有时不明白就神游天外。

因此可以看出：从一开始，学生就对几何图形产生了抵触情绪，认为自己不会做图形题，对自己没有信心。其次，该学生认为课堂上听课得到的效果不够，不太理解的内容就没钻下心去听，在家也不会写相关例题。他没有找到解决的方法，也没有足够的动力去学习。

(4) 考察水平一和水平二学生的推理能力：学生（第二位学生）能灵活地应用公式推理，没找到不同知识之间的共性。

老师：你对这个话题有什么看法？

学生：当我看见题目中的最大与最小时，我的第一个想法就是将其转化为一个普通的形式。用振幅求极值，但后来发现，这个方程有一个平方，简化不出来。

师：那么接下来的问题你打算怎么办？

生：能简化的都被简化成了余弦方程，剩下的我就不知道了。

老师：你们还记得我们在函数中学习的这些性质吗？

学生：记得，有单调性、周期性和极值；确定范围、范围、对称和更多。

老师：您能给二次函数求一个最佳的数值么？

学生：能，二次函数是在中学里学习的。

老师：你没有注意到，您最后得到的简化结果，就是将它转化为中学里学习过的二次函数的最值。

学生：那时候没想到，经过教师的提醒，我想到了。

由此可见，水平一和水平二学生是可以利用定义、公式和性质来进行推断的。但是却无法将知识连接在一起，各个知识点之间没有联系。

5.6.4 访谈后对学生分级再课堂提问的改进意见

其中本章节中的数据可以得出，学生水平一二三的占比都比较大，所以分层教学的方法以满足不同学生的学习需求，那教师具体的实施方案可以因学生而定，以下后续教案设计的三个可行性方案：

1.二次函数图像的探索

水平一和水平二的学生：对于基础层学生，老师可以利用网络画板展示简单的二次函数图像，并引导他们观察图像的变化规律[25]。通过绘制不同参数下的二次函数图像，帮助他们理解二次函数的基本形状和特征。

水平三的学生：针对普通级学生，教师可透过网络画板画出较为复杂的二次函数影像，如平移、缩放、翻转等。在此基础上，提出了一种新的教学方法，即在教学中利用计算机辅助教学，以提高教学质量。

水平四的学生：针对扩展层次的学生，教师可通过网络画板，引导学生学习二次函数的更高层次的探究，例如二次函数的对称性，极值的性质等。在此基础上，提出了一种新颖的二次函数图形生成方法。

2.对三角函数进行图像分析

水平一和水平二的学员：针对初级班的同学，教师可透过网络画板画出正、余弦函数之图形，让学员了解周期与幅度之概念。让学生通过看图和解答一些简单的问题，加强对三角函数图象的理解。

水平三的同学：针对基础层次的同学，教师可利用网络画板画出较为复杂的三角函数图形，并针对图形的周期，相位差，对称性等特性进行分析。通过对比分析，加深对三角函数本质的认识。

水平四学生：针对扩展层次的同学，教师可运用网络画板，探索三角函数图象的转换与运用，如平移、缩放、翻转等运算。在此基础上，提出了一种新的、具有特定形状的三角函数图象的教学方法。

3.关于解析几何的投射问题

水平一和水平二的学生：针对初级阶段的学员，教师可运用网络画板，将简易解析

几何图呈现给学员，让其了解投射的观念。在此基础上，提出了一种新的方法，即用投影的方法，使学生对投影有一个直观的认识。

水平三的学生：针对普通级学员，教师可利用网络画板，将较难的解析几何图呈现给学员，并指导学生在各面间的投影关系。通过对建筑影子的分析，使学生更好地了解投影在工程中的运用。

水平四的学生：针对扩展层次的学生，教师可指导他们深入探究解析几何中的投影问题，例如多面体的投影，投影变换的性质等。通过让学生自己设计和求解一个复杂的投影问题，并对其进行数学论证，从而提高其逻辑思维能力和论证能力。

在此基础上，教师可依据范希尔原理，运用网络画板，对学生进行有效的分层教学；改善学生的学习成效及参与程度。

第六章 结论与反思

从研究结果可以看出，大部分学生的直观想象素养的水平处于水平三阶段。《课标(2017 版)》明确指出，要提高学生的数学抽象能力，提高学生的数学分析能力，提高学生的思维能力，提高学生的数学能力。从学生的学习表现和《课标(2017 版)》的要求来看，培养学生的直观想象素养是非常必要的。在此基础上，本文从学生、教师和教材三个层面提出了“怎样培养学生直观想象素养”的对策。

6.1 学生方面

在教学过程中，学生的思维层次，独立思考的能力，都会影响到学生直观想象力的素养的水平。下面就学生方面提出几点个人看法。

(1)提高自身思维能力，设计个性化学习路径，自主探索

兴趣是最伟大的教师，它能够激发出对学习的兴趣，从而让学生的思考能力得到提升，如果一个人对某个事物产生兴趣的话，他就会全身心投入到自己的研究之中，所以采用学生互动的网络画板教学方式，学生不会感到无聊和乏味。其次，不能盲目地去记忆，要懂得性地去学，回归到原来的概念中去，理解它的产生和发展的过程，明白它的性质，而不是依靠机械地去记忆，使它成为一个系统的东西。第三，提高直观想象素养的时候，也要加强自身的空间想象力，推理能力，去设计自己的个性化学习路径，自主探索图像的形成过程，使自己的思维层次得到提升。

(2)学会正确的归因方式，自我即时反馈和调节

由于个体差异，个体表现出了差异化的现状，有些个体将成绩不好归结于自身的因素，例如：努力程度、个体能力等。也有人认为，成绩差是由外界因素决定的，像是运气，又或者是困难。优秀的同学并非生来就很聪明，大多数同学的智商都相差不大，学业表现的优劣主要取决于他们自己的原因，而他们的归因又会对他们的努力方向产生一定的影响。打个比方说，一个同学在一场测验中，数学成绩不好，他可以将其归咎于自己不够勤奋，但只要自己在后面多下点功夫，坚信自己的实力肯定能够学得很好，碰到问题也能够持之以恒，假如这种同学将其归咎于自己的实力不够，那么以后无论花费多少的精力，都无法取得进步，一碰到困难就会选择放弃。因此，要让同学们养成良好的

归因习惯，要将学习成绩的原因归结于自己的努力，而不是自己的能力，通过范希尔理论知道了自己目前的水平，也需要即时反馈到下一步学习中，自我调节。

(3)激发自身学习动机，充分挖掘自身潜力

学习动力是影响学习效果的重要因素之一。内部动力指的是学习者自我发展的需要，外部动力则是来自于家长和教师的鼓励和赞扬。作为学生，要增强自己的学习动力，要适时地给自己制造一些困难，强化内部动力，并要有外部的激励，如：鼓励和赞扬，充分挖掘自身的潜力。

总之，将范希尔理论与网络画板相融合，能够有效提升学生个体的学习水平，进而提升其直观想象素养。通过设计个性化的学习路径，自主探索，及时反馈和调节，使学生激发自身学习动机，充分挖掘自身潜力，增强学习效率和直观想象素养。

6.2 教师层面

学习是一个积极主动的，富有个性的学习过程。在教学中，老师要将教学时间交给学生，让他们自己去体验，让他们有充分的时间去观察和推理。在教育中，老师要立足于学生现有的直观想象素养，将所学的内容以一种生动的方式进行传递，让他们亲身经历一个认识的过程，让他们自己去思考、去探究、去协作，从而促进他们的综合发展。

（1）理论与实践相结合

范希尔理论强调了理论与实践相结合对于学习的重要性，而网络画板则可以提供一个具体而直观的展示平台。基于此，在今后的实践教学中，应该把网络画板运用到含有抽象概念内容的教学中；并且在教学过程中，如果有足够的时间，可以对高中数学的多个部分进行辅助教学，比如在必修二的立体几何部分的探究中，可以利用网络画板的 3D 绘图功能，让学生对立体几何有一个全方位的了解和认识，在必修三中的解析几何中，可以利用网络画板的滑动条来动态绘制圆锥曲线或双曲线，让学生感受到圆锥曲线的生成过程。从而提高学生的直观想象素养。同时，作者也希望在今后的教学过程中，能够加强老师们的信息技术培训，提高他们的信息技术运用能力，从而更好地利用网络画板进行教学，更好地利用信息技术提高学生的学习热情。提高教学效率。

在数学教学中，教师也可以通过设计一些实践性的任务或者案例来展示理论与实践的联系，教师可以有以下的实践方案：

1.几何中的平行线理论： 可以通过网络画板展示两条平行线与一条横截线所形成

的角对应角相等的现象，并让学生通过操作画板，观察角度的变化，从而理解平行线理论的实际应用[26]。

2.函数与实际问题的联系：通过网络画板展示一些实际问题的数据，并设计一条函数曲线来拟合这些数据，让学生通过观察拟合曲线与实际数据的接近程度来理解函数在实际问题中的应用[27]。

3.概率与实验：可以设计一些投掷骰子或抽取扑克牌的实验，并利用网络画板记录实验结果，让学生通过实验结果来理解概率理论，并与理论概率进行比较[28]。

4.数列与数学模型：可以通过网络画板展示一些实际生活中的数列问题，如等差数列描述了水塘里水草的增长规律，让学生通过数学模型来解决实际问题。

5.统计与调查分析：可以设计一些调查问卷，并利用网络画板展示数据的收集和整理过程，让学生通过实际数据来进行统计分析，从而理解统计学在实际问题中的应用。

这样，在教学中，教师可以在范希尔原理的引导下，运用网络画板将理论和现实相结合，从而加深对数学知识在实践中的运用的认识。

（2）重视学生的个性差异

在教育过程中，通过对学生进行分级教学，能更好地适应学生的学习需要。中学数学教师在进行分级教育时，可以采用如下几种方法：

1.诊断评价：在教学前对学员进行诊断式评价，以掌握学员的基本认知程度及学习方式，从而为分级教育奠定理论基础。

2.分级制：以学员的诊断评定为依据，将学员分为基础级、普通级和拓展级，各组之间存在着一定的差别。

3.差异化教学：为每个层次的学生设计不同的教学内容和任务，根据学生的实际情况调整教学方法和资源，以满足他们的学习需求。

4.个性化辅导：给予基础层学生更多的个性化辅导和支持，例如额外的练习、辅导课程或小组讨论，帮助他们建立扎实的基础。

5.挑战性任务：为拓展层学生提供更具挑战性的学习任务和项目，鼓励他们深入探究和拓展数学知识，培养其创新思维和问题解决能力。

6.定期评估和调整：定期对学生的学习成绩和表现进行评估，根据评估结果及时调整分层教学的内容和策略，确保教学效果的最大化。

（3）创设情景，提高学生的直观想象素养

范希尔的理论注重的是让学生积极地参加和进行实际的探索。在利用网络画板的帮

助下，中学的数学教师可以采用下列方法，对学生进行多个方面的思考，并使他们的思维技能得到发展：

导入问题情景：教师利用网络画板将与同学们的日常生活密切相关的数学问题呈现给教师。同学们必须为运动场的布置尽量节省资源。

为学员们提供多元化的解答方式：在教室里，教师能够指导他们用各种方式来解决问题。以网络画板为平台，呈现出圆形、长方形、多边形等多种造型的运动场，并与同学们交流各自的优势与不足。

分组交流：教师将同学分组，利用网络画板进行游戏场地布置的研讨与设计。在此过程中，同学们可以提交自己的作品，对作品进行讨论与完善，以此来增强同学们的协作意识与批判思考能力。

实践性的学习任务：教师可以让同学们利用自己的数学知识，通过网络画板对校园内已有的运动场进行调查与资料分析。比如，对校园内现存的运动场的大小与周边进行测算，并估计出各种布置所需要的用料与费用。

提倡探究和创造：教师要鼓励同学们大胆地进行各种创意的构思，并积极地为运动场布置提供创意。利用网络画板，学员得以展现自己的想法，并在课堂上与其他同学进行互动与沟通，进而启发他们的创新精神与独立思维。

举例来说，老师可以在网络画板上展示学校现有操场的平面图和尺寸，然后要求学生在小组中设计一个新的操场布局[29]，要求最大限度地利用有限的空间和材料，同时考虑到学生活动的需求和安全性。学生可以通过绘制不同形状的操场设计，并计算各种设计的面积、周长和材料成本，来比较不同方案的优劣，从而培养他们的多角度思考和解决问题的能力。

（4）利用多种表征方式来转化直观想象的图形

范希尔理论注重通过学生的实践探究来建构知识，而网络画板则提供了一个多样化的表征方式，结合这两者，高中数学老师可以采取以下方式帮助学生深刻理解概念的本质，并学会多种表征方式。

教师要学会利用可视化呈现理念：教师可以通过使用网络画板来绘制图形、示意图等，将一些数学观念以一种可视的形式表现出来，从而使他们对一些抽象的数学观念有更好地了解[30]。比如，教学三角函数的时候，教师可用网络画板来画出各种角度的直角三角形，并标出各个边长及角；透过图表认识正弦，余弦，正切等概念。

教师要学会举例说明概念： 老师可以通过网络画板呈现实际生活中的例子，将抽

象的数学概念与学生熟悉的情境联系起来，帮助他们深入理解概念的本质。例如，在教授函数的概念时，老师可以以学生购买商品的价格和数量之间的关系为例，通过绘制价格——数量的函数图像，让学生理解函数的定义、图像特征以及函数的应用[31]。

6.3 教材层面

范希尔理论和网络画板可以为数学教材的设计和教学提供许多有益的建议和方法。以下是一些结合范希尔理论和网络画板的数学教材建议：

1.基于学生发展水平设计内容：范希尔理论强调了教学内容应该基于学生的发展水平，而不是固定的年级或年龄段。因此，教师可以根据学生的能力和需求，设计适合他们水平的数学内容。网络画板可以提供灵活的教学方式，以满足不同学生的学习需求。

2. 范希儿主张教学效果依赖于学员的动手能力。这就要求教科书中要有更多的动手的机会，使他们在动手中掌握和运用这些观念。利用网络画板，可以进行多种具有高度互动性的数学教学活动，使学生能够主动地进行学习和运用。

3.注重社会文化语境与协作教学：范希儿的教学理念认为，在教学内容的选择上，必须充分重视学生所处的社会、文化情境，以及所处的情境。另外，“协作学习”也是范希尔教学理念的一个重要内容，即通过多种形式的协作教学，使学生能够在小组内进行沟通与协作，并通过协作来解决问题。利用网络画板进行协同教学，使同学们能在一个虚拟的情境下进行协同工作。

4. 使用可视化的手段与动态演示：通过使用 Web 绘图板，能够为用户提供大量的可视化手段以及对其进行动态演示，使其能够更加直接地对所要学习的内容进行了解与掌握。比如，一个数学原理的论证程序可以通过动画来演示，也可以通过画图的方式来解释一个几何问题。

5.个体化教学与回馈：在范希儿教学理念指导下，在教学内容的制定上，要兼顾个体差异与教学进程。利用网络画板实现了个性化的学习，比如基于学生的成绩与反馈，调节课程的内容与难度，并给予学员有针对性地反馈与引导。综上所述，结合范希尔理论和网络画板的数学教材设计应该注重学生的发展水平、实践机会、社会文化背景、合作学习、视觉化工具和个性化学习等方面，以提高教学效果和学生学习动机。

6.4 研究不足

这是一篇关于高一学生直观想象素养素质的调查，对高一学生的思维水平状况有一个大概的认识。通过结合范希尔理论和网络画板软件的探究，提出了关于教师、学生、编写教材方面的一些建议，但因为存在着各方面的限制，本研究尚遗存着一些未解决的问题。

（1）本研究以高一学生为研究对象，以海口市某中学为研究对象，仅有 118 人参加，样本量不大，再加上学生的学习态度对他们的表现有一定的影响，这一点还有待于进一步的研究。可以选择不同的学校，不同的年级，然后对比研究采用大样本量的方法。

（2）研究的缺陷也表现在怎样有助于学生从思维层次上进行过渡，怎样从上一个层次到下一个层次，但是在思想层面上没有转换的计划。

（3）在其他数学领域也有直观想象素养的划分，比如空间几何是更适合进行教学的内容，但是高一学生目前没接触到。还有三角函数相关的直观想象素养也不是该章节最难理解的内容，这几个方面的考虑还不够全面，有待进一步的研究。

参考文献

[1] 陈玉莲,令狐泓,严艳华.基于范希尔几何理论的中学数学教学研究——以“正弦定理”教学为例[J].数学教学通讯,2022,(33):10-12.

[2] 裴阳.直观想象素养测评体系的构建及应用[J].当代教育与文化,2024,16 (01):99-107.

[3] 蒋余希,李明树.基于网络画板的有效教学课例分析——以《探究几何图形中分点问题》为例[J].中学数学杂志,2023,(10):36-40.

[4] 俞小英.在丰富的具身体验中发展学生的直观想象素养——以“直线与平面平行”的教学为例[J].数学教学通讯,2024,(06):18-20.

[5] 周永.直观想象:架设数学教学从感性到理性的桥梁[J].读写算,2024,(03):92-94.

[6] 黄美峰.落实核心素养培育，促进学生综合发展[J].江西教育,2023,(43):62-63.

[7] 徐远梅.基于核心素养培养的高中数学教学研究[J].数学学习与研究，2023，(22)：83-85.

[8] 赵海清,张传军,侯先融,王俊.网络画板与数学课程教学深度融合探析[J].贵州师范学院学报, 2023, 39 (06): 79-84.

[9] 吴冠男.智用网络画板助推实验课堂[J].中学教研(数学),2023,(11):8-11.

[10] 布合丽切木·阿布都克热木. 网络画板在少数民族学生学习参数几何意义的教学实验[D].华东师范大学, 2023.

[11] 肖阳芳, 徐金润, 邵贵明, 熊建军. GeoGebra 助力高中生直观想象素养的提升[J]. 中学数学月刊, 2024, (02): 62-63+73.

[12] 刘梦哲. 信息技术支持下的 HPM 教学案例研究[D]. 华东师范大学, 2023.

[13] 尹洁,侯小华.网络画板在高中函数教学中的应用[J].中国教育技术装备，2020，（13）：36-37.

[14] 李娅妮. 范希尔理论下的初二学生几何思维水平现状调查及教学研究[D].延安大学,2023.

[15] 杨静.聚焦网络画板培养几何直观——信息技术与小学数学课程融合的教学实践探究[J].新课程导学,2023,(36):27-30.

[16] 李鸿,王宗德.借助网络画板知识自然生成——以“穿根法”教学为例[J].高中数学教与学,2022,(20):42-44.

[17] 邢孟雨, 何声清. 新课改二十年来范希尔理论在几何教育领域的应用研究述评[J].中学数学杂志, 2023, (04): 7-9.

[18] 罗佳. 基于范希尔理论与APOS理论的初中几何概念教学研究[D].佛山科学技术学院, 2022.

[19] 蔡秋峰.基于认知学习理论的高中数学教学模式探究——以“三角函数”为例[J].数学学习与研究,2024,(05):35-37.

[20] 赵怡姣.基于认知负荷理论的高中生物教学现状调查与策略研究[J].上海教育,2023,(18):66-67.

[21] 李丽,尹丽子,于冰.认知负荷理论下初中数学教材中勾股定理内容的比较研究——以人教版、北师大版和青岛版为例[J].中学数学研究(华南师范大学版),2024,(04):22-24.

[22] 郭翠菊.基于“经验之塔”的小学作文教学路径新探[J].语文教学通讯,2018,(36):54-56.

[23] 程琼, 陈晴. 从“经验之塔”看虚拟仿真技术与教育教学理论的结合及应用分析[J]. 科教导刊(上旬刊), 2019, (01): 113-114.

[24] 冯善司. 基于范希尔理论的高中立体几何初步的课程研究[D].云南师范大学, 2022.

[25] 刁慧慧. 范希尔理论下勾股定理教学实践与研究[D]. 青岛大学, 2021.

[26] 李赵容,杨慧,许哲.基于范希尔理论的几何教学策略——以“多边形内角和”教学为例[J].初中数学教与学,2020,(15):1-3+31.

[27] 赵立纯,刘芳奇,徐海茹等.基于范希尔理论的两版教材“图形与几何”的分析研究[J].数学教学研究,2021,40(02):22-25+39.

[28] 龚辉.尊重学生认知规律突出几何思维梯度——范希尔几何思维层次理论对“丰富的图形世界”的教学启示[J].中学数学月刊,2020,(02):9-10.

[29] 王俊, 何胜男, 王东阳. 基于范希尔理论的教学设计——以双曲线的标准方程为例[A]. 广东省教师继续教育学会, 广东省教师继续教育学会教师发展论坛学术研讨会论文集（十）[C].渤海大学, 2023: 1056-1062.

[30] 林毅.基于范希尔理论应用Hawgent皓骏软件的数学创课设计——以“抛物线及其

标准方程”为例[J].数学教学通讯,2020,(03):12-14.

[31] 樊继珍.信息技术与教育教学双向融合，共促师生创新发展——以“网络画板”社团的创建及运营为例[J].中学教学参考,2020,(30):85-86.

[32] 赵阳,李赵容,张传军,等.基于网络画板的数学概念教学研究[J].高中数学教与学,2022,(06):51-53+57.

附　　录

附录 A 教师访谈的访谈提纲和访谈记录

（1）了解对直观想象素养的认识是否全面；

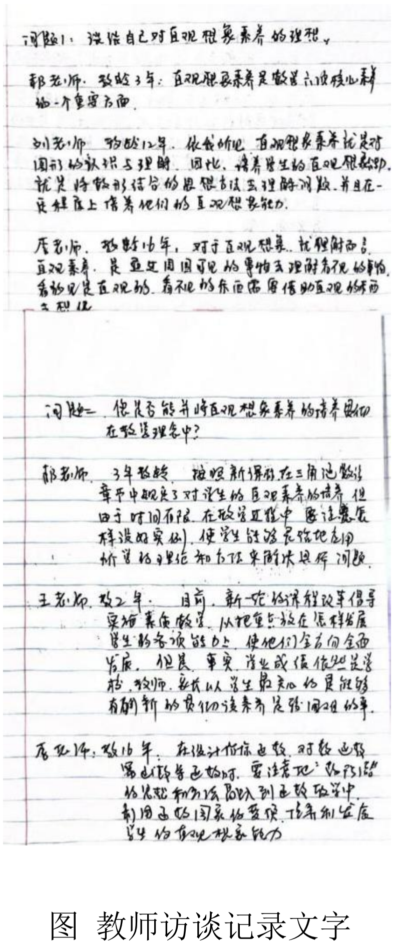
（2）是否能并将直观想象素养的培养贯彻在教学理念

（3）了解教师对三角函数章节中的直观想象素养的认识是怎样的；

（4）了解是否在课堂上正确使用网络画板软件，并且收到了正向反馈；

（5）是否很好得利用了网络画板去提高了学生的直观想象素养；

（6）是否在符合课程标准、课程大纲得条件下，做到了自己的融合与创新。


问题1：谈谈自己对直观想象素养的理解。

郭老师，教龄3年：直观想象素养是数学六项核心素养的一个重要方面。

刘老师 教龄12年，依我所见，直观想象素养就是对图形的认识与理解。因此，培养学生的直观想象力，就是将数形结合的思想方法去理解问题，并且在一定程度上培养他们的直观想象能力。

唐老师，教龄16年，对于直观想象，就理解而言，直观素养，是通过用图可见的事物去理解看不见的事物，看的见是直观的，看不见的东西需要借助直观的方面去想象

问题二：您是否能并将直观想象素养的培养贯彻在教学理念中？

郭老师，3年教龄，按照新课标在三角函数章节中体现了对学生的直观素养的培养，但由于时间有限，在教学过程中（要注意怎样设好实际），使学生能够灵活地运用所学的理论知识方法来解决实际问题。

王老师，教2年，目前，新一轮的课程改革倡导实施素质教育，从把重点放在怎样发展学生的各项能力上，使他们全方向全面发展。但是事实，学生成绩依然是学校、教师、家长以学生最关心的，是能够有创新的贯彻该素养是挺困难的事。

唐老师：教16年，在设计指数函数，对数函数，幂函数等函数时，要注意把"数形结合"的思想和方法融入到函数教学中，利用函数的图象的变换，培养和发展学生的直观想象能力

图 教师访谈记录文字

附录B 对学生的访谈提纲

访谈内容：

1. 你对三角函数的内容的兴趣度怎么样？

2. 你对老师教授三角函数这章节内容的教授进度如何看？

3. 你觉得老师课上选取的例题的难度是偏低、中等还是偏高？

4. 你觉得老师的教学风格大致是怎样的，符合你的预期吗？

5. 你觉得教师课外布置的习题和任务符不符合你的训练要求？

附录C 学生的测试卷

姓名： 班级： 性别：

第1题：下列命题正确的是（）

B. 第一象限角一定不是负角　　B.小于90°的角一定是锐角

C.钝角一定是第二象限角　　D.第一象限角一定是锐角

第2题：下列命题正确的是______________（填序号）.

①$-30°$是第一象限角；

②$750°$是第四象限角；

③终边相同的角一定相等；

④$-950°12'$是第二象限的角.

第3题：已知α为第二象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角

第4题：作出$-\frac{5\pi}{8}$的正弦线、余弦线和正切线.

第 5 题：在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边的范围，并由此写出角 α 的集合.

(1) $\sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$.

第 4 题：作出$-\frac{5\pi}{8}$的正弦线、余弦线和正切线.

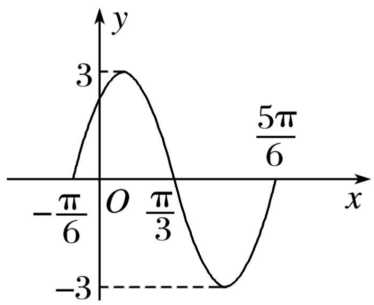
第 5 题：在单位圆中画出适合下列条件的角δ的终边的范围，并由此写出角α的集合.

(1) $\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$.

第 6 题：利用正弦曲线，求满足$\frac{1}{2} < sin\, x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$的$x$的集合

第 9 题：如图是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0，\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图像，求$A$，$\omega$，$\varphi$的值，并确定其函数解析式.

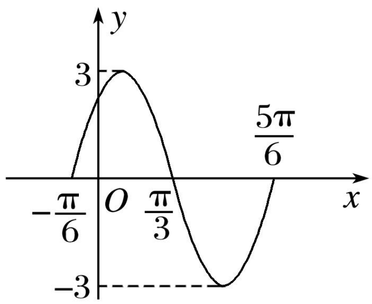


第 7 题：已知$f x)$是以 π 为周期的偶函数，且$x \in \left[0，\frac{\pi}{2}\right]$时，f(x)=1 - sin x ，当$x \in \left[\frac{5\pi}{2}，3\pi\right]$时，求$f(x)$的解析式.

第 8 题：求函数$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$的单调递增区间

第 9 题：如图是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像，求$A$，$\omega$，$\varphi$的值，并确定其函数解析

式.



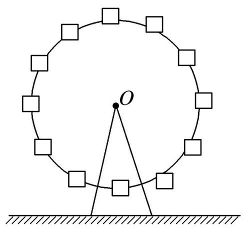
第 10 题：已知曲线$y=A\sin(\omega x+\varphi)$上最高点为（2，$\sqrt{2}$），该最高点与相邻的最低点间的曲线与$x$轴交于点（6,0）.

（1）求函数的解析式；

（2）求函数在$x\in[-6,0]$上的值域.

第 11 题：求函数$f(x)=2\sin^2x+2\sin x-\frac{1}{2}$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$的值域.

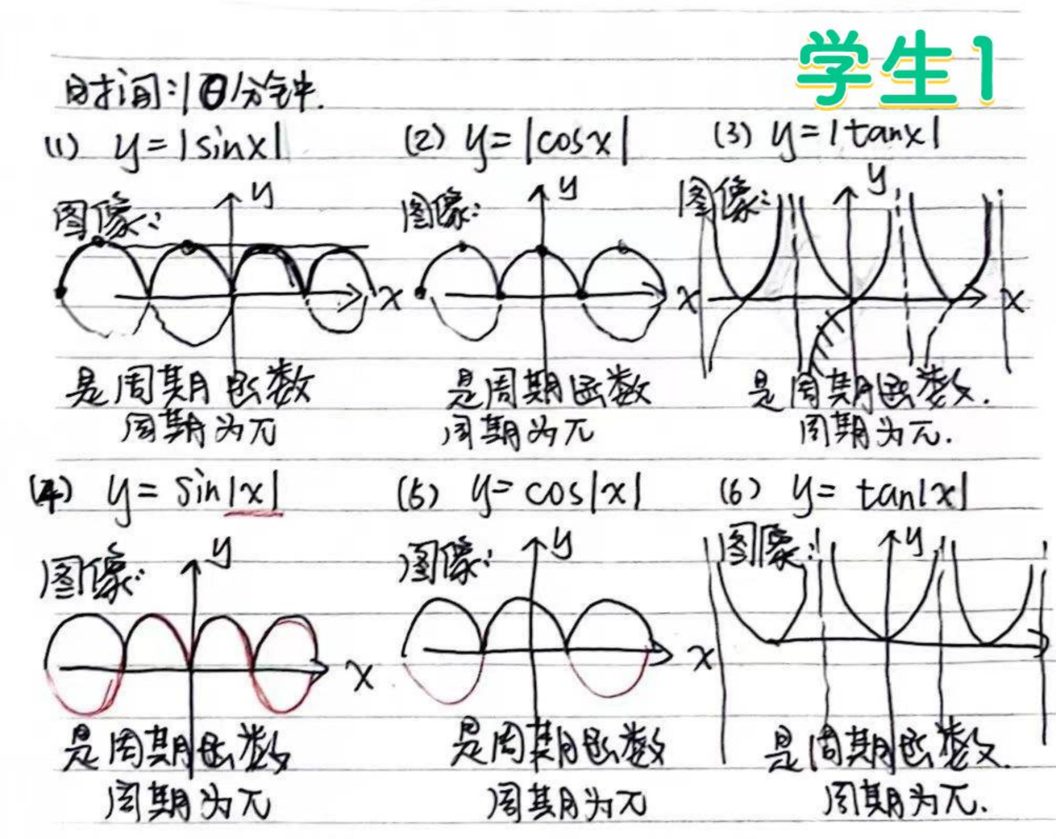
第 12 题：如图所示，游乐场中的摩天轮匀速转动，每转一圈需要 12 分钟，其中心O距离地面 40.5 米，半径为 40 米. 如果你从最低处登上摩天轮，那么你与地面的距离将随时间的变化而变化，以你登上摩天轮的时刻开始计时，请解答下列问题：



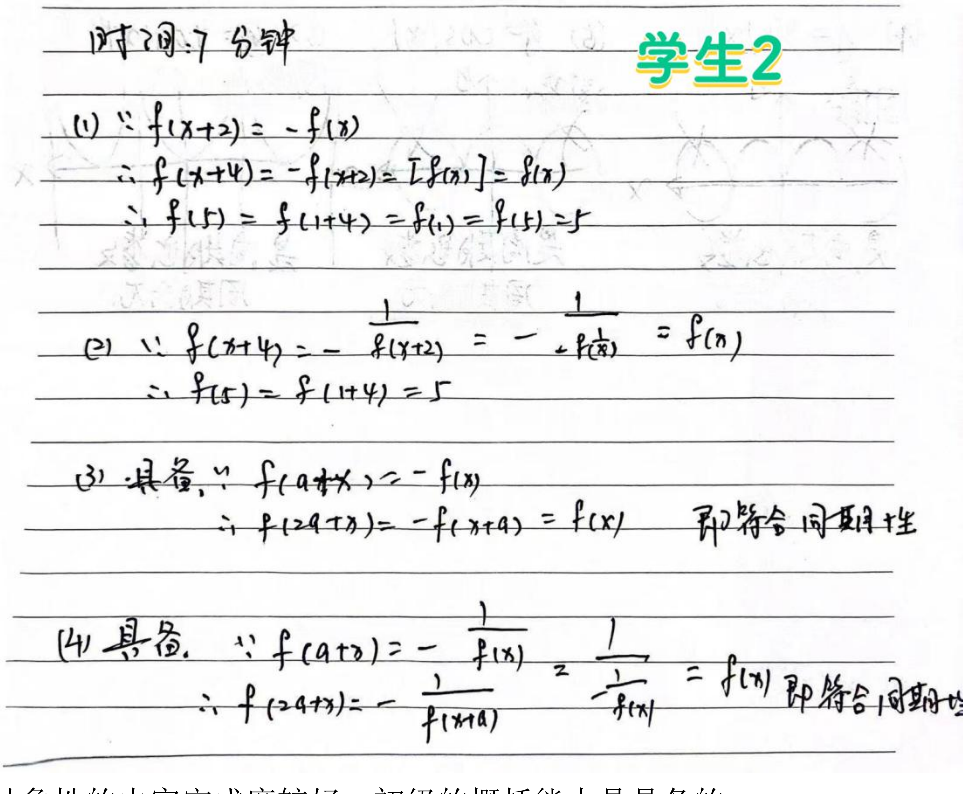
（1）求出你与地面的距离y（米）与时间t（分钟）的函数关系式；

（2）当你第 4 次距离地面 60.5 米时，用了多长时间？

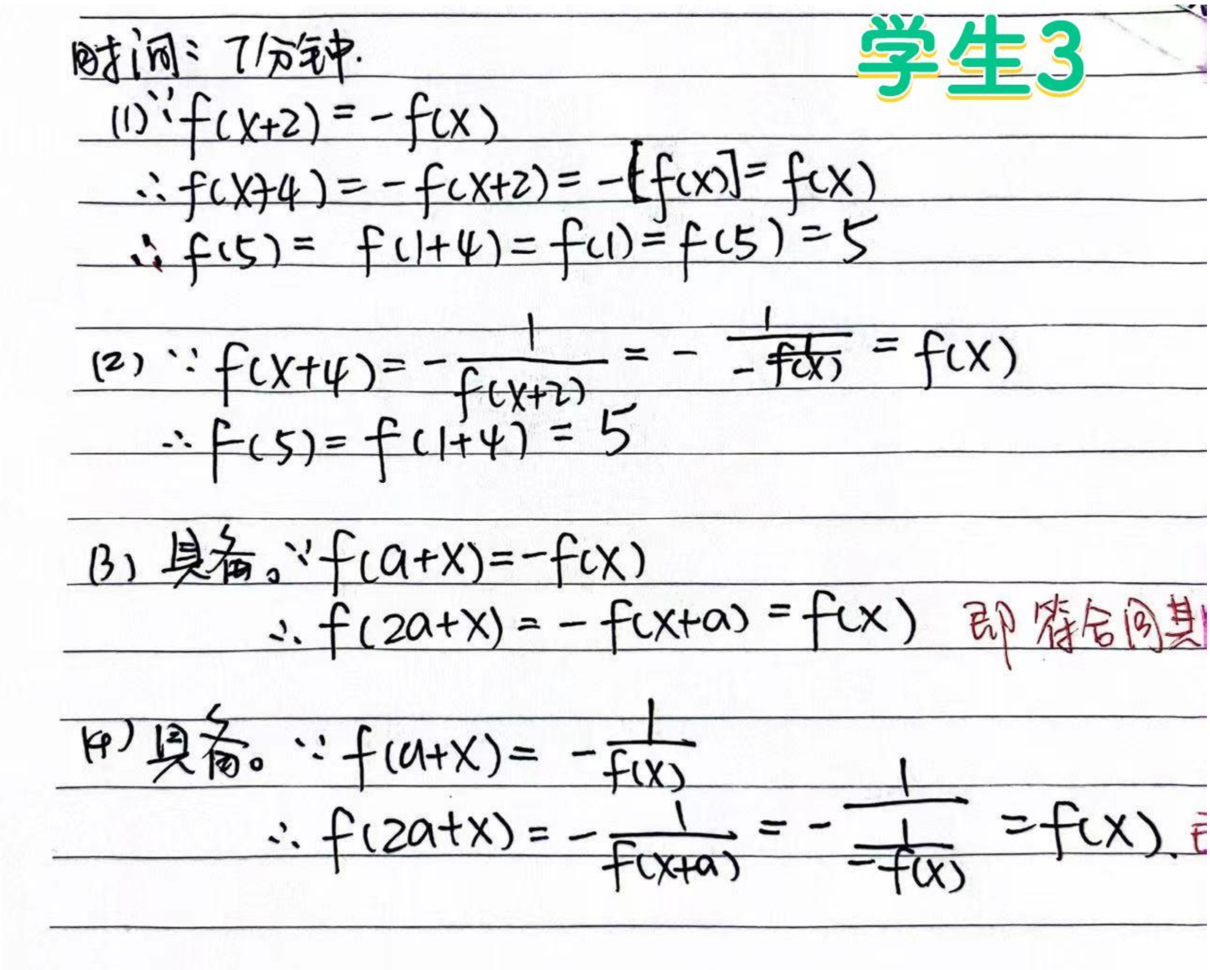
附录 D 常规班课堂小测的案例



该同学的画图流畅度还行，直观想象素养已达到可测范围，但分不清函数的值取绝对值和自变量取绝对值的区别，需要加油。



该同学抽象性的内容完成度较好，初级的概括能力是具备的。



时间：7分钟　　学生3

(1) ∵ $f(x+2)=-f(x)$

∴ $f(x+4)=-f(x+2)=-[f(x)]=f(x)$

∴ $f(5)=f(1+4)=f(1)=f(5)=5$

(2) ∵ $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=-\frac{1}{-f(x)}=f(x)$

∴ $f(5)=f(1+4)=5$

(3) 具备。∵ $f(a+x)=-f(x)$

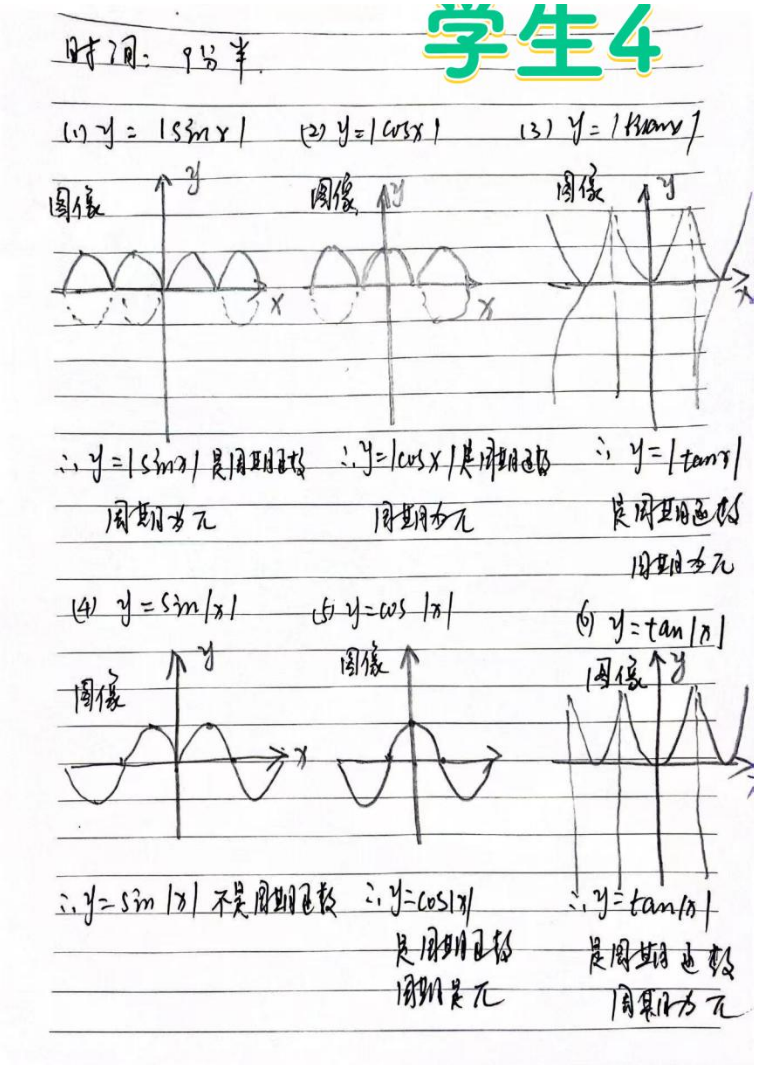
∴ $f(2a+x)=-f(x+a)=f(x)$ 即符合周期

(4) 具备。∵ $f(a+x)=-\frac{1}{f(x)}$

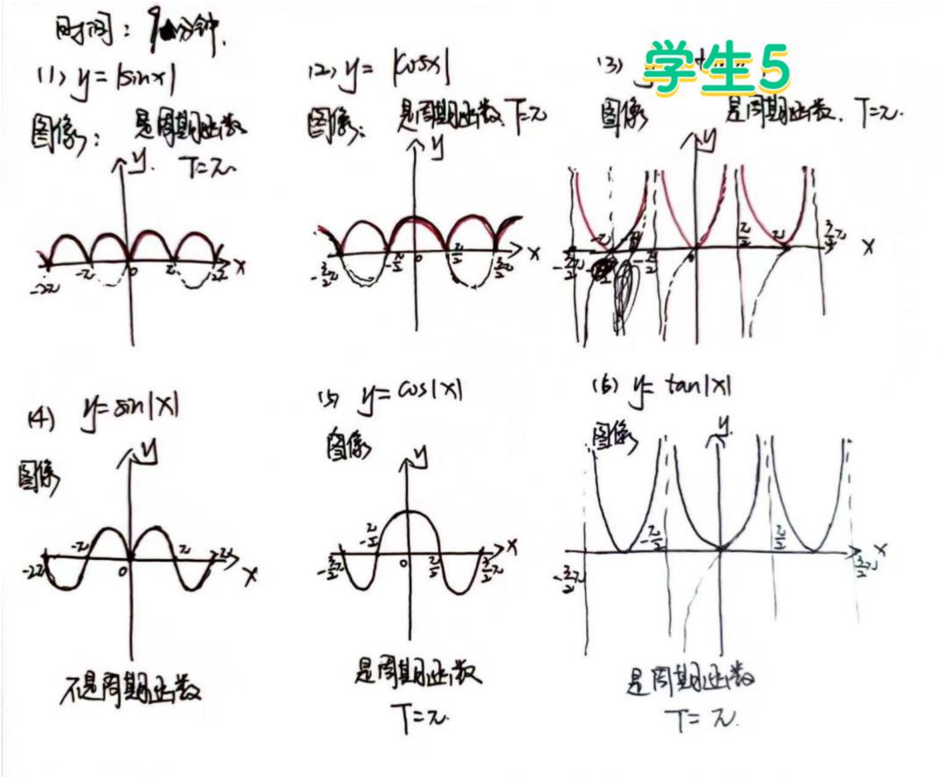
∴ $f(2a+x)=-\frac{1}{f(x+a)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$

该同学除了最后的文字表述部分存在不足，初级的抽象概括能力也是具备的。

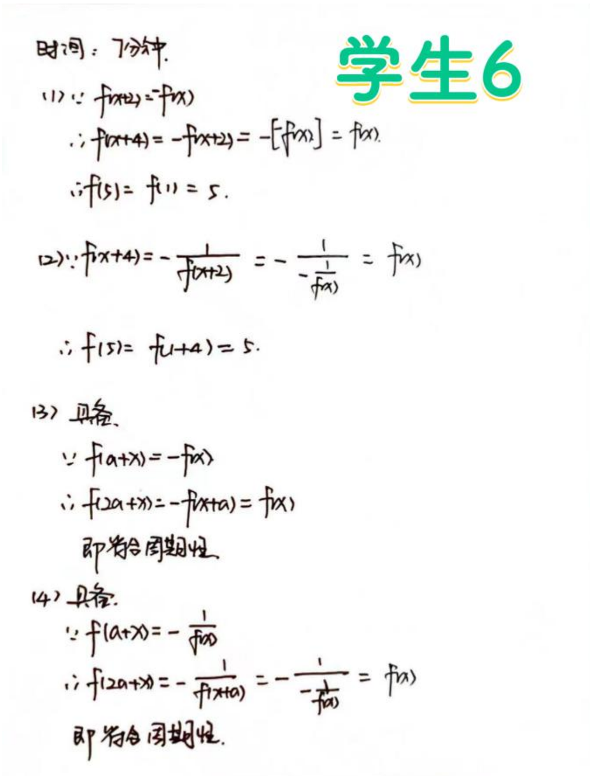
附录E 实验班课堂小测的实例



该同学的作图能力还需要加强，存在不连贯曲线的问题。但是正确率较好，具备较好的直观想象素养。



该同学作图能力较好，图全是对的，除了第五题的最终答案出现问题，属于概念性错误，直观想象素养也较好。



该同学的初级抽象概括能力较好。