



利用NetPad探索玫瑰曲线

景立1、景张1、爱玲饶2、陈如贤3、王颖3、郝冠1(B)

1广州大学计算科学与技术研究所, 广州, 中国{Jing_lee, changji}@e.gzhu.edu.cn, guan hao
@gzhu.edu.cn 2中国资溪泰伯小学, 1031107669@qq.com 3中国广州软件工程研究所,
广州, 中国{crx, wying}@mail.seig.edu.cn

抽象。动态几何系统在数学教育中得到了积极的推广, 因为它具有全面提高技术社会所需的核心数学素养的潜力。动态拖动几何元素以比较和发现关系的能力, 以及控制运动和观察轨迹的能力, 使动态几何系统成为强大而高效的数学学习工具。本文主要研究动态几何系统在中学数学探究教学中的应用。具体来说, 为学生设计了一个名为"用NetPad数学绘制花朵"的探究式学习活动, 研究玫瑰曲线的一个特征, 即花瓣数与玫瑰曲线方程系数的关系。通过用NetPad依次对方程式 $\rho = A \cdot \cos(n\theta)$ 和 $\rho = A \cdot \cos(n\theta) + B$ 进行建设性的绘图, 然后观察、推理、验证和表达, 学生可以近距离体验完整的数学知识生成过程, 进一步提高学生的创新意识和实践能力。

关键词 玫瑰曲线·动态几何·NetPad·基于探究的学习

1简介

作为一种形状多样的闭合曲线, 玫瑰曲线自18世纪意大利数学家吉多·格兰迪首次研究以来就吸引了人们。此外, 玫瑰曲线的数学性质和美丽已经在当前的工业操作中得到了实际应用, 例如轨道成形压制、绳索编织、扫描和编织【1,2】。因此, 关于玫瑰曲线的话题逐渐引起了中学数学教育, 特别是探究式数学教育的关注。

探究式数学学习活动是指以学生为中心、以教师为导向的数学教学范式, 旨在通过密切体验数学知识的生成过程, 进一步培养学生的创新意识

数学知识，即发现并提出有意义的数学问题，做出合理的数学假设，给出解决问题的计划，并用数学方法论证结论【3-5】。根据文献检索，基于探究的玫瑰曲线学习活动主要是利用物理工具或信息技术进行的。例如，高[6]提出了一个STEM案例，引导学生探索并物理绘制一条4花瓣的玫瑰曲线；徐[7]提出了一个案例，通过数学探索方程 $\rho = A \cdot \sin(n\theta)$ 的花瓣数和系数n之间的关系软件；而Tuyetdong[8]通过在动态几何系统中绘制各种玫瑰曲线来进一步扩展探索。在高的案例中很好地展示了4瓣玫瑰曲线的数学性质，并建议学生按照同样的探索方法进一步绘制其他玫瑰曲线，这是应用玫瑰曲线的一个很好的例子，但不是探索各种玫瑰曲线的有效方法，因为它的存在拉丝成本相对较高。而在徐和图耶东的案例中，通过观察不同的图形来探索玫瑰曲线的性质，并且可以通过引入方程并在动态几何系统中操纵变量来快速绘制图形；尽管信息技术有助于节省更多的努力，但跳过过程和改变变量后直接显示结果，使得曲线的数学性质被隐藏，信息技术工具的好处没有充分利用来影响学习行为【9-11】。

事实上，动态拖动对象以比较和发现关系，同时保持对象的几何约束不变的能力使动态几何系统成为强大的数学学习工具。此外，用户可以与几何对象进行交互，并立即收到对其行为的视觉响应；这种交互有利于理解，可视化学生的想法和确认或伪造他们的假设的即时反馈将使解决问题更有效【12,13】。因此，动态几何系统的可用性允许使用玫瑰曲线的属性来绘制它们的一些建设性方法。特别是NetPad作为一个设计良好的动态几何系统，已经被中学生和教师广泛接受，技术接受门槛相对较低；而且基于浏览器的动态几何系统可以从各种终端访问，这使得NetPad成为一种方便易用的学习工具【14-16】。

因此，本文着重研究动态几何系统在中学探究式数学教学中的应用。以“用NetPad数学绘制花朵”为主题的探究式学习活动，旨在研究玫瑰曲线的特征，即花瓣的数量。通过用NetPad绘制方程的建设性图形，然后观察、推理、验证和表达，希望学生能够近距离体验数学知识的生成过程，进一步培养学生的创新意识和实践能力。在学生极坐标和直角坐标中余弦曲线的先验知识基础上，本活动设计为以下四个部分。

2玫瑰曲线的第一印象

一开始，教师可以分配一个桥接任务，即观察和收集学生在现实生活中遇到的花朵形状，期望他们可以提取

几种类似玫瑰曲线的基本形状。然后,介绍玫瑰曲线作为学生数学绘制具有所需花瓣数量的花朵的工具。

与其直接给出玫瑰曲线的静态图形或方程,更引人注目的是通过在NetPad中构建的阶梯模型来呈现一条4瓣玫瑰曲线的生成过程,从而激发学生的后续学习。如图1所示,圆 O 的半径 OA 和 OB 相互垂直,段 CD , CE 和 OF 分别为垂直于段 OA 、 OB 和 ED ,则点 F 沿 O 圆拖动点 C 形成的轨迹为4瓣玫瑰曲线。

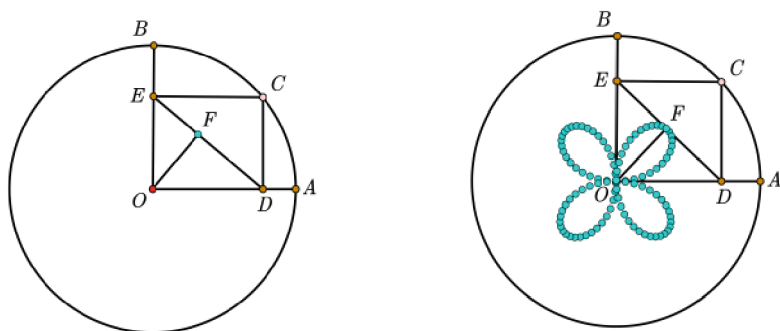


图1. 通过拖动点 C 动态生成4瓣玫瑰曲线

在模型的基础上,学生有机会创造性地尝试并找到如何通过调整模型来改变花瓣的数量,例如如果圆 O 的半径 OA 和 OB 是什么彼此不垂直。然后,鼓励学生在极坐标中找到曲线的方程。以点 O 为极点, OA 为极轴, $\angle AOF = \theta$, 得到 $OF = OD \cdot \cos(\theta)$ 并不难。显然, 段 OA 的长度和 θ 的系数是影响图的关键。因此, 学生们会被激励去看看我们是否可以根据公式 $\rho = A \cdot \sin(k\theta)$ 绘制具有不同花瓣数量的花朵。

3用NetPad进行建设性绘图

3.1激励学生根据现有知识进行猜测

由于直角坐标中的正弦曲线对应于绕圆运动的点的水平坐标和中心角, 因此可以建立一个模型, 直观地动态地显示正弦曲线的生成过程。如图2所示的课件2所示, 点 A 沿单位圆 C 移动, 点 C' 以点 A 的中心角值的速度沿 x 轴移动, 直线 l_1 通过点 C' 并垂直于 x 轴, l_2 通过点 A 并为

1https://www.NetPad.net.cn/resource_web/course/479130。

2https://www.NetPad.net.cn/resource_web/course/494350。

与 x 轴平行，然后，由点 A 和 O' 驱动的交叉点 B 的轨迹就是正弦曲线，它可以通过动画功能一点一点地出现。
通过回忆上述已有的知识，学生可能会自然而然地想出一个合乎逻辑的想法：极坐标方程的图是否可以由一些点以某种形式移动来构造？

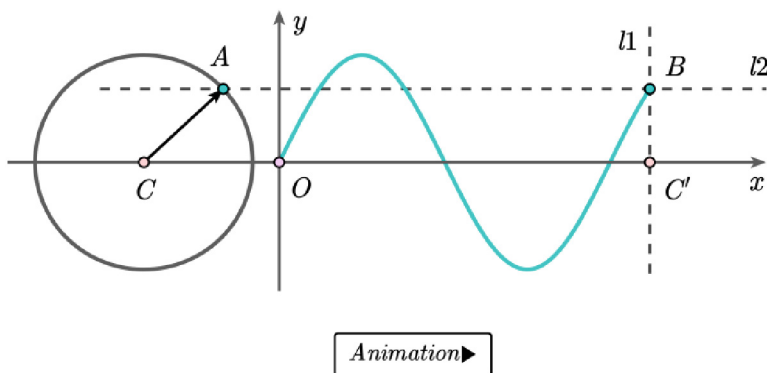


图2。在直角坐标中构造性地绘制正弦曲线

3.2分析方程式

学生可以直接分析方程式 $\rho = A \cdot \sin(k\theta)$ ，或在进行一些转换后进行分析。因为 $\rho = A \cdot \sin(k\theta) = A \cdot \cos(k\theta - \pi/2)$ ，我们知道 $\rho = A \cdot \sin(k\theta)$ 和 $\rho = A \cdot \cos(k\theta)$ 都可以用来指定玫瑰曲线，更一般化的形式是 $\rho = A \cdot \sin(\omega\theta + \varphi)$ 或

部分 $A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 。这里我们建议学生采用极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 。由于学生对直角坐标系比较熟悉，他们可能想知道如果将极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 转换为直角坐标系中的参数方程会发生什么，即：

$$\begin{cases} x = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) \cdot \cos\theta \\ y = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

经过简单的三角变换后，式。(1)组织成：

$$x = \frac{A}{2} [\cos((\omega+1)\theta + \varphi) + \cos((1-\omega)\theta - \varphi)]$$

有趣的是，出现了两个圆周运动的参数方程，如等式所示。(3)和等式。(4)。两个圆周运动具有相同的半径，不同的

移动速度和不同的短语角度。也就是说，方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 的图形是由两个不同圆周运动中的一个点形成的。

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos((\omega + 1)\theta + \varphi) \\ y = \frac{A}{2} \sin((\omega + 1)\theta + \varphi) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos((1 - \omega)\theta - \varphi) \\ y = \frac{A}{2} \sin((1 - \omega)\theta - \varphi) \end{cases} \quad (4)$$

3.3 构建模型

根据Eqs的几何意义。(3)和(4)，学生可以创造性地构建一个模型来演示一个点在NetPad中由两个圆周运动驱动的运动。提示是平面中两个圆周运动的相对位置。当点运行在彼此不在的两个圆上时，连接这两个点的线段的中点满足我们的期望；但由于缩放效应，图形的大小似乎不正确。如图3所示的课件3所示，点 A_1 和 A_2 分别设置为根据等式移动。(3)和(4)，则段 A_1A_2 的中点 M 的轨迹是一条4瓣玫瑰曲线，但在相应方程指定的图的一半大小。

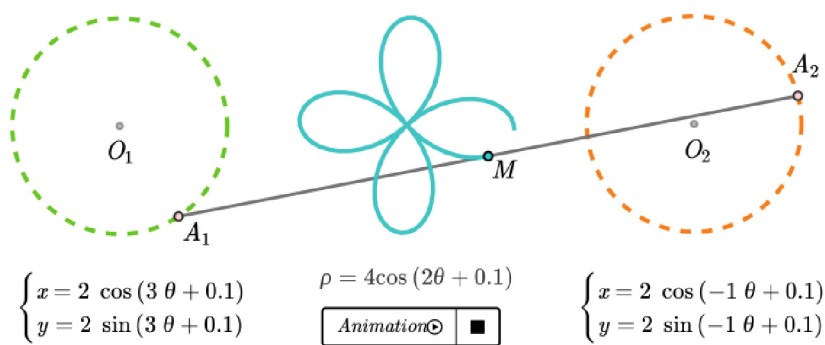


图3. 基于分离圆周运动的模型

然后，学生可以考虑包含切线圆周运动的模型。如图4所示，当 O_2 圆从外部或内部沿 O_1 圆作切线运动时， O_1 圆上的定点 A 也作圆周运动；如果定点固定 A 也沿着 O_2 圆移动，然后 A 点通过两个圆周运动驱动，而 A 点的运动正是我们需要的。显然，无论外部相切

圆周运动或内切圆运动，运行圆心的运动很重要，因此切圆运动可以分为割圆运动，如图4所示。



图4。基于切向圆周运动的模型

更具体地说，外部和内部运动可以有或没有滑动的滚动。对于没有打滑的情况，它可能并不总是绘制玫瑰曲线。实际上，这个模型是阶梯模型的关键，学生可以在这次探究式学习活动之后，尝试找出隐藏在阶梯模型中的两个圆周运动，然后，根据阶梯模型，按照花瓣数的规则，绘制出各种玫瑰曲线。

对于两个正切圆周运动的模型，如图5中的课件4所示，点 O_2 根据公式沿 O_1 圆移动。(3)，点A沿着圆 O_2 根据等式移动。(4)，点A的轨迹是由方程规定的曲线，具有特定参数。

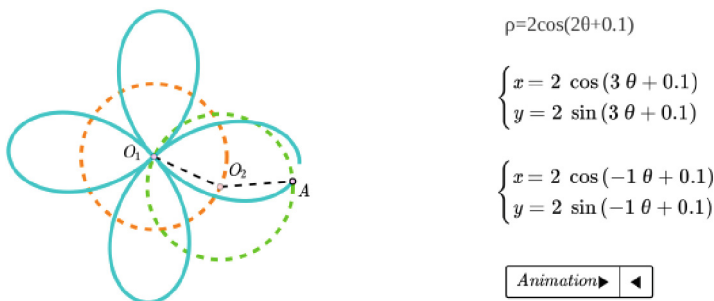


图5。一种基于割线圆周运动的模型

3.4 参数设置

在初步几何构造的基础上，我们将通过观察、分析、表达参数 A 、 ω 、 φ 的范围和几何意义，进一步设置相应的动画参数。

https://www.NetPad.net.cn/resource_web/course/533774。

显然,“A”的值是指两个圆的半径之和或距离极点最远的距离,所以“A”可以是任意实数。当 $x = (k\pi - \varphi)/\omega$ 时达到极值A或-A,其中 $(k \in \mathbb{Z})$;一个极值对应于花瓣。整个图从极点轴向延伸,参数A增加,参数“A”只影响图的大小。

使用不同的“ φ ”,点开始在不同的位置移动,导致整个图形以特定角度围绕极点旋转。同时,通过回忆直角坐标系中余弦曲线的相关知识,学生可以得出参数“ φ ”决定初相的相角 φ/ω 和“ φ ”可承受数的结论。因此,根据“ φ ”, $-\varphi/\omega$ 的曲线旋转为 $-\varphi/\omega$ 的一个角,并且“ φ ”不影响整个图的形状。

通过观察不同“ ω ”的构造,学生将发现点以不同的速度运行,并且出现不同数量的花瓣。参考直角坐标系中余弦曲线的周期(周期长度为 $2\pi/\omega$,周期间隔为 $[-\varphi/\omega + 2k\pi/\omega, (2\pi - \varphi)/\omega + 2k\pi/\omega]$ 、 $(k \in \mathbb{Z})$ 和 $\omega \in \mathbb{R}$),学生可以设置 $\theta \in [-\varphi/\omega, (2\pi - \varphi)/\omega]$ 、 $\theta \in [-\varphi/\omega, (2\pi - \varphi)/\omega + 2\pi/\omega] \dots$ 以查看 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 的图形。

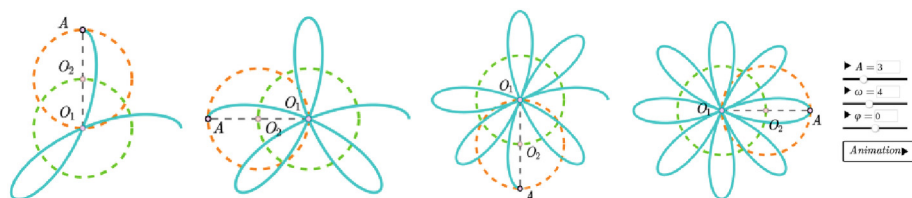


图6. 不同时期对应的花瓣

如图6所示,一个时期有“两个完整的花瓣”,两个时期有“四个”,三个时期有“六个”……。由于玫瑰曲线是闭合曲线,如果在 $Q * 2\pi$ 的区间内只有P个完整周期($2\pi/\omega$),那么玫瑰曲线是闭合的(其中P和Q是不可约整数)。也就是说, $P * 2\pi/\omega = Q * 2\pi$,即 $\omega = P/Q$;并且“ ω ”应该设置为极方程图的有理数 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$,也可以表示为 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q}\theta + \varphi)$ 。根据上述分析,学生可以选择自己的模型,我们得到包含“两个正切圆周运动”的模型和相应的参数范围,如图7所示的课件5。在模型的基础上,学生可以进一步挖掘玫瑰曲线最具特征的特征,即花瓣的数量,从而根据自己的喜好数学地绘制各种花朵。

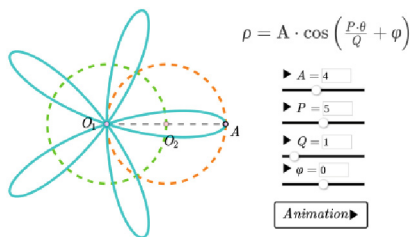


图7。“正割圆周运动”模型

4探索特色功能-花瓣

4.1绘制更多玫瑰曲线，观察和总结

在上述构造的基础上，学生可以通过拖动滑块来绘制更多的图形，并观察系数与花瓣数的关系，如图8所示。

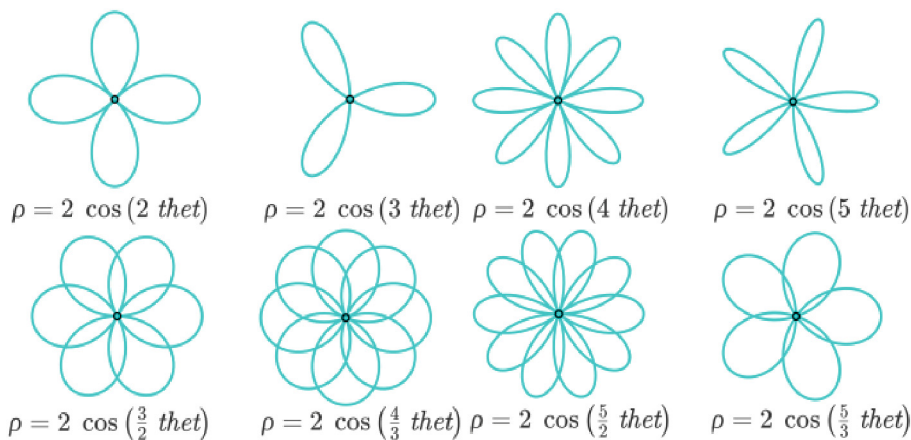


图8。各种花瓣的玫瑰曲线

以下事实很容易得到：

- 当 P/Q 为整数时，花瓣彼此不部分重叠；当 P/Q 为分数时，花瓣彼此部分重叠。
- 当 P/Q 为奇数时，有 P 个花瓣，当 P/Q 为偶数时，有 $2P$ 个花瓣。
- 对于分数 P/Q ，当 P 和 Q 中只有一个是偶数时，有 $2P$ 花瓣，当 P 和 Q 都是奇数时，有 P 花瓣。

为了找出原因，我们可以以方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q}\theta + \varphi)$ 为例列出每个峰的极坐标。所有峰编号为0至 $2P-1$ ；

当 $\theta = -\varphi/\omega$ 、 $(\pi - \varphi)/\omega$ 、 $(2\pi - \varphi)/\omega$ 、 $(3\pi - \varphi)/\omega$ 、 $(4\pi - \varphi)/\omega \dots$ ；各峰的极坐标可以列为 $(A, -\varphi/\omega), (-A, (2\pi - \varphi)/\omega), (A, (3\pi - \varphi)/\omega), (-A, (4\pi - \varphi)/\omega) \dots$ 。此外，在极坐标系中，具有负半径的点与具有相同正半径的点完全相同，但与极的方向相反，即 $(-a, \theta)$ 与 $(a, \theta + \pi)$ 。因此，我们的玫瑰曲线峰值列表可以组织到表1中。显然，对于偶数P,Q只能是奇数，且最后的P个峰与前P个花瓣不重叠；对于奇数P,Q可以是偶数也可以是奇数，当Q为偶数时，最后的P个峰与前P个花瓣不重叠，当Q为偶数时，Q为奇数时，Q可以是奇数奇数，最后P个峰与前P个花瓣重叠。同时，学生可以找到整个图周期的规律，即当P和Q中只有一个为偶数时，周期为 $2Q \cdot \pi$ ，或者周期为 $Q \cdot \pi$ 。

表1。峰列表

N th peak	θ	Peak Coordinate		Organized Peak Coordinate	
		Even P	Odd P	Even P	Odd P
0	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$(A, -\frac{\varphi}{\omega})$		$(A, -\frac{\varphi}{\omega})$	
1	$\frac{\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{\pi - \varphi}{\omega} + \pi)$		$(A, \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	
2	$\frac{2\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{2\pi - \varphi}{\omega})$		$(A, \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega})$	
...	...	...	...	...	...
P-1	$\frac{(P-1)\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{(P-1)\pi - \varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, \frac{(P-1)\pi - \varphi}{\omega})$	$(A, Q\pi - \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, Q\pi - \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega})$
P	$\frac{P\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{P\pi - \varphi}{\omega})$	$(A, \frac{P\pi - \varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, Q\pi - \frac{\varphi}{\omega})$	$(A, Q\pi - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$
P+1	$\frac{(P+1)\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{(P+1)\pi - \varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, \frac{(P+1)\pi - \varphi}{\omega})$	$(A, Q\pi + \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, Q\pi + \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega})$
P+2	$\frac{(P+2)\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{(P+2)\pi - \varphi}{\omega})$	$(A, \frac{(P+2)\pi - \varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, Q\pi + \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	$(A, Q\pi + \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega})$
...	...	...	...	...	...
2P-1	$\frac{(2P-1)\pi - \varphi}{\omega}$	$(A, \frac{(2P-1)\pi - \varphi}{\omega} + \pi)$		$(A, 2Q\pi - \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	

4.2提出新问题

在分析参数P和Q的影响后，我们可以根据规则绘制具有期望花瓣数的花朵。然而，似乎我们可以画任何花，但花瓣彼此不部分重叠，花瓣数是偶数，而不是四的倍数，如六瓣，十瓣等（图9）。我们要再走一步吗？当然，但我们需要回到最开始的地方，也就是方程式。

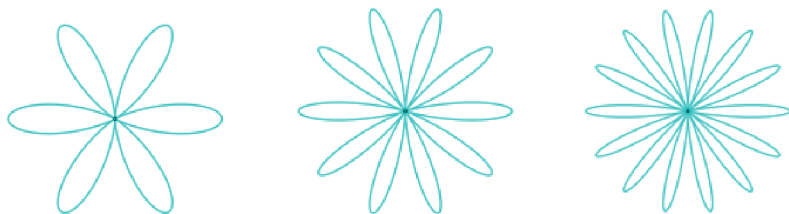


图9。无法根据方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 生成花朵

5绘制广义玫瑰曲线

由于 $y = A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$ 在直角坐标系中更广义的形式是 $y = A \cdot \cos(\omega x + \varphi) + B$ ，因此我们受到启发，探索极坐标系中更广义的余弦曲线 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) + B$

。

5.1分析和绘图方程式 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) + B$

第一步也是分析方程，找出极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) + B$ 的图是否由某些点以某种形式移动生成。通过将其转换为直角坐标形式、转换和组织，极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) + B$ 被转换为以下形式：

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2}[\cos((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) + \cos((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi)] + B \cdot \cos\theta \\ y = \frac{A}{2}[\sin((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) + \sin((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi)] + B \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (5)$$

根据方程，图形由三个不同圆周运动的总和驱动的点生成，并且圆周运动具有不同的半径、移动速度和相位角。根据以往的探索经验，或者参考生活中发生的三个圆周运动的场景，如月球绕地球运行，它们一起绕太阳运行，学生可以构建如图10所示的模型6：利用Ne提供的动画功能垫，点 O_2 根据浅绿色公式移动，点 O_3 根据深绿色公式移动，点A根据橙色公式移动，其中 $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{N}, Q \in \mathbb{N}$ 和 $\varphi \in [0, 2\pi)$ 。

5.2观察并总结参数的影响

基于上述构造，显然花瓣的长度为 $A + B$ 或 $A - B$ ，其恰好对应于方程式 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) + B$ 的极值。有趣的是，如果 $|A| > |B|$ 在不同的方向上产生了小花瓣，那么学生就会被激励去观察并对A和B如何影响花瓣进行分类讨论。由于参数B仅决定曲线的大小，因此它可以是实数。

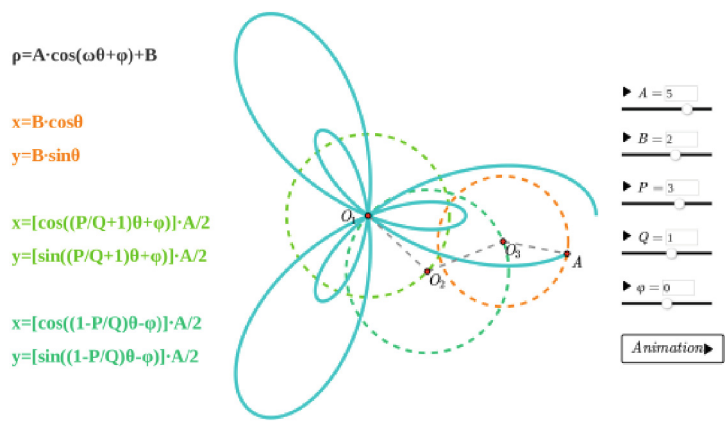


图10。根据公式 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi) + B$ 的模型（在线颜色图）

· $|A| < |B|$ ：花瓣不是在一点上聚集在一起，而是向内连接一个直径为 $|A-B|$ 的圆圈，向外连接一个直径为 $|A + B|$ 的圆圈，如图11所示。

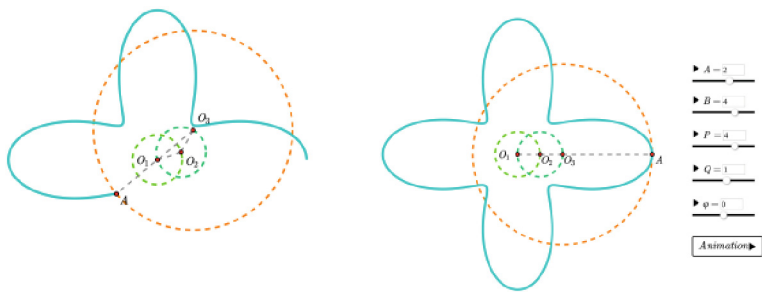


图11。当 $|A| < |B|$ 时的情况

· $|A| = |B|$ ：花瓣聚集在一个点上，向外连接一个直径为 $A + B$ 的圆圈，如图12所示。

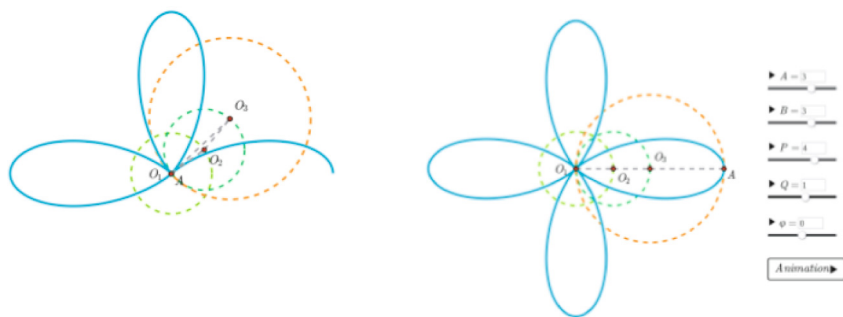


图12。|A| = |B|时的情况

·|A| > |B|：有较小的花瓣和较大的花瓣，所有花瓣聚集在一个点上，但较小的花瓣向外连接一个直径|A-B|的圆圈，而较大的花瓣向外连接一个直径|A+B|的圆圈，如如图13所示。此外，当B = 0时，所有花瓣的大小都相同，这正是 $\rho = A \cdot \cos(\omega\theta + \varphi)$ 的情况。

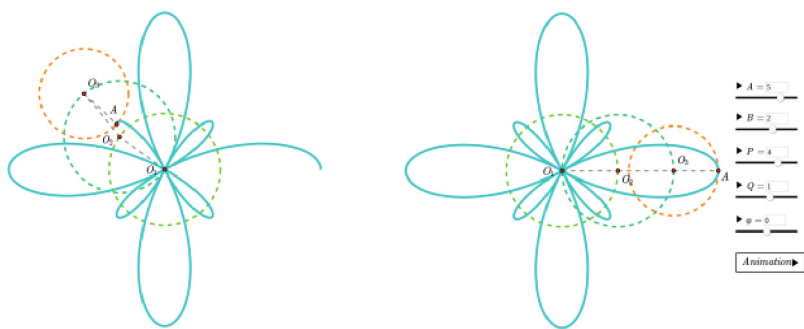


图13。当|A|>|B|

在以上基础上，学生可以通过绘制各种玫瑰曲线图进行观察和总结，最后得出表2所示的结论。通过这个探索过程，他们可以数学地画出具有所需花瓣数量和形状的花朵。

表2。花瓣数量和形状的规则

	P/Q值	$ A \leq B $	$ A > B $	$ B = 0$
P/Q=整数	P/Q=奇数	P花瓣	2P花瓣	P花瓣
无重叠花瓣	P/Q=偶数	P花瓣	2P花瓣	2P花瓣
P/Q=分数	P=奇数&Q=奇数	P花瓣	2P花瓣	P花瓣
重叠的花瓣	P=偶数或Q=偶数	P花瓣	2P花瓣	2P花瓣

*对于P、Q、A、B的不同值，花瓣数（蓝色）不同

6结论

本次学习活动探讨了花瓣数与方程参数之间的对应关系，通过在信息技术的支持下，亲身体验课堂中发现数学知识的全过程，学生不仅掌握了具体的数学知识，还发展了自己的数学学习和探索技能。

具体来说，在学生对直角坐标系中构造性地绘制余弦方程方法的先验知识基础上，鼓励他们以类比、联想和创新能力，建设性地绘制极坐标方程 $\rho = A\cos(\omega\theta + \varphi)$ ，从而理解直角坐标系中参数的几何意义通过构造性操作，学生可以直观而深刻地理解极坐标方程；此外，通过绘制多条玫瑰曲线，学生可以观察、总结、表达和验证花瓣的规律；同时，提出了一个新的问题，即仍然存在一些图形通过逻辑推理的猜测，激发学生在NetPad中用类似的构造方法绘制极坐标方程 $\rho = A\cos(\omega\theta + \varphi)$ ，最终得出更完整的花瓣规律结论。最后，学生通过数学方式绘制出具有所需花瓣数的各种花朵，从而体验数学家发明或发现新知识的思维和过程，进一步发展创新意识和实践能力。

同时，信息技术作为数学探究学习的有益工具，为学生积极发现和探索问题提供了一个非常理想的环境。与本活动一样，学生可以创造性地绘制和设置不同的圆周运动来绘制 $\rho = A\cos(\omega\theta + \varphi)$ 的图形，通过拖动变量滑块方便地观察各种图形，并快速重建模型来绘制 $\rho = A\cos(\omega\theta + \varphi) + B$ 的图形。此外，学生可以在本活动后探索梯子模型中的两个圆周运动，并在梯子模型的基础上进一步绘制各种玫瑰曲线。因此，学生在NetPad上做数学实验，就有了更大的空间去实践或实现自己的想法，从而获得真实的数学经验，而不是抽象的数学结论。NetPad是一种与数学学科密切相关的信息技术，在抽象思维与视觉思维、动手操作与脑力劳动、独立思考与合作交流等方面取得了平衡，使数学学习更加完整

认知过程。此外,信息技术的使用并没有掩盖思维过程,而是建设性地剖析了几何原理,进一步使其成为STEM教育的适当基础。

未来,我们将进行正式的实证研究,与传统的探究式数学学习进行比较,定量分析信息技术对探究式数学学习的具体影响,并准确评估学生的学习成果。

致谢。这项工作得到了广州大学全日制研究生创新研究(编号:2022GDJC-M34)、中国博士后科学基金(编号:2021M700920)、广州院士专家工作站(编号20200115-9)、广东省高校创新项目(2020KTSCX215)。

参考资料

1. Jin Y., Yua, Z.S.: 广义玫瑰曲线及其应用。应用程序。Res. 计算机。21(3), 170–171 (2004)
2. 潘, L.: 玫瑰曲线及其应用研究。计算机。应用程序。Softw. 25(10), 3 (2008)
3. 2020年修订的高中数学课程标准2017年版(2020年)
4. 杨, Y., 梁, H., 张, D.: 数学探究二十年研究: 回顾、经验与展望。J. 数学。Educ. 29(6), 40–45 (2020)
5. Harlén, W.E.: 科学和数学中的探究式学习。Rev. Sci. 数学。信息技术教育。7(2), 9–33 (2013)
6. 高, Y.: 寻找三叶草: 一个STEAM案例设计。物理。教。42(1), 2–18 (2020)
7. 徐, W., 张, Z.: 网络环境下数学课“玫瑰线研究”的教学设计。Inf. Technol. Educ. 小学中学。2005(2), 38–40 (2005)
8. Phan-Yamada, T., Yamada, W.M.: 使用GeoGebra探索极坐标曲线。数学。教书。106(3), 228–233 (2012)
9. 孙, B., 郭, K., 曹, Y.: 信息技术与数学教学的“深度融合”: 理想与现实。Educ. Res. Exp. 2019(5), 45–50 (2019)
10. 年轻, J., 戈鲁梅克, F., 哈密尔顿, C.: 数学课堂中的技术有效性: 荟萃分析研究的系统综述。J. 计算机。Educ. 5(2), 133–148 (2018)
11. Nocar, D., Zdrahal, T.: 动态几何在探究式教育中的潜力。在: EDULEARN15会议记录, pp. 4992–4998 (2015)
12. 饶, Y., 张, J., 邹, Y. 等人.: 先进的数学教育资源运行环境。Sci. China Inf. Sci. 61(9), 1–3 (2018)
13. 关, H., 秦, X., 饶, Y.: 动态数学数字资源开放平台研究与设计。J. 哈尔滨研究所。Technol. 51(5), 14–22 (2019)
14. 饶, Y., 关, H., 陈, R., 左, Y., 王, Y.: 基于Internet的新型动态数学系统。收于: Davenport, J.H., Kauers, M., 拉班, G., Urban, J. (编辑。) ICMS 2018. LNCS, 卷。10931, pp. 389–396. 斯普林格, 查姆(2018), https://doi.org/10.1007/978-3-31996418-8_54
15. 陈, R., 饶, Y., 蔡, R. 等人.: 动态数学软件基于用户体验的人机交互设计与实现。在: 2019年第14届计算机科学与教育国际会议 (ICCSE), 第。428–433. IEEE (2019)
16. 王, J., 张, L., 李, C. 等人.: 基于用户体验的动态数学软件评价研究。在: 2020年第15届计算机科学与教育国际会议 (ICCSE), 第。445–450. IEEE (2020)