

学校代码：10663

学 号：21020061212



貴州師範大學

硕士学位论文

网络画板培养高一学生直观想象素养的 课例研究

A Study on the Lesson Model of Cultivating Senior one High
School Students' Intuitive Imagination Literacy under the
Netpad

专业学位类别：教育硕士

专业学位代码：0451

专业领域名称：学科教学（数学）

专业领域代码：045104

研究方向：数学课程与教学设计

作者姓名：曾九龙

导师姓名(职称)：李俊扬（教授）

张转周（副教授）

二零二四年四月六日

目 录

| | |
|-------------------------------|----|
| 1 绪论..... | 1 |
| 1.1 研究背景..... | 1 |
| 1.2 研究问题..... | 1 |
| 1.3 研究意义..... | 2 |
| 2 概念界定及研究现状 | 3 |
| 2.1 概念界定..... | 3 |
| 2.1.1 “三教”理念 | 3 |
| 2.1.2 核心素养..... | 3 |
| 2.1.3 数学核心素养..... | 4 |
| 2.1.4 直观想象素养..... | 4 |
| 2.1.5 课例研究..... | 5 |
| 2.2 国外研究现状综述..... | 5 |
| 2.2.1 现代信息技术与数学教学..... | 5 |
| 2.2.2 直观想象研究现状..... | 6 |
| 2.3 国内研究现状..... | 6 |
| 2.3.1 直观想象素养的历史演进..... | 6 |
| 2.3.2 直观想象素养..... | 8 |
| 2.3.3 现代信息技术与数学的整合..... | 10 |
| 2.3.4 网络画板在数学教学中的应用研究现状 | 13 |
| 2.3.5 课例研究的现状..... | 15 |
| 2.4 已有研究对本研究的启示 | 17 |
| 2.4.1 内容上的启示..... | 17 |
| 2.4.2 方法上的启示..... | 17 |
| 3 研究设计..... | 19 |
| 3.1 研究目的..... | 19 |
| 3.2 研究对象..... | 19 |
| 3.3 研究内容..... | 19 |
| 3.4 研究方法..... | 20 |
| 3.5 研究思路..... | 21 |
| 4 ZY 市某中学高一学生直观想象素养现状调查..... | 23 |
| 4.1 高一学生直观想象素养试卷测试 | 23 |
| 4.1.1 测试目的..... | 23 |
| 4.1.2 测试对象..... | 23 |
| 4.1.3 测试卷的编制..... | 23 |

| | | |
|-------|-----------------------|----|
| 4.1.4 | 测试过程 | 26 |
| 4.1.5 | 测试结果分析 | 28 |
| 4.2 | 高一学生直观想象素养问卷调查 | 34 |
| 4.2.1 | 调查目的 | 34 |
| 4.2.2 | 调查对象 | 35 |
| 4.2.3 | 调查问卷的编制 | 35 |
| 4.2.4 | 调查实施过程 | 36 |
| 4.2.5 | 调查结果分析 | 37 |
| 4.3 | 教师访谈 | 42 |
| 4.3.1 | 访谈目的 | 42 |
| 4.3.2 | 访谈对象 | 42 |
| 4.3.3 | 访谈提纲的编制 | 42 |
| 4.3.4 | 访谈实施 | 42 |
| 4.3.5 | 访谈结果分析 | 42 |
| 4.4 | 高一学生直观想象素养现状分析和总结 | 44 |
| 4.4.1 | 高一学生直观想象素养现状 | 44 |
| 4.4.2 | 教师对培养学生直观想象素养的总结 | 45 |
| 5 | 网络画板培养高一学生直观想象素养的课例研究 | 47 |
| 5.1 | 网络画板培养高一学生直观想象素养 | 47 |
| 5.2 | 课例研究设计 | 47 |
| 5.2.1 | 课例研究的目的 | 47 |
| 5.2.2 | 课例的选取 | 47 |
| 5.2.3 | 课例分析框架 | 48 |
| 5.3 | 课例 1:正弦型函数的性质与图象 | 48 |
| 5.3.1 | 教学要素分析 | 48 |
| 5.3.2 | 教学过程设计 | 50 |
| 5.3.3 | 课堂实录 | 53 |
| 5.3.4 | 教学反思 | 66 |
| 5.3.5 | 课例研究总结 | 68 |
| 5.4 | 课例 2:平面的基本事实与推论 | 69 |
| 5.4.1 | 教学要素分析 | 69 |
| 5.4.2 | 教学过程设计 | 71 |
| 5.4.3 | 课堂实录 | 74 |
| 5.4.4 | 教学反思 | 79 |
| 5.4.5 | 课例研究总结 | 81 |
| 6 | 研究总结及反思 | 83 |
| 6.1 | 研究总结 | 83 |
| 6.2 | 研究反思 | 84 |

| | |
|----------------------------|-----|
| 参考文献..... | 86 |
| 附录 1:高一学生直观想象素养测试卷 | 90 |
| 附录 2:高一学生直观想象素养的调查问卷 | 98 |
| 附录 3:教师访谈提纲 | 100 |

摘要

教育数字化是当下教育发展的必然趋势，随着现代信息技术的介入，教学过程与方法也变得更为多样化。将数学学科和信息技术进行整合更为适应如今时代的变迁，也是数学学科的发展和教学改革的重要手段。

本文旨在利用“网络画板”，以“三教”理念为理论指导，通过文献阅读、试卷测试、问卷调查、教师访谈以及课例研究等方法来探究提高高一学生直观想象素养的途径。在《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》中指出：“直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题。”

通过在知网进行相关文献的搜索，学习“三教”理念、直观想象素养、网络画板和课例研究等理论知识，并在网络画板官网进行学习其使用方法，进而把握住当前研究领域的研究现状，为当前研究提供必要的支持和指导。

试卷测试结果表明，高一学生的直观想象素养水平总体刚达到水平二的较低阶段，仍然具有极大的提升空间。高一学生的直观想象素养在物理方向略高于历史方向，男生略高于女生；而根据独立样本 T 检验的结果，选课差异、性别差异都不显著。

问卷调查结果表明，高一年级大部分学生对数学知识是比较感兴趣的，他们认为培养直观想象素养对于他们数学成绩的提高是有促进作用的。学生认为信息技术对学习数学的作用是持肯定的态度

的，学生也更希望教师能够通过信息技术，诸如几何画板、Geogebra 和网络画板等来进行教学。

教师访谈可以看出教师认为学生直观想象素养处于较低的水平。影响的主要因素有学生对直观想象的认识也比较少，学生的知识储备量不够、没有养成良好的作图习惯等。

对所选取的两个教学课例进行了教学要素分析、教学过程设计、课堂实录和教学反思，并开展课例研究，结果表明：“网络画板”的使用能促进学生直观想象素养的培养，具体表现为在“三教”理念的指导下，即“教思考”通过问题的提出让学生思考变化过程，提升学生的数学思维能力；“教体验”通过网络画板来展示几何直观和空间想象方面的知识提升学生对知识的感悟能力；“教表达”来让学生进行数学表达提升学生对知识的理解能力。

关键词：网络画板；直观想象素养；高一学生；课例研究

ABSTRACT

Digitalization of education is an inevitable trend in the current development of education. With the intervention of modern information technology, teaching processes and methods have become more diverse. Integrating mathematics and information technology is more in line with the changing times and is also an important means for the development and teaching reform of mathematics.

This article aims to explore ways to improve the intuitive imagination literacy of high school students through methods such as literature reading, test paper testing, questionnaire survey, teacher interviews, and lesson study, using the "Netpad" and the "Three Teachings" concept as theoretical guidance. In the "General High School Mathematics Curriculum Standards (2017 Edition, 2020 Revision)", it is pointed out that "intuitive imagination refers to using geometric intuition and spatial imagination to perceive the form and changes of things, and using spatial forms, especially graphics, to understand and solve mathematical problems."

By searching for relevant literature on CNKI, learning theoretical knowledge such as the "Three Teachings" concept, intuitive imagination literacy, Netpad, and lesson study, and learning its usage methods on the official website of the online drawing board, we can grasp the current

research status in the field and provide necessary support and guidance for current research.

The test results show that the overall level of intuitive imagination literacy of high school students has just reached the lower stage of level two, and there is still great room for improvement. The intuitive imagination literacy of first year high school students is slightly higher in the physics direction than in the history direction, with boys slightly higher than girls; According to the results of the independent sample T-test, there were no significant differences in course selection or gender.

The survey results indicate that the majority of first-year high school students are interested in mathematical knowledge, and they believe that cultivating intuitive imagination skills can promote the improvement of their mathematical performance. Students hold a positive attitude towards the role of information technology in learning mathematics, and they also hope that teachers can use information technology, such as Geometric Drawing Boards, Geogebra, and Netpad, to teach.

Teacher interviews show that teachers believe that students' intuitive imagination literacy is at a relatively low level. The main factors affecting students are their limited understanding of intuitive imagination, insufficient knowledge reserves, and failure to develop good drawing habits.

A teaching element analysis, teaching process design, classroom

recording, and teaching reflection were conducted on the two selected teaching examples, and a case study was conducted. The results showed that the use of "Netpad" can promote the cultivation of students' intuitive imagination literacy, which is manifested under the guidance of the "three teaching" concept, that is, "teaching thinking" enables students to think about the process of change through the proposal of problems, and enhances their mathematical thinking ability; "Teaching Experience" uses Netpad to showcase knowledge of geometric intuition and spatial imagination, enhancing students' ability to perceive knowledge; Teaching expression to enhance students' understanding of knowledge through mathematical expression.

Keywords: Netpad; intuitive imagination literacy; high school freshman; lesson study

1 绪论

1.1 研究背景

伴随着经济和科技的发展，教育与科学技术之间的联系也显得尤为重要，众多优质的教育软件给教师和学生也带来了极大的便利。教师在对学生进行教学的时候，需要对学生的核心素养进行培养。在数学的学习中，我们可以看到学生所拥有的思维能力和想象能力是极为重要的，对于中学生来说他们的思维能力和想象能力相对来说稍显匮乏，中学生在学习的时候通常都会遇到或多或少的困难。伴随着课程改革的不断深入，对教师来说需要在不同的阶段解决不同的问题，其中最主要的是如何在教学中引起学生对数学的兴趣，进而培养学生的核心素养。

一直以来，对于学生来说，直观想象能力都是尤为重要的，但也同时会困扰住许多的学生。在《普通高中数学课程标准（2017年版 2020年修订）》（以下简称《课程标准（2017年版）》）^[1]中就指出直观想象素养作为数学学科六大核心素养之一，其重要性是不言而喻的，同时也直观想象素养和空间想象能力有着极大的关联。^[1]

现代信息技术融入数学的教学中也需要考虑到理论和实践两方面，透过这些可以看到能够解决学生的困扰，极大的调动学生的积极性，发挥现代科学技术的基础优势，变课堂为生动活泼。

网络画板可以直接在浏览器进行访问的，方便快捷。网络画板是张景中院士及其团队在超级画板的基础上发展得到的，适应教育信息化的发展趋势。^[2]

1.2 研究问题

在数学教育过程中，直观想象素养在教学中无法忽视，且在教材中所占比重较大。本研究将在网络画板基础上培养学生直观想象素养，同时依然面临着一些需要解决的问题，诸如：

学生的直观想象素养的现状？

哪些因素在影响着学生直观想象素养？

如何将网络画板整合融入到数学教学中去进而培养学生的直观想象素养？

1.3 研究意义

直观想象素养在高中核心素养中所占的分量也是极为重要的，通过知网的搜索，关于直观想象素养在高中的研究文献也有不少。学生的课堂表现、课后练习和试卷呈现等都是可以用来评价直观想象核心素养的依据。通过相关的阅读，设计了一些相关的问卷调查，并对数据进行分析，找到对高中生直观想象素养水平现状及其影响原因。

本研究融合信息技术并结合直观想象素养的现状开展相应的研究，通过多方面的分析，对高中数学的教学提供一定的借鉴，进而培养学生的直观想象素养。

2 概念界定及研究现状

2.1 概念界定

2.1.1 “三教”理念

贵州师范大学吕传汉教授与其团队在经过长期的探究以及思考后在 2014 年提出了“三教”理念，即教思考、教体验和教表达。其主要目的是为了培养创新型人才，让学生在活动中来思考、体验和表达。^[3]

“教思考”主要是指教师于教学中起到助力的作用，让学生感悟数学思想方法，让学生学会去用数学思维分析问题，让学生养成良好的学习习惯。^[4]数学的学习需要学生具有较高的逻辑性，学生的学习需要不断地思考。在数学的教学中“教思考”就需要教学生“想数学”，教学生学会“数学地思考”。^[3]

“教体验”是指在教师的引导下在教学过程中进一步去把握和理解数学思想方法；^[5]让学生学会用数学的眼光来观察世界，学会“做数学”，这个过程是让学生能够在实践活动中有目的的来感受、体会和领悟周围的事物，以此获得相关知识、技能和情感价值观等。^[3]

“教表达”则是重视“表达”“倾听”和“交际”能力的训练。^[6]让学生学会用数学的语言表达世界，不仅包括文字语言，也包括符号语言和图形语言。教师在对学生进行知识传授的过程中，能进行引导学生进行表达出自己想要表达的事物，加深学生的基础知识的学习，培养学生的核心素养。^[7]

这三者是一个有机的整体，这三者共同促进学生的全面发展，进而达到培养学生核心素养的目的。

2.1.2 核心素养

经济合作与发展组织在上个世纪九十年代便提出了“核心素养”的概念，并启动了“Competencies 的界定与遴选：理论和概念基础”项目（简称 DeSeCo），旨在确定一组“key competencies”（核心素养）。^[7]核心素养是指学生在学习的过程中所具备的情感、品质和能力，不仅包括生活中的知识和技能，还包括学生应适应社会发展的数学品质和能力。^[1]

2.1.3 数学核心素养

在 2014 年 4 月教育部印发的《关于全面深化改革落实立德树人根本任务的意见》中提到了关键词“核心素养”，虽然并没有严格意义上明确数学核心素养，但是也有众多学者对其提出了自己的看法和认识。^[8]马云鹏在发表于课程·教材·教法中的《关于数学核心素养的几个问题》，提出了自己的观点：数学的核心素养是在教与学的过程中所需要关注的基本素养。^[9]张娜在其发表于教育科学研究的《DeSeCo 项目关于核心素养的研究及启示》也提出了自己的观点，即认为核心素养的功能是实现个体生活的成功和社会的健全。^[7]

而在《关于全面深化改革落实立德树人根本任务的意见》提出之后，国内的众多学者便开始对核心素养进行研究。随着《课程标准（2017 年版）》的颁布，正式提出了数学核心素养的概念，这是学生在经历过不断地学习的过程中所获得的，是对育人价值的主要体现。^[1]由此可以看出这是学生所必备且不可缺少的核心素养。

2.1.4 直观想象素养

(1) 几何直观

几何直观是将相对复杂以及抽象的数学问题进行“数学化”，需要学生借助图形来描述问题进而去分析和解决问题。在 2011 年《数学课程标准》中阐述了几何直观的主要内容：借助几何直观把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果。^[10]而在现代技术的发展中，很多的数学问题都可以很容易抽象出数学模型，借助图形来解决问题。所以几何直观其本质就是利用图形来对数学问题进行表述、探究以及解决数学问题的一种能力，通过《课程标准（2017 年版）》的表示可以认为几何直观是直观想象素养的关键能力之一。

(2) 空间想象能力

空间想象能力是学生在学的过程中对客观事物的空间形式进行观察、分析和认知的一种抽象的能力，是高中学生所需要具备的重要能力之一，培养学生的空间想象能力可以更好地帮助学生培养良好的数学思维，在这样一个学习的过程中，学生能够感受到数形结合的便捷性和通透性，还可以提升学生的几何直观意识。在新课标中对学生空间想象能力要求学生能够运用直观感知、操

作确认、推理论证、度量计算等认识和探索空间图形的性质，建立空间观念。^[1]而对于空间想象的研究则比较早，在我国 1956 年 6 月，《中学数学教学大纲（修订草案）》发布，明确提出了发展学生的逻辑思维和空间想象力。^[11]此后诸多学者进行研究空间想象能力，这也是属于直观想象的关键能力之一。

综上，可以认为他们具有包含关系，几何直观和空间想象是属于直观想象的关键能力，学生通过这两个媒介进而提升直观想象素养。

2.1.5 课例研究

“课例研究”源自日本，最初是作为日本明治时代的一种教育实践发展而来的，在代钦发表于数学通报上的《历史文化视角下的中国数学课例研究》中便阐明了课例研究的来历、中国数学课例研究的来历以及其价值。^[12]随着第八次基础教育课程改革的实施被引入我国，而在此之前我国有些教研活动也可以被认作早期的课例研究。也有学者认为课例研究实则是对一堂课的全部过程的记录，然后分析教学内容，总结教学经验。

综上，课例研究是通过教学实践和理论相结合的方法来帮助学生的学习，同时也可以借此提高教师团队的专业性发展，在这个过程中能够对教育教学中的问题进行解决，遵循教育规律。

2.2 国外研究现状综述

2.2.1 现代信息技术与数学教学

关于数学教学与信息技术的融合，在很久之前就有各国进行不断地尝试。诸如美国、日本、加拿大和英国等都提出了将信息技术整合到学科中的想法，有些国家还将信息技术作为数学教学的关键技能之一。

在《高中数学课程中信息技术使用的国际比较——基于中国等十四国高中数学课程标准的研究》中横向比较分析了各国课标在信息技术使用的比重、种类和知识领域，并纵向比较相应的小学初中课标：根据分析法国、德国和英国的小学初中课程标准中包含了丰富的信息技术使用种类，相比较之下，俄罗斯、南非、芬兰、日本和美国的课程标准中就对信息技术的使用较为单一，也并未详细说明那种信息技术及其相应知识点。而在高中课程标准中，美国和日本对提到信息技术的内容有所增加，种类也较为丰富，相较于小、初的课程标准中只提及几何软件，高中课程标准中则涉及更为丰富的信息技术种类。据统计，

各国课程标准中最常提及的是“信息技术”、“计算机”、“计算器”和“软件”，除此之外，法国的课程标准中所提及的种类最丰富，表述也最具体，具体到了动态几何软件、空间几何软件、电子表格和计算软件等。至于常见的信息技术设备——计算器，大部分国家在课程标准中都对其有相应的要求。^[13]

2.2.2 直观想象研究现状

直观想象能力主要借助几何直观和空间想象能力，而欧几里得作为几何学的奠基人从小就对图表有着浓厚的兴趣并在之后通过自己的努力助力几何学的独立与发展，欧几里得讲解的知识通俗易懂，他说过：“当你的影子跟你的身体一样长的时候，你去量一下金字塔的影子，那长度便等于金字塔的高度！”

《几何原本》是一部集前人思想和欧几里得个人创造性于一体的不朽之作，形成了一个严密的逻辑体系——几何学。^[14]而这本书，也就成了欧式几何的奠基之作。

2.3 国内研究现状

2.3.1 直观想象素养的历史演进

对学生来说，直观想象素养是在学习中逐渐形成的必备的极为关键的基本素养。自新中国成立以后，数学教育的发展也是十分迅速，从一开始的教学大纲到课程标准，直观想象素养在这些时期也会有从初步到逐步完善的阶段，直观想象素养这个名词的演进也逐渐完善。

在张定强的《中小学生直观想象素养研究：回顾与展望》^[16]中就对直观想象素养的发展展开了详细的叙述，如下图所示：

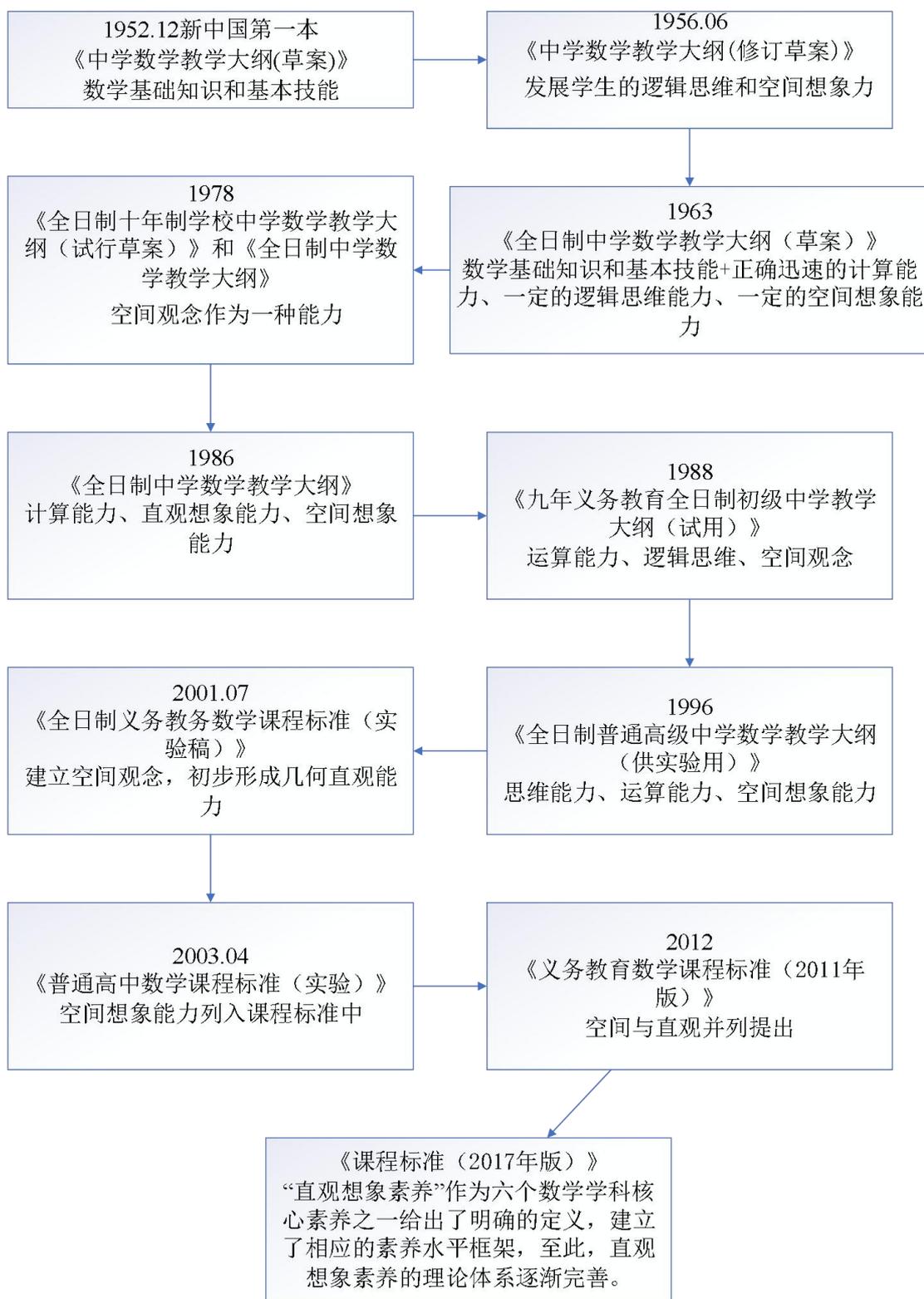


图 2-3-1 直观想象素养的历史演进

2.3.2 直观想象素养

直观想象素养是新课改中培养培养学生数学学科素养的核心之一，在实际教学中有着不可或缺的重要性，早在原始社会的人就不仅对球有了认识，而且对几何图形也有所了解，诸如陶器或其他器物、圆柱状或锥状石器，这些都需要古人具有极好的直观想象素养。^[19]而学生想要培养直观想象素养，就需要建立清晰有效的数学模型，并借助一定的推理能力和丰富的想象能力，并能联系到生活实际，这样就能在新的问题情境中来联系到原有的数学模型。

为了让论文收集更为全面，在中国知网的高级检索系统中，将主题设置为“直观想象素养”。截止到2022年11月，与直观想象素养有关文献2086篇，其中学术期刊文章130篇，硕博学位论文354篇。如图所示，从总体趋势上看，从2007年的发文量为1篇到2017年快速增长至101篇，由此可见发文量随着时间增长而增长。一直到2020都呈现的持续上涨的趋势，且增长较快。在2020年到2021年发文量在减少。

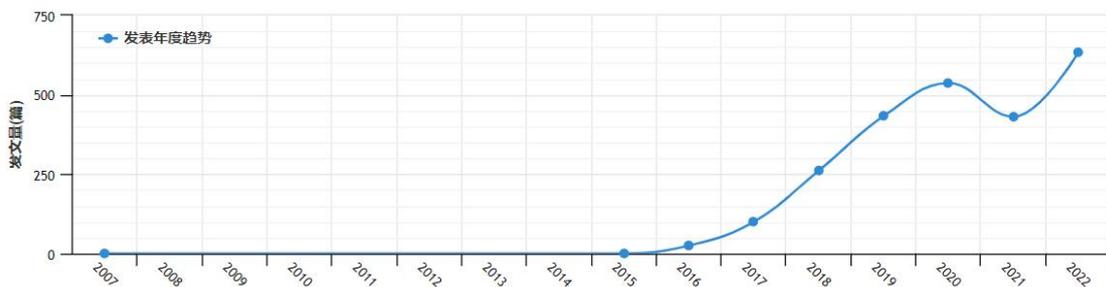


图 2-3-2 直观想象素养的文献总体趋势

关于“直观想象素养”的已有的研究大致可以分为直观想象素养现状调查研究、直观想象素养培养策略研究、直观想象的综述研究以及直观想象素养的发展研究等几个方面。

在直观想象素养现状调查研究方面，周聪寅在其硕士毕业论文《K市高二学生直观想象素养现状与培养策略研究——以圆锥曲线为例》中通过展开例子，结合多种研究方法开展的现状调查研究并通过分析提出相应的教学建议。^[17]周艳祖在《高中生直观想象素养的现状调查及教学建议》中提出借助空间认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述、分析数学问题。^[18]也有学者通过理论分析的方法对《课程标准》中评价数学直观想象素养的两个方面、三个学业水平和四个维度进行探讨和分析，最终提出高中生数学直观想象素养的测评方式、测试题和评价结果等。^[19]

在直观想象培养策略研究方面，需要在教学中不断提高学生已经具有的直观想象能力，直观想象素养是学生发展所需要的，良好的直观想象素养可以提高学生的兴趣，并在过程中渗透一定的现代信息技术可以有效的培养学生的直观想象素养。凌世超在《基于核心素养下小学生数学几何直观能力的培养》中提到培养学生良好几何直观能力的重要方法之一就是在空间几何的基础上建立学生的直观想象，也是提高学生直观想象素养的重要方法之一。^[20]刘文生在《注重几何实验教学 提升直观想象素养——谈立体几何初步的学习》构建几何模型的重要性。^[21]郭龙祥在《高中数学直观想象能力培养策略探寻》中提到数学研究的对象是数与形，是不可分开的，要想实现数形结合就要让学生培养直观想象素养。^[22]杨东《从几何直观到空间想象——以一道习题的在线直播教学为例》用运动型题目让学生直观体验图形运动的过程。^[23]周霜在其毕业论文《高中生直观想象素养现状调查及培养策略研究》中阐明了高中生直观想象素养的现状，找到了影响高中生直观想象素养的影响因素，并基于这些现状与影响因素，提出六点直观想象素养培养策略。^[24]唐大芳在《基于直观想象素养培养的初中数学微课教学研究》中通过多种研究方法，以两则教学案例寻找存在于教与学的问题，最后得到与之相应的教学改进途径。^[25]

在直观想象综述研究，施佳莹在《国内近十五年直观想象能力研究综述》中通过可视化知识图谱和文献内容分析，梳理了 15 年直观想象能力研究文献并得出了三点建议。^[26]

在直观想象素养的发展研究上，李向婷在《高中生数学直观想象素养发展研究》中通过文献分析、调查和统计分析得出一些具体的结论高中生的数学直观想象素养总体一般、随着年级升高直观想象素养水平显著提升、在性别上不具有统计意义的显著差异、不存在统计意义下的文理科显著差异，以及提出了影响高中生直观想象素养发展的三个不足。^[27]谢传定在《指导空间想象培养数学几何直观能力》几何直观能力是指利用图形描述和分析问题的抽象思维能力。在学生正式开始系统学习数学的小学阶段，教师就要重视对学生的空间想象能力及几何直观能力的培养与塑造，通过有计划、有意识的教学策略丰富数学课堂教学，培养与提升学生的几何直观能力。^[28]

通过对以上对直观想象的研究分析表明，关于“直观想象素养”的已有的

研究分为上述的几个方面。直观想象素养与教学目标、内容、方法及考试均密切相关，它对学生的创新意识和实践能力起着至关重要的作用，也是教育研究的热点。^[29]通过已有的发展研究，发现学生的直观想象水平不高，我们更可以借助现代信息技术来培养学生的直观想象素养。

2.3.3 现代信息技术与数学的整合

在新课程的改革中要求老师具有创新的教学手段，借此提高自己的教学能力，提高学生的积极性，可以有效的提高学生的学习质量，减轻教师的教学压力，因此教师运用多媒体手段与信息技术手段可以进行更加详尽的了解进而提高教学效率。

基于以上的分析，在中国知网上以“现代信息技术”作为主题词进行检索，在总库中搜索出 9310 篇文献，发现第一篇与数学相关的“现代信息技术”的文章是王建根和刘麦学于 1999 年发表于数学教育学报的《从现代信息处理技术看数学教学改革》^[30]，为了可以更为有效的对此进行分析，这里选取自 2000 年之后的文献进行研究。

文中所采用的文献资料的来源于中国知网，通过对文献数据库的检索，以“现代信息技术和数学教学的整合”为主题词，从 2000 年一月初 2022 年 8 月底为年限进行高级检索，得到的文献数量为 607 篇，其中学术期刊有 127 篇，学位论文有 25 篇，会议类论文有 29 篇，特色期刊有 425 篇。为了使得统计数据更好的进行分析，更加贴近现代信息技术与数学这一个大类，在来源类别中选取“北大核心”作为筛选条件，并以此展开相应的研究分析。

苏洪雨在自然辩证法通讯中所发表的《乔治·布尔：现代信息技术的数学基础奠基者》中介绍了这位数学家、哲学家，布尔建立了第一个逻辑演算，创立了布尔代数，并成为现代信息技术的数学基础。^[31]这些贯穿于现在乃至将来的无数的电子线路、计算机以及互联网中那些无法触碰的，都有着布尔代数的重要作用，这些是为现代信息技术为教学中的应用提供了莫大的基础支持。在信息技术下的数学教学是不容忽视的。

李保臻等发表于中国电化教育的《信息技术支持下的数学教学应处理好几个关系》中指出信息技术的飞快发展改变了教学的模式、方法和环境等，受到多种因素的制约，教师应当具备正确的理念以及应对措施，并提出了几对要处

理好的关系，即数学教师的主体能动性的发挥与信息技术客体的有效辅助之间的关系、信息技术与数学课堂有机整合过程中教师的理性认识和实践操作的关系、信息技术环境下数学教师恰当把握课堂教师的弹性预设与动态生成的关系和以信息技术为交流媒介。^[32]

现代信息技术在数学中应用也存在这不少的矛盾，在周大众发表于教学与管理的《基于信息技术的数学矛盾及其化解》中从信息技术内隐消极方面出发，揭示出信息技术支持下要妥善处理的几组矛盾，首先是信息技术导致的虚拟化倾向与中学数学现实生活指向性的矛盾信息技术走向了中学的课题，这种矛盾是不可避免地，并从三个方面寻求化解之道（生活化的数学情景、在活动中、提供详实的信息）；余下的分别是信息技术带来的碎片化知识形态与体系化数学知识建构的矛盾、信息技术诱发的表浅化思维方式与中学数学思维训练任务的矛盾和以信息技术为媒介的交往方式与传统师生交往方式的矛盾并分别提出了化解之道。^[33]除了上面谈到的两位学者所说的要处理的关系以及矛盾，还有柯俊在电化教育研究中发表的《课程视野中之信息技术与课程整合研究》提出了两者的课程整合的概念，信息技术的介入，对课程的影响以及如何更好的整合。^[34]以及柳成行在理论层面表达了对教师现代信息技术能力的培养；^[35]张海红在中国电化教育发表了现代信息技术事业的小学数学课堂。^[36]

现代信息技术引入课堂最直观的体现就是多媒体设备的引入，对课堂教学的效率具有极大的提升。王爱玲在数学教育学报中发表《现代信息技术在数学教育中的应用与现状调查研究》在文中阐明了现代信息技术进入课堂的开端，在文中表明教育部 2003 年颁布实施的《普通高中数学课程标准（实验）》提出教学过程中需要注重信息技术与数学课程的要求，各中小学纷纷建立起“多媒体教师”，少数将大屏幕、投影仪等搬上教室。^[37]而如何利用现代信息技术去提高中学数学的教学质量，就需要深思。

在高素敏发表于教育探索的《利用现代信息技术提高中学数学教学质量》中提到将现代信息技术应用与中学数学需要将其与数学课堂进行整合，不只要整合教学内容、课堂教学方式、教学方法，还要将其与探究性活动进行整合。在文中也揭示了在教学中的应用，如利用计算机进行直观演示，让学生进行自主学习和个别化教学，通过计算机进行复习、练习、技能训练与学习反馈，并

可以求解各种问题；在这中间穿插最多的就是计算机，计算机的诞生到发展以至于普及，现在的计算机以及遍及千家万户，将这种信息技术引入课堂可以更好地进行教学。对于教师来说教师需要具备现代教育理论，掌握教育研究方法，学习现代信息技术，掌握好多媒体和网络教学的方法。^[38]

信息技术的应用下更加需要探讨新的整合方式，比如合作学习、探究学习以及研究性学习等。在张丽娟等在继续教育研究中发表的《信息技术下的合作学习在数学教学中的应用》写了信息时代已经呈现在眼前具备全球化和多样化的特点，必须具备合作意识与合作能力，借此以提出了现代信息技术的合作学习，让学生在中学学会合作，在合作中学会生存，再者培养学生的创造性思维，激发学生的主动性和积极性，让学生去主动探索，做学生的引路人。^[39]又比如王光生等发表于中国电化教育中的《信息技术环境下的数学探究学习》中的文章，在文中写出了数学探究的重要性，作为数学课程标准所提倡的学习方式，向数学课堂提供了新的活力，营造了良好的学习环境，更有利于构造教师主导学生主体，在文中阐述了数学探究的意义和重要性，数学是一门理性的学科，主要以解决问题为主，文中以“垂线”这一课时为学习举例并提出了具体过程，阐明了信息技术下的学习案例。^[40]还有骆魁敏发表于电化教育研究的《现代信息技术环境下高中数学研究性学习教学策略初探》在文中阐述了要把握好研究性学习的精神实质和内涵。^[41]还有邹森桦等在文中论述了相关的教学整合方式。还有曹一鸣、龚永菊、张小敏、田丽华、颜荣芳等分别于中学生数学实践创新能力、小学教改、教学创新、实际中的应用、数学建模创新做了相应的阐述。

还有大多数学者都会以实际例子来说明在这上面的应用，在这些文章中，也有许多的人会有许多的观点与新颖的看法。在闻杰发表于数学通报的《数学教学与现代信息技术的整合行动---动点间距离最小值的探索》，以这样一个实例表明在解决问题上要采取科学研究的一般方法，体现出现代信息技术的重要性，充分调动学生的积极性，引发学生的独立思考。^[42]在卢明发表于数学通报的《从三个实例分析信息技术在数学应用教学中的应用》，在文中提到现代信息技术的几种功能以及如何更好地应用到能够使学生身临其境，并以三个例子（气象资料中的周期现象、季节性商品销售的周期现象和电磁学中的周期性现

象)分别展开论述,以期培养学生的应用数学进行知识分析和解决问题的主动性。^[43]同样发表于数学通报的还有李渺的《利用现代信息技术实现数学教学的三个转化---以“勾股定理”课为例》,在文中将现代信息技术与数学教学象整合要实现的三个转化。^[44]另外还有骆魁敏、张金龙、李大永、张桂芳和曲玉香等均有各自的观点发表于期刊论文上。

2.3.4 网络画板在数学教学中的应用研究现状

数学教学软件的发展在我国也有一定的过程,自上个世纪90年代引入几何画板到后面的GeoGebra和网络画板。网络画板作为现阶段最为方便的、功能最为完善的以及操作最为简便的教育软件之一,在各地都受到了大力宣传并取得了良好的反馈。在此将该相关项分类为网络画板在中学数学教学中的应用和提升学生数学能力进而来了解网络画板相关的研究现状。

(1)网络画板在中学数学教学中的应用

《课程标准(2017年版)》指出,高中的数学教学过程中需要与信息技术进行深度融合,让教学的效果更为显著。2018年,教育部在《教育信息化2.0行动计划》中强调:积极推进“互联网+教育”,坚持信息技术与教育教学深度融合^[45]。王锦秋也在《网络画板在立体几何教学中的应用——以“球的表面积与体积”教学为例》中探讨了网络画板在“立体几何”课堂教学中的应用,并提出相应的教学思考。^[46]

樊甜甜在《智慧环境下“网络画板”在初中数学教学的设计与实践研究》中通过调查访谈阐明了在网络画板的教学下能够激发学生的学习兴趣,提高学生的学习效率,能够加强教师使用网络资源的能力,提高信息技术和学科教学融合的能力。^[47]

方王洋在《运用网络画板辅助二次函数的综合实践教学研究》中通过网络画板辅助的教学实践可以让抽象的函数概念直观化,提高学生对数学活动的兴趣,培养学生的直观想象能力。^[48]

李赵容在《基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究——以“函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象”教学为例》中提到教育信息化是必然发展趋势,而将信息技术和课程进行整合时必要手段。^[49]

刘正章在《网络画板辅助教学的实践与认识——以“函数 $y =$

《“ $A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象”的教学为例》中在关注学情上追求知识和内容的自然衔接,重视媒体辅助教学的合理运用,从系统的视觉整合了教学内容,培养了从特殊到一般和数形结合意识,注重教学的实效性,符合建构主义教与学理论。^[50]

张兴福在《简析网络画板在中学数学教学中的应用》中阐明在中学数学的教学中融合进入网络画板,能够将书本中的抽象的知识转变的更为直观易懂,让教学的过程能够更为生动,学生也就更能理解好知识。^[51]

刁露在《浅谈网络画板在小、中、高三阶段数学教学中的应用》中通过例题总结网络画板成为小、中、高阶段师生互动、学科融合的一个载体、一个云平台。在不断实践的过程中,网络画板对于数学教学工作的帮助也得以体现,特别是在“抽象化学习板块”网络画板的不断应用也逐渐将传统的“单向教授”模式转变为“双向学习”模式。^[52]

(2)网络画板对学生数学能力的提升

李萌在其毕业论文《基于网络画板的小学生数学抽象思维能力培养研究》中通过问卷、教学设计案例和实验设计分析并得出了应用网络画板进行教学,可以提升学生的数学抽象思维能力,最后在此基础上提出提升学生数学抽象思维能力的策略。^[53]

李赵容在《基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究——以“函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象”教学为例》中通过实验教学设计得出了网络画板可以提升高中生的直观表达和数形结合能力,培养高中生的数学直观想象素养。^[49]

杜佳佳在《应用网络画板培养小学生几何直观能力的教学策略研究》中通过实验班和对照班对小学生几何直观能力进行测试,再通过访谈验证网络画板培养小学生的几何直观能力教学策略的可行性和有效性。^[54]

通过以上对“网络画板”的文献梳理,可以看出目前为止,对网络画板在教学中的研究较少。大致有在教学中的应用以及提高学生数学能力的研究,还有极少数对提高教师能力的论文。发现在通过“网络画板”作用下可以将教学中的知识直观化,复杂过程具体化,通过动态设计可以展示动态的教学过程等等。网络画板在小学和初中的研究比较多,而在高中的研究中只有一两个,因此将网络画板应用与高中教学的研究是比较有研究意义的。

2.3.5 课例研究的现状

通过中国知网（CNKI），以“数学课例研究”为主题，检索到截至 2022 年 12 月有关数学课例研究的相关内容如下图所示。数学课例研究从 2002 年开始就有相关记录，在已有的研究文献中涉及课例研究的理论研究和实践研究。

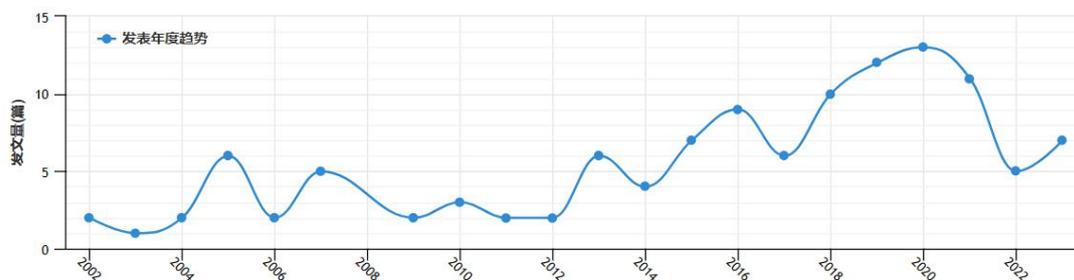


图 2-3-3 课例研究的文献总体趋势

(1) 课例研究的理论发展

“课例研究”源自日本，最初是作为日本明治时代的一种教育实践发展而来的，自上个世纪六十年代开始，日本的中小学就开始把课例研究作为“校本培训”，至九十年代，课例研究成为世界各国推崇和效仿的对象。^[55]随着第八次基础教育课程改革的实施被引入我国，而在此之前我国有些教研活动也可以被认作早期的课例研究。在王贺欣《我国课例研究实施现状与对策研究——以 H 市 G 小学为例》中就以 2001 年第八次基础教育课程改革为时间节点将我国的课例研究的发展历程划分为萌芽期和发展期两个时期。^[56]

在我国的中小学教育中最先是由顾泠沅教授所提倡的“三个课型两次研讨反思”的基本模式，这一模式是以课例为载体，在教学行动中开展的教师教育，即“行动教育”。^[57]如图 2-3-3 所示，在这个模式下强调合作，教师通过三个阶段进行课例研究主题的设计和再设计进而去改进教学。课例研究的类型会根据研究的规模、研究的主要来源以及观课的人员不同也会有不同的分类。

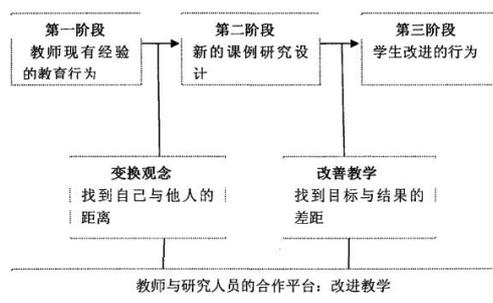


图 2-3-4 “三阶段两反思”模式

在 2002 年发布的《教育部关于积极推进中小学评价与考试制度改革的通知》^[58]就提出了教师教学要建立在以学校为本，教研为基础，积极鼓励教师来参与到教学的改革的过程中来，在这个过程中来提出新的娇艳的课题。随着一系列的文件发布到 2018 年的《中共中央国务院关于全面深化新时代教师队伍建设改革的意见》^[59]和《教师教育振兴行动计划（2018-2022 年）》^[60]，对于校本教研在我国的中小学基本上被固定在学校的教研活动中，而课例研究就作为这样的一种形式在我国的中小学的教研活动中获得了极为广泛的应用。

在理论发展方面大多数研究者都会研究日本课例研究与我国的对比以及香港课例研究与内地的对比。在日本课例研究中则是以课堂教学为研究单位，包括疑问、计划、行动、观察和反思五大步骤。在杨晓发布的《中日中小学课例研究的比较研究》中就深入浅出地以中日中小学课例研究为研究对象找到对应的具有显著差异的研究特点：我国课堂教学技能上的“示范”与教育教学成果的展示日本中小学课例研究则依据课堂上发生的教学真实情况，更多的是为了发现教育中真正存在的问题。^[61]

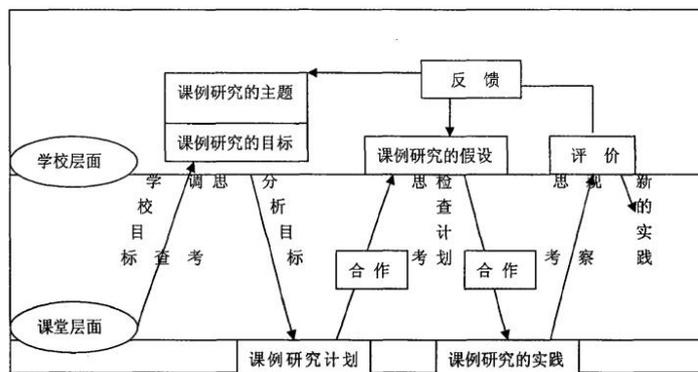


图 2-3-5 日本课例研究的结构图

课例研究在被推向世界也呈现出多样的发展方向，应教育改革之需求，以“变易理论”为核心的在香港地区所出现的一种课堂的学习研究与中国内地教研活动，由于内地和香港的教育管理的不同，使得发展的态势也具有差异性。在黎雪梅的《日、美和香港地区课例研究特征及启示》展示了香港课例研究^[62]，其过程分为七步，如下图所示。

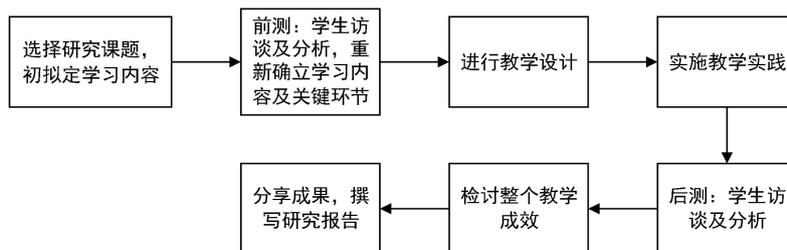


图 2-3-6 香港课例研究过程

(2) 课例研究的实践研究

赵学静在《基于“课例研究”的数学学科 教学内容知识（MPCK）的研究与实践》中通过开展课例研究得到了对于数学学科的教学内容知识主要来源于多种途径，而对于课例研究来说能极大地促进教师的专业性发展。^[63]

摆超在《数学史融入小学“圆”单元教学 的课例研究》通过开展 HPM 视角下“圆”单元教学的课例研究，围绕三个问题展开课例研究。^[64]

朱风伦在《小学方程教学中思想方法指导及课例研究》中选取小学方程教学中三个具有代表性的课例开展课例研究。^[65]

2.4 已有研究对本研究的启示

2.4.1 内容上的启示

通过对文献进行梳理，每位作者都有各自的理解。通过对直观想象素养的内容的文章进行分析，知道了其发展过程以及通过对文章内容的分析了解到直观想象素养的现状、策略研究以及发展等。通过对现代信息技术类文章的阅读，发现在现代信息技术方面的研究是非常多的，同时贴近直观想象素养的文章也不在少数。在对网络画板相关类文献进行分析的时候，可以发现在这方面的研究还不算多，特别是高中的探究更为之少。所以本研究就是通过课例探究，以相关理论为理论指导，借助网络画板培养学生的直观想象素养，为一线教师提供可以借鉴的意见。

2.4.2 方法上的启示

鉴于《课程标准（2017年版）》的标准和权威性，通过对《课程标准（2017年版）》的阅读，可以发现在这其中对此素养的水平进行划分。文中则是以遵义市某高中高一学生的直观想象素养水平现状的调查，并在分析后找出其中影响的原因，并为后续所要展开的实践探究提供一定的依据。

《课程标准（2017年版）》中把直观想象素养划分为三个数学学业质量水平，每一个水平对应有四个方面：水平一是在日常生活中运用图形直观沟通，这是中学毕业后应达到的；水平二是在与学生进行交流时，可以用自己的直觉和想象力来讨论数学问题，这是高考的要求，也是命题的基础。水平三是在相互沟通的时候，可以运用自己的直觉想象力，探索一个问题的性质，以及它和数学之间的关系。^[66]在阅读相关参考文献将学生素养水平未达到水平一的学生，认为其素养水平不满足高中毕业应当达到的要求则定义为水平零，如下表所示：

表 2-4-1 直观想象素养水平划分

| 水平 | 直观想象素养 |
|-----|---|
| 水平零 | ① 情境与问题：不能在熟悉的情境中抽象出实物的几何图形，建立简单图形与实物之间的联系。 ② 知识与技能：不能对简单图形的位置关系和度量关系进行描述；不能借助图形的性质和变换（平移、对称、旋转）发现数学规律。 ③ 思维与表达：不能通过图形直观认识数学问题；不能够用图形描述和表达熟悉的数学问题、启迪解决这些问题的思路，体会数形结合。 ④ 交流与反思：不能在日常生活中利用图形直观进行交流。 |
| 水平一 | ① 情境与问题：能够在熟悉的情境中，抽象出实物的几何图形，建立简单图形与实物之间的联系；体会图形与图形、图形与数量的关系。 ② 知识与技能：能够在熟悉的数学情境中，借助图形的性质和变换（平移、对称、旋转）发现数学规律；能够描述简单图形的位置关系和度量关系及其特有性质。 ③ 思维与表达：能够通过图形直观认识数学问题；能够用图形描述和表达熟悉的数学问题、启迪解决这些问题的思路，体会数形结合。 ④ 交流与反思：能够在日常生活中利用图形直观进行交流。 |
| 水平二 | ① 情境与问题：能够在关联的情境中，想象并构建相应的几何图形；能够借助图形提出数学问题，发现图形与图形、图形与数量的关系，探索图形的运动规律。 ② 知识与技能：能够掌握研究图形与图形、图形与数量之间关系的基本方法，能够借助图形性质探索数学规律，解决实际问题或数学问题。 ③ 思维与表达：能够通过直观想象提出数学问题；能够用图形探索解决问题的思路；能够形成数形结合的思想，体会几何直观的作用和意义。 ④ 交流与反思：在交流的过程中，能够利用直观想象探讨数学问题。 |
| 水平三 | ① 情境与问题：能够在综合的情境中，借助图形，通过直观想象提出数学问题。 ② 知识与技能：能够综合利用图形与图形、图形与数量的关系，理解数学各分支之间的联系；能够借助直观想象建立数学与其他学科的联系，并形成理论体系的直观模型。 ③ 思维与表达：能够通过想象对复杂的数学问题进行直观表达，反映数学问题的本质，形成解决问题的思路。 ④ 交流与反思：在交流的过程中，能够利用直观想象探讨问题的本质及其与数学的联系。 |

3 研究设计

3.1 研究目的

以“三教”理论为理论指导，借助网络画板，将学生们直观想象素养的现状以及与之对应的教学内容相联系起来，对教学的内容进行了分析。在进行了真正的教学之后，还会将学生的学习经验与自己的学习经历相联系起来，以此来对学生们的学习状况进行一次探讨，以此来培养和发展学生们的直观想象素养。

3.2 研究对象

研究对象为拥有 80 多年历史的 ZY 市某中学高一年级全体学生，共有 7 个班，并在高一上进行选科，高一下分班，分有物理方向 5 个班，历史方向 2 个班。

3.3 研究内容

(1) 直观想象素养

《课程标准 2017 年版》中提到，“直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形理解和解决数学问题的素养。”^[1]从直观想象能力到直观想象素养，数学教育在对培养学生素养方面的要求越来越严谨、严格。本文主要从以下几个方面对直观想象素养进行研究：

- 1) 直观想象素养的历史演进；
- 2) 直观想象素养的研究综述；
- 3) 直观想象素养的水平划分。

(2) 高中生直观想象素养水平现状调查研究

1) 学生直观想象素养水平现状调查

在这个过程中主要是从学生和老师两个方向来开始，在学生的层面上主要是通过直观想象素养测试卷和调查问卷的方式来进行分析 and 总结，在教师层面主要是从对教师进行单独访谈的形式来了解教师在教学过程的相对应的一些情况。

2) 数据分析和调查结果

数据的分析采用 SPSS, 作为世界著名的统计分析软件之一, 其最突出的特点就是操作界面极为简单易懂。^[67]通过 SPSS、EXCEL 对问卷所得的数据进行分析, 获得遵义市某中学学生直观想象素养水平现状, 对教师在教学和学生在学习过程中, 造成这一水平现状的原因进行分析。

3) 学生直观想象素养水平的现状

①影响学生直观想象素养水平现状的因素

②在今后教学中的注意事项

(3) 网络画板

网络画板作为一种继几何画板、超级画板后的新兴技术, 展现出了更为丰富的一面, 能够将数学和信息技术更好的融合在一起, 不仅提升了教学质量还能够促进数学教学的多元发展, 同时作为一个开放实时操作的网站, 还能将各种的教学资源进行分享与传播, 进而促进教师的教学方法的更新, 促进学生在学习态度的转变。在文中主要从以下几个方面对网络画板进行研究:

① 网络画板在中学数学教学中的应用

② 网络画板对学生直观想象素养的提升

(4) 课例研究

教师作为教育情境的参与者单独或者共同进行对网络画板培养高中生直观想象素养的培养的实践的理性认识, 激发学生学习的兴趣。本文主要从以下几个方面对课例研究进行研究:

① 通过文献阅读对课例研究进行研究综述;

② 通过教学实践, 对课堂教学进行课例研究;

③ 通过课例研究, 分析网络画板的的教学能否对学生直观想象素养的培养起到促进作用

3.4 研究方法

(1) 文献法

通过查阅国内外有关现代信息技术与数学教学和直观想象素养等相关文献, 梳理、分析这些学习相关知识, 从现有的研究成果中归纳出与这一部分研究有关的内容, 确定与此研究相关的核心概念。

(2) 问卷调查法

该问卷以学生为对象, 参照相关的文献, 制定了一份符合学生实际情况的直观想象素养的测验试卷和问卷, 在编制完成后由导师进行监督修改并对学生直观想象素养作出简单的评价。为接下来的教学过程提供相应的解决方案。

(4) 访谈法

在问卷调查的基础上，针对教师（抽取两位教师）进行访谈，对教师的访谈主要从教师自身对直观想象素养的理解、授课形式、学生直观想象素养水平现状以及在平时的教学过程中是否将这种素养融入到课堂等几方面了解基本情况，分析影响学生直观想象素养的主要影响因素。

(5) 课例研究法

在网络画板基础下，在此基础上，根据学生的直观想象素养的现状，设计了课堂教学流程，并在此基础上进行了实践。然后，根据学生在学习过程中的特点来设计教学方案，通过对教学过程的分析，可以综合地认识到学生在课堂上遇到的问题和困惑，并在此基础上对问题进行分析，从而提高教学的合理性，进而达到培养学生的直观想象素养。

综合以上的四种研究方法，文献法是基础，课例研究是本研究最为关键的部分。所以在本研究中首先是通过文献的梳理和分析，参照裴娣娜的《教育研究方法导论》编制出适合学生直观想象素养水平划分的测试卷以及调查问卷，在这个过程中要考虑问卷中问题的范围、内容、数量、文字表达和隐含的心理因素等，并且也制定合理规范的教师访谈问卷，即进行口头形式的研究型交谈；二是对问卷调查和试卷的进行分析，分析学生直观想象素养现状问题，了解学生的基本学习情况，从学生在课堂上的表现看，学生对直观想象知识的了解程度如何，学生学习相关知识后，直观想象在解决问题中的运用情况如何；三是通过对教师的访谈，了解教师自身对直观想象素养的理解、授课形式、学生直观想象素养水平现状以及在平时的教学过程中是否将这种素养融入到课堂等几方面了解基本情况，分析影响学生直观想象素养的主要影响因素。^[68]

3.5 研究思路

全文以直观想象素养作为研究的起始点，通过知网对相关文献和资料的查询，明确了解到直观想象素养在学生高中阶段的地位，并指定文中需要研究的问题，确定方法及技术路线，并通过对数据的整理得到相关结论。本文具体研究思路如下图所示：

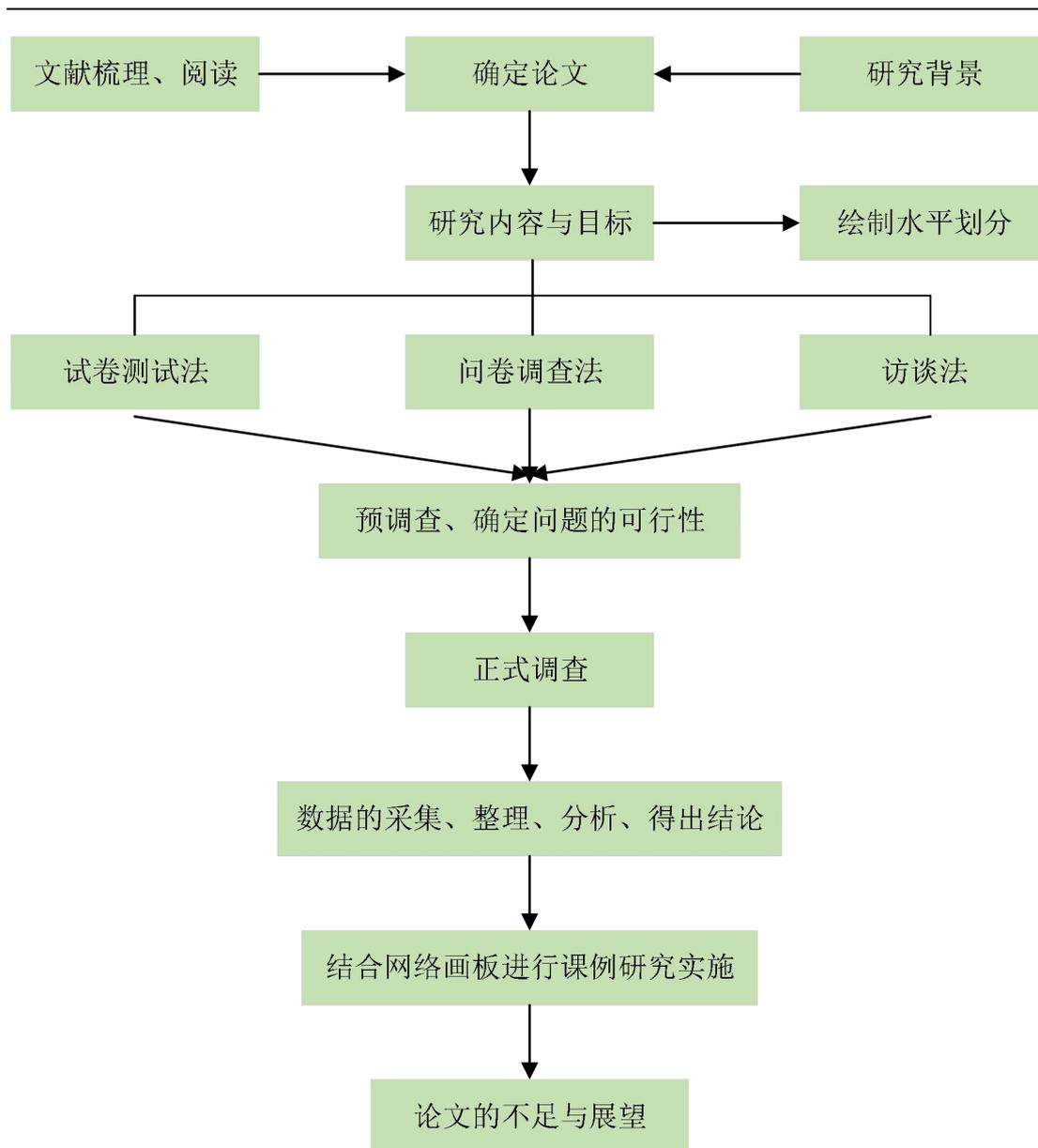


图 3-5-1 研究思路示意图

4 ZY 市某中学高一学生直观想象素养现状调查

4.1 高一学生直观想象素养试卷测试

4.1.1 测试目的

了解现阶段高一学生的直观想象素养的水平现状。

4.1.2 测试对象

测试对象为拥有 80 多年历史的 ZY 市某中学高一年级 7 个班的学生。学校高一年级共有 7 个班，并在高一上进行选科，高一下分班，分有物理方向 5 个班，历史方向 2 个班。

4.1.3 测试卷的编制

此测试卷是在对《课程标准（2017 年版）》及普通高中数学人教 B 版教材中的相关内容进行了详细的研读和充分的准备后，并在充分征求专家意见后，依据研究的目的所编制而成的。测试卷的正式实施需要先经过预测试，通过对预测试的分析再修改得到正式测试卷并进入正式的实施。本套测试卷主要包含需要学生填写的学生的基本信息以及学生需要进行完成的试题两个部分。基本信息会考虑到学生的隐私性，所以只用作性别和方向上的差异性分析，试题方面共包含有五个主观题。

（1）测试卷题目选择依据

设计测试题的内容考虑到高一学生已经学习过的内容，参照以下三个层面来完成：

在内容层面。试题的内容尽量与《函数与应用》、《统计与概率》、《向量与几何》等课程相结合，以最大限度地体现出学生的直观想象素养；

从结构层面来看。《课程标准(2017 年版)》指出，“直观想象”指的是通过几何和空间想象力来感知物体的形状和变化，而在考试中，它需要包括空间想象、几何直观等多种表达方式。

从过程的层面出发。按照问题的难度来设计问题，相应的水平就会出相应的问题，例如，水平一的问题相对容易一些，有了一定的直观想象素养以后，

再用教科书上的基础知识来解答。水平二的问题属于中等难度，需要同学们在水平一的基础上，运用已有的知识、结论来解决问题。水平三对应的问题难度更大，需要根据水平二为基础，得出一般性的结论，才能解题。

(2) 直观想象测试题编制及分数

数学题的解决主要在于学生的解题思路，学生能否解决问题，能否将问题内容进行翻译，则是极为重要的，影响直观想象素养测试卷的因素有学生的基础知识、过程、计算等诸多因素。如下所示，以第 4 题为例，其余题详细划分见附录 1。

第 4 题：已知向量 $\vec{m} = (\sqrt{3} \cos wx, 1)$, $\vec{n} = (\sin wx, \cos^2 wx - \frac{1}{2})$ ($w > 0$)，函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$ ，其最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 。(25 分) (若无法作答，请简要阐明理由)

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 将函数的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后，再将得到的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变)，得到 $y = g(x)$ ，求出 $y = g(x)$ 的单调递增区间，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，求出函数 $y = g(x)$ 的值域;

(3) 做出 $y = g(x)$ 在一个周期内的函数图象.

答案：(1) 首先根据向量的数量积公式，结合三角恒等变换，化简函数并求出角速度。

$$\text{向量 } \vec{m} = (\sqrt{3} \cos wx, 1), \vec{n} = (\sin wx, \cos^2 wx - \frac{1}{2}) (w > 0),$$

$$\text{且函数 } f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n},$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \cos wx \sin wx + \cos^2 wx - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2wx + \frac{\cos 2wx + 1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2wx + \frac{1}{2} \cos 2wx \\ &= \sin(2wx + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

又因为函数 $y = f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $T = \frac{2\pi}{2w} = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $w = 2$ ，

所以 $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{6})$ 。

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后得到 $y = \sin(4x - \frac{\pi}{3})$ ，

再将所得图象上所有的点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）得到 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，

所以 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

依据正弦函数的单调递增区间，令 $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为： $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $-\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ 得到函数 $g(x)$ 的值域为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$.

(3) 如图所示一个周期的函数图象

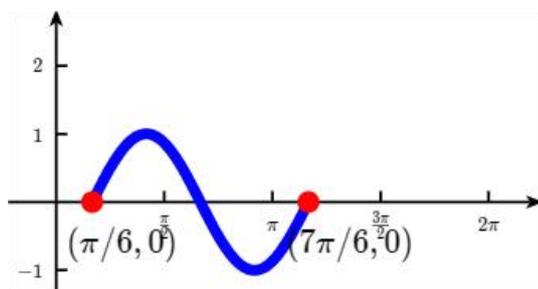


图 4-1-1

表 4-1-1 第 4 题评分标准

| 考察知识与目标 | 评分标准 |
|--|---|
| 第一小问考查学生能正确对向量的数量积的计算与三角恒等变换的运用，学生能够通过数到形，正确计算出对应的函数，则认为达到水平一的要求 | 0: 完全错误或者空白（水平零） 5: 正确计算得到函数（水平一） |
| 第二小问考查学生能在熟悉的情境中对函数图象的伸缩平移变换发现数学规律，学生能正确进行变换则达到水平一； 学生能够借助标准正弦函数图象求解得到递增区间和对应值域，利用图象理解、分析和解决问题，学生解题过程基本完整，结论正确，则认为学生达到水平二 | 0: 完全错误或者空白（水平零） 4: 得到平移后的函数（水平一） 4: 得到伸缩后的函数（水平一） 2: 得到递增区间（水平二） 3: 得到 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $g(x)$ 的值域（水平二） |
| 第三小问考察学生将函数问题进行进行几何直观，画出函数图象，若学生能正确画出则认为学生达到水平二的要求 | 0: 完全错误或者空白（水平零） 3: 描述出对应五点（水平一） 4: 正确画出相应的函数图象（水平二） |

(3) 测试卷分数与学生直观想象素养水平对应关系

在测试卷中总共 5 道主观题，第 1 题和第 2 题中只有 1 个小问题，第 3 题有 2 个小问题，第 4、5 题各有 3 个小问题。在第一道题中，总分是 13 分，若学生能答对，就表示他们能从自己熟知的环境中，将实物的几何图形进行抽象，

并将其与实物的简单关系建立起来，学生在水平一，反之，则为水平零。在第 2 题中，水平一所占的分数为 17 分，第 3 题中，水平二所占的分数为 11 分，水平三所占的分数为 9 分，第 4 题中，水平一所占的分数为 16 分，水平二所占的分数为 12 分，第 5 题中，水平一所占的分数为 4 分，水平二所占的分数为 10 分，水平三所占的分数为 10 分。综合上述各水平的分数，得到直观想象素养测试卷分数及对于水平如下表 4-1-2

表 4-1-2 直观想象素养试卷分数及对应水平

| 水平 | 水平零 | 水平一 | 水平二 | 水平三 |
|----|---------|-------|-------|--------|
| 分数 | 10 分及以下 | 11-50 | 51-80 | 81-100 |

4.1.4 测试过程

(1) 预测试

此次预测试过程于 2023 年 6 月 13 日开展，针对 ZY 市一所高中的某一年级进行测验，以检验该测试卷的信度与效度。考试结束后，37 张试卷被收回。随后，经过批改并将数据录入软件后运用 SPSS 软件对其进行了信效度分析。

1) 信度分析

用 Cronbach's Alpha (α 系数) 检验数据，如果 Cronbach's Alpha 系数超过 0.6，则表明该测验的信度达到了标准。从下面的表格中可以看出，Cronbach's Alpha 的系数是 0.850>0.6，这份测验的信度是合格的。

表 4-1-3 测试卷预调查案例处理汇总

| | | N | % |
|----|-------|----|-------|
| 案例 | 有效 | 37 | 100.0 |
| | 已排除 a | 0 | 0 |
| | 总计 | 37 | 100.0 |

a.在此程序中基于所有变量的列表方式删除

表 4-1-4 测试卷预调查可靠性统计量

| Cronbach' Alpha | 基于标准化项的 Cronbach' Alpha | 项数 |
|-----------------|-------------------------|----|
| .850 | .878 | 10 |

2) 效度分析

在进行对效度的检验过程中所使用的方法则是采用目前较为权威的因子分析法，通过对得出的数据进行分析 KMO 指标 0.7 就说明测试卷效度是可行的，超过 0.8 就说明测试卷效度很高，Bartlett 的 P 值低于显著性水平 0.05，说明该测试卷的效度较高。由下面的表格可以看出 KMO 的指标为 0.751>0.7，Bartlett

球形检验的 $P=0.001 < 0.05$ ，说明该试卷效度较好，能够适用于研究。

表 4-1-5 问卷预调查 KMO 和 Bartlett 的检验

| | | |
|-----------------------------|------|---------|
| 取样足够的 Kaiser-Meyer-Olkin 度量 | | .751 |
| Bartlett 的球形度检验 | 近似卡方 | 190.418 |
| | df | 45 |
| | Sig. | <.001 |

(2) 正式调查

2023 年 6 月 15 日，在对预测试卷进行分析完成后，对该校高一年级的余下 6 个班发放测试卷，测试时间为 40 分钟，为防止学生做题不认真，便邀请学科教师一起进行监督，以确保测试卷的作用得到发挥。此次正式测试发放的试卷为 200 份，收回试卷 194 份，回收率为 97%，鉴于预测试卷的信效度较好，因此同时也将预测试卷纳入正式测试中，共 231 份。测试卷统计情况见下表所示：

表 4-1-6 测试卷统计情况

| 选科 | 班级 | 男生 | 女生 | 合计 |
|------|--------|----|-----|-----|
| 物理方向 | 高一（1）班 | 19 | 18 | 37 |
| | 高一（2）班 | 16 | 22 | 38 |
| | 高一（3）班 | 15 | 23 | 38 |
| | 高一（4）班 | 13 | 17 | 30 |
| | 高一（5）班 | 11 | 17 | 28 |
| 历史方向 | 高一（6）班 | 14 | 19 | 33 |
| | 高一（7）班 | 8 | 19 | 27 |
| 合计 | | 96 | 135 | 231 |

1) 信度检验

用 Cronbach's Alpha (α 系数) 检验数据，如果 Cronbach's Alpha 系数超过 0.6，则表明该测验的信度达到了标准。从下面的表格中可以看出，Cronbach's Alpha 的系数是 $0.874 > 0.6$ ，这份测验的信度是合格的。

表 4-1-7 问卷案例处理汇总

| | | N | % |
|----|-------|-----|-------|
| 案例 | 有效 | 231 | 100.0 |
| | 已排除 a | 0 | 0 |
| | 总计 | 231 | 100.0 |

a.在此程序中基于所有变量的列表方式删除

表 4-1-8 问卷可靠性统计量

| Cronbach' Alpha | 基于标准化项的 Cronbach' Alpha | 项数 |
|-----------------|-------------------------|----|
| .874 | .891 | 15 |

2) 效度分析

由表可知 KMO 指标为 $0.818 > 0.8$ ，Bartlett 球形检验的 P 值 $0.001 < 0.05$ ，因此该测试卷效度较好，可以用于研究。

表 4-1-9 问卷 KMO 和 Bartlett 的检验

| | | |
|-----------------------------|------|----------|
| 取样足够的 Kaiser-Meyer-Olkin 度量 | | .818 |
| Bartlett 的球形度检验 | 近似卡方 | 1320.449 |
| | df | 45 |
| | Sig. | <.001 |

4.1.5 测试结果分析

(1) 总体情况分析

对收回的测试卷按照预定的评分标准进行批改，利用 Excel 表格对分数进行统计，得到直观想象素养的平均值为 50.13，依据水平进行划分可以看出高一学生的直观想象素养的水平整体上属于水平二的较低阶段，但从人数分析得出处于水平一及以下的人数仍然接近一半。

通过水平划分将高一学生的人数和占比统计如下表：

表 4-1-10 高一学生直观想象素养各水平人数与占比

| 水平 | 分数段 | 人数 | 百分比 |
|-----|----------|-----|-------|
| 水平零 | 0-10 分 | 10 | 4.3% |
| 水平一 | 11-50 分 | 103 | 44.6% |
| 水平二 | 51-80 分 | 109 | 47.2% |
| 水平三 | 81-100 分 | 9 | 3.9% |
| 总和 | | 231 | 100% |

通过对上表的分析可得，所调查的学生直观想象素养水平二占比最高（47.2%），说明还是有相当一部分学生能够对题目进行较好的翻译，并且对相关联的知识进行联系，进而找出解决方案；其次是直观想象素养水平一的学生（44.6%），这部分学生能够在熟悉的情境中，抽象出实物的几何图形，建立简单图形与实物之间的联系；只有 3.9% 的学生达到了水平三，这部分学生能够综合利用图形与图形、图形与数量的关系，理解数学各分支之间的联系，能够通过想象对复杂的数学问题进行直观表达，反映数学问题的本质，形成解决问题的思路。

(2) 各题情况分析

1) 第 1 题结果分析

第 1 题主要考察学生根据物体特征抽象出几何图形这一表现, 学生基本上都能找到明显的图形, 这说明学生经过前期的学习, 在图形的认知这一方面具有一定的基础, 能根据生活中的物体特征抽象出简单的几何图形, 通过水平分析可以看出基本上所有学生都能答出部分答案; 通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 67.1% 的学生基本上可以得到 12 分, 说明大多数学生都可以看到几种常见图形, 如: 正方形、长方形、三角形、梯形等, (图 4-1-2), 而对于五边形、圆弧、曲线等这些就没有特别注意了。通过结合学生的作答情况及学生的访谈发现, 得到以下原因, 学生往往凭借第一眼的感觉去直接作答, 而曲线或圆弧这样的图形, 学生看到了却并没有作答, 他们表示不认可曲线或圆弧作为平面图形, 还有则是组合图形无法看出, 还有极少数同学写出了立体几何图形。

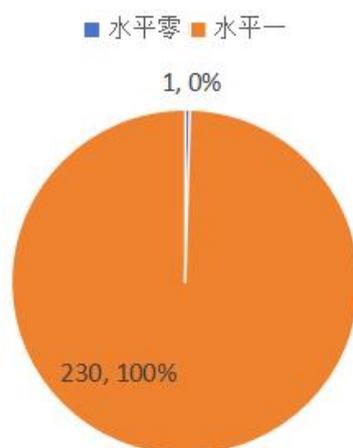


图 4-1-2 第 1 题水平分布



图 4-1-3 第 1 题部分答题情况

2) 第 2 题结果分析

第 2 题主要考察学生能够在熟悉的数学情境中, 借助图形的性质和变换(平移、对称、旋转)发现数学规律, 学生基本上能画出部分的旋转图。通过

水平分析可以看出基本上所有学生都能答出部分答案；通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 67.9% 的学生基本上可以得到 9 分及以上，说明这部分学生能画对三个及以上图形，（图 4-1-4），而对于其中部分复杂的图形有些学生无法完全画对或者有些学生不能画出旋转图。通过结合学生的作答情况及学生的访谈发现，得到以下原因，学生会挑选简单的旋转体进行绘制，而对于复杂的无法进行描述学生表示里面的虚线很难想象，说明部分学生的空间想象能力还稍有欠缺。

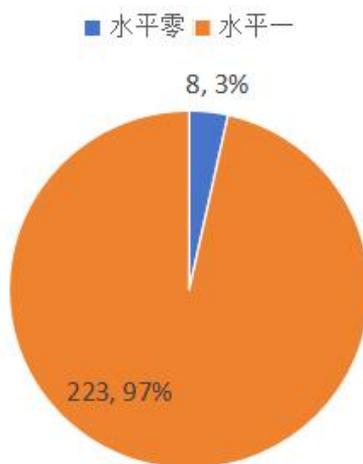


图 4-1-4 第 2 题水平分布

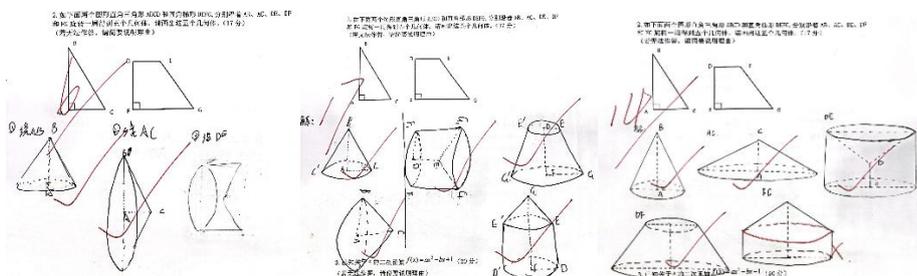


图 4-1-5 第 2 题部分答题情况

3) 第三题结果分析

第三题第一小问主要考察学生将函数问题进行几何直观，利用图形理解、分析和解决问题的能力，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 46.8% 的学生基本上可以得到 4 分及以上，主要是由于学生能找到其中代数 a 与 b 的关系，却忽略了选择数字时的局限性，单纯从不等式的关系就进行 a 与 b 值的确认。第三题第二小问主要考察学生能够通过数形结合得出相应的区域，计算出交点坐标，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 22.8% 的学生基本上可以得到 6 分及以上，这部分学生将图象区域画出，但并未真正找到目标区域面积。结合学生

的做题情况及后期访谈了解到绝大多数学生表示这道题难度过于高，还有极少数学生表示看不懂，主要原因可能有学生进行数形结合的能力不足，学生无法通过单纯的函数联想到通过画图进行直观表示，表明学生的直观想象素养稍有欠缺。

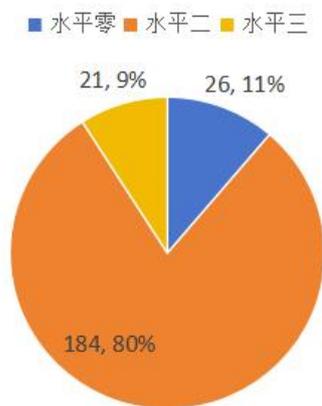


图 4-1-6 第 3 题水平分布

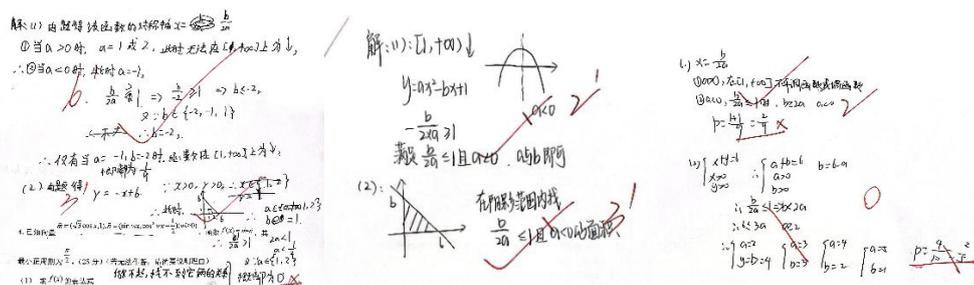


图 4-1-7 第 3 题部分答题情况

4) 第四题结果分析

第四题第一小问考察考查学生能正确对向量的数量积的计算与三角恒等变换的运用，学生能够通过数到形，正确计算出对应的函数，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 69.7% 的学生基本上可以得到满分；第四题第二小问学生能在熟悉的情境中对函数图象的伸缩平移变换发现数学规律，学生能够在借助标准正弦函数图象求解得到递增区间和对应值域，利用图象理解、分析和解决问题，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 36.8% 的学生基本上可以得到 8 分及以上；第三小问主要考察学生将函数问题进行进行几何直观，画出函数图象，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 36.4% 的学生基本上可以得到 4 分及以上，主要是由于前面第二小问没有正确求解的人数过于少，加之学生在进行函数图象的绘制的过程中不习惯进行先画出五点表格。通过后期对学生的访谈可以知

道学生认为这一题有一定的难度，学生对图象的伸缩变换掌握情况还不够完备，分析有可能是学生们对这部分的知识基础稍有欠缺。

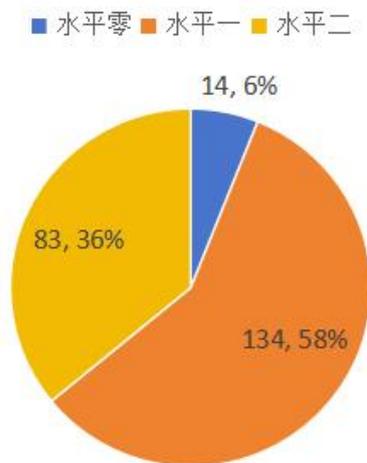


图 4-1-8 第 4 题水平分布

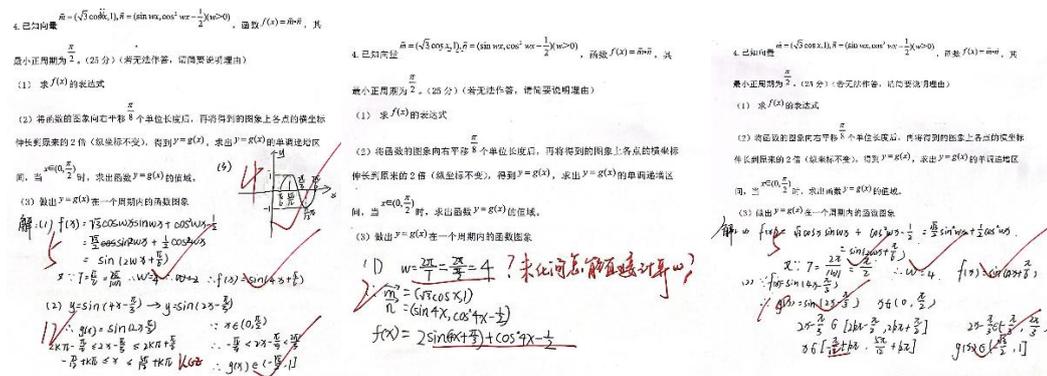


图 4-1-9 第 4 题部分答题情况

5) 第五题结果分析

第五题第一小问考察三视图，主要考察学生体会图形与图形、图形与数量的关系。能够描述简单图形的位置关系和度量关系及其特有性质，学生基本上能画出部分的该三视图，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 72.3% 的学生基本上可以得到 4 分，而只有 23.4% 的学生能得第一小问满分，而有一半多的学生没有进行标注尺寸；第五题第二小问立体图形体积计算，主要考察学生能够通过想象对复杂的数学问题进行直观表达，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 48.1% 的学生基本上可以得到 4 分，而只有 23.8% 的学生能得第一小问满分，少数学生能够找到三棱锥的长宽高以及计算完整，说明学生的直观想象能力还稍有欠缺；第三小问主要考察学生能够在关联的情境中，想象并构建相应的几何图形，通过 SPSS 统计分布频率图可以得出有 72.1% 的学生基本上可以得

到 4 分及以上，这一题并没有太大的难度，绝大部分学生都能找到中介平行线进行转化。通过后期对学生的访谈可以知道学生普遍认为这一大题没有什么难度，部分学生反应除了第一小问其他的有些无从下笔，学生说第二小问的三棱锥是倒过来的，做题的时候一时没有反应过来，以至于没做对，这也表明了学生的直观想象素养还有待提高。

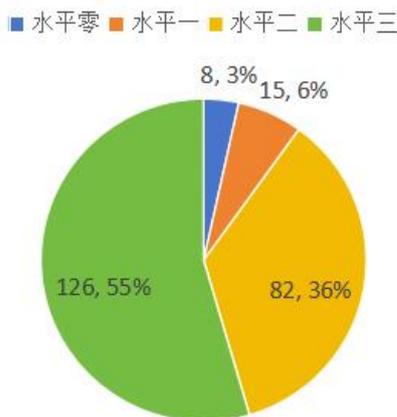


图 4-1-10 第 5 题水平分布

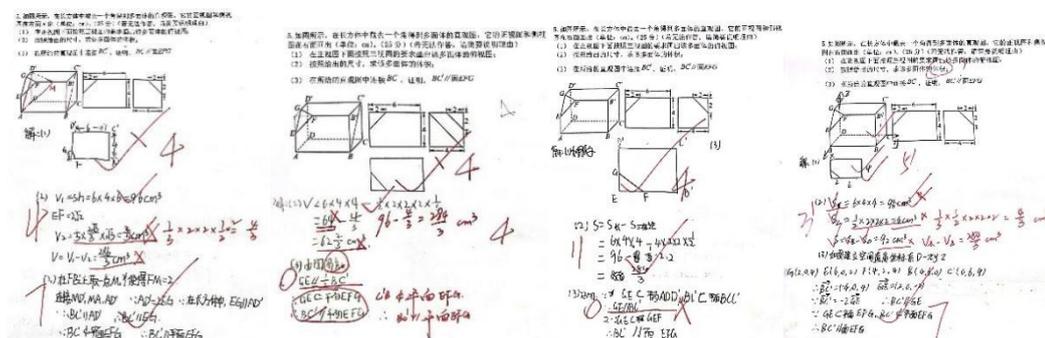


图 4-1-11 第 5 题部分答题情况

(3) 方向差异分析

表 4-1-11 直观想象素养组统计量

| | 选科方向 | N | 均值 | 标准差 | 均值的标准误差 |
|----------|------|-----|-------|--------|---------|
| 直观想象素养成绩 | 物理方向 | 171 | 50.41 | 19.298 | 1.476 |
| | 历史方向 | 60 | 50.30 | 17.066 | 2.203 |

通过对表 4-1-11 中均值的比较，得到选科方向不同，物理方向的学生直观想象素养成绩较物理方向学生的成绩要较好一些。通过表 4-1-12 可以看出，在方差方程的 Levene 检验中显著性为 $1.717 > 0.05$ ，说明两组样本的方差具有齐次性，因此使用第一行的数据，而显著性（双尾）为 $0.966 > 0.05$ ，说明物理方向的直观想象素养成绩和历史的直观想象素养成绩并没有显著性差异。

表 4-1-12 直观想象素养独立样本检验

| | 方差方程的 Levene 检验 | | 均值方程的 t 检验 | | | | | | |
|--------|-----------------|------|------------|---------|-----------|------|-------|--------------|-------|
| | F | Sig. | t | df | Sig. (双尾) | 均值差值 | 标准误差值 | 差分的 95% 置信区间 | |
| | | | | | | | | 下限 | 上限 |
| 假设方差相等 | 1.717 | .191 | .043 | 229 | .966 | .121 | 2.813 | -5.422 | 5.664 |
| 假设方差不等 | | | .046 | 115.731 | .964 | .121 | 2.652 | -5.131 | 5.374 |

(4) 性别差异分析

通过对表 4-1-13 中进行比较其均值，得到了在直观想象素养方面的成绩，男生要高于女生。由下表 4-1-14 可以得出显著性为 $0.839 > 0.05$ ，说明两组样本的方差具有齐次性，故采用第一行的数据，而显著性（双尾）为 $0.206 > 0.05$ ，说明男女生的直观想象素养差异性不显著。

表 4-1-13 直观想象素养组统计量

| | 性别 | N | 均值 | 标准差 | 均值的标准误差 |
|------|----|-----|-------|--------|---------|
| 直观想象 | 男 | 96 | 52.24 | 19.410 | 1.981 |
| 素养成绩 | 女 | 135 | 49.07 | 18.150 | 1.562 |

表 4-1-14 直观想象素养独立样本检验

| | 方差方程的 Levene 检验 | | 均值方程的 t 检验 | | | | | | |
|--------|-----------------|------|------------|---------|-----------|-------|-------|--------------|-------|
| | F | Sig. | t | df | Sig. (双尾) | 均值差值 | 标准误差值 | 差分的 95% 置信区间 | |
| | | | | | | | | 下限 | 上限 |
| 假设方差相等 | .042 | .837 | 1.269 | 229 | .206 | 3.166 | 2.494 | -1.749 | 8.080 |
| 假设方差不等 | | | 1.255 | 196.114 | .211 | 3.166 | 2.523 | -1.810 | 8.141 |

4.2 高一学生直观想象素养问卷调查

4.2.1 调查目的

通过调查问卷了解高一学生数学学习态度，其主要的调查内容为：学生对于数学知识的兴趣、课后是否会再次学习数学；学生对直观想象素养的态度，主要包括对其的喜欢程度、直观想象是否有助于提高成绩、自身的直观想象如何；了解学生对直观想象素养的了解，主要包括图形或图象能否与直观想象相关联、是否能够通过图形图像提升直观想象素养；学生对教学辅助软件的了解程度，主要包括对主流教学辅助软件的认识，如 GeoGebra、网络画板等的认识；五是学

生对直观想象素养各方面的表现，如老师教学时是否经常使用教学软件、教学辅助软件能否让内容更为直观、使用教学辅助软件能否提高自身直观想象素养水平；学生对老师培养直观想象素养的看法，认为对老师讲解的内容是否重要、是否希望老师使用教学辅助软件进行绘图、老师是否会鼓励学生利用图形去讨论问题。

4.2.2 调查对象

与试卷测试对象保持一致。

4.2.3 调查问卷的编制

调查问卷的编制是一个循序渐进并不断修订的过程，本研究高中生直观想象素养水平现状调查问卷编制遵循如下基本程序：

明确研究目的——拟问卷调查纲要——编写问卷条目——问卷条目修改——确定问卷类型——预测试——再修订

问卷设计的依据：此问卷是笔者在对《课程标准（2017年版）》直观想象素养研读的基础上，参考相关文献的理论研究并请教导师，根据本研究的目的编制而成的问卷。在正式实施之前，问卷题会经过预调查、数据分析问卷的信效度、问卷修改等过程才能进入正式的实施。

本调查问卷主要由两部分组成，第一部分是学生的基本信息，第二部分是调查问题。第二部分总共有 15 题，主要分为 6 个维度（如表 4-2-1 所示），一是学生数学学习态度（1-2），二是学生对直观想象素养的态度（3-5），三是学生对直观想象素养的了解（6-7），四是学生对教学辅助软件的了解程度（8-9），五是学生对直观想象素养各方面的表现（10-12），六是学生对老师培养直观想象素养的看法（13-15）。具体见附录 2。

表 4-2-1 问卷题目对应的维度划分

| 维度 | 题号 |
|----------------------|----------|
| 学生学习数学的态度 | 1、2 |
| 学生对直观想象素养的态度 | 3、4、5 |
| 学生对直观想象素养各方面的表现 | 6、7 |
| 学生对教学辅助软件的了解程度 | 8、9 |
| 学生对教学辅助软件培养直观想象素养的态度 | 10、11、12 |
| 学生对老师培养直观想象素养的看法 | 13、14、15 |

4.2.4 调查实施过程

(1) 预调查

2023年6月13日，对ZY市某中学高一年级的一个班进行问卷的预调查。

1) 信度分析

用Cronbach's Alpha (α 系数) 检验数据，如果Cronbach's Alpha系数超过0.6，则表明该调查问卷的信度达到了标准。从下面的表格中可以看出，Cronbach's Alpha的系数是 $0.884 > 0.6$ ，这份调查问卷的信度是合格的。

表 4-2-2 问卷预调查案例处理汇总

| | | N | % |
|----|------------------|----|-------|
| 案例 | 有效 | 37 | 100.0 |
| | 已排除 ^a | 0 | 0 |
| | 总计 | 37 | 100.0 |

a.在此程序中基于所有变量的列表方式删除

表 4-2-3 问卷预调查可靠性统计量

| Cronbach'Alpha | 基于标准化项的 Cronbach'Alpha | 项数 |
|----------------|------------------------|----|
| .884 | .892 | 15 |

2) 效度分析

在进行对效度的检验过程中所使用的方法则是采用目前较为权威的因子分析法，通过对得出的数据进行分析 KMO 指标 0.7 就说明测试卷效度是可行的，超过 0.8 就说明测试卷效度很高，Bartlett 的 P 值低于显著性水平 0.05，说明该测试卷的效度较高。由下面的表格可以看出 KMO 的指标为 $0.730 > 0.7$ ，Bartlett 球形检验的 $P=0.001 < 0.05$ ，说明该调查问卷效度较好，能够适用于研究。

表 4-2-4 问卷预调查 KMO 和 Bartlett 的检验

| | | |
|-----------------------------|------------|---------|
| 取样足够的 Kaiser-Meyer-Olkin 度量 | | .730 |
| Bartlett 的球形度检验 | 近似卡方 | 283.254 |
| | df (自由度) | 105 |
| | Sig. (显著性) | <.001 |

(2) 正式调查

2023年6月15日，预测试卷完成后，对高一年级的剩余6个班发放调查问卷，调查时间为25分钟。由于预调查后的问卷并未做更改，因此预调查的数据也同时纳入正式调查中。

1) 信度检验

对数据 Cronbach'Alpha (α 系数) 检测，若 Cronbach'Alpha 系数大于 0.6，

说明测试卷信度满足要求。由表中可得出 $0.833 > 0.6$ ，说明问卷的可靠性满足信度较高。

表 4-2-5 问卷案例处理汇总

| | | N | % |
|----|------------------|-----|-------|
| 案例 | 有效 | 231 | 100.0 |
| | 已排除 ^a | 0 | 0 |
| | 总计 | 231 | 100.0 |

a.在此程序中基于所有变量的列表方式删除

表 4-2-6 问卷可靠性统计量

| Cronbach' Alpha | 基于标准化项的 Cronbach' Alpha | 项数 |
|-----------------|-------------------------|----|
| .833 | .848 | 15 |

2) 效度分析

由表可知 KMO 指标为 $0.836 > 0.8$ ，Bartlett 球形检验的 P 值 $< 0.001 < 0.05$ ，因此该测试卷效度较好，可以用于研究。

表 4-2-7 问卷 KMO 和 Bartlett 的检验

| | | |
|-----------------------------|------------|----------|
| 取样足够的 Kaiser-Meyer-Olkin 度量 | | .836 |
| Bartlett 的球形度检验 | 近似卡方 | 1252.540 |
| | df (自由度) | 105 |
| | Sig. (显著性) | <.001 |

4.2.5 调查结果分析

(1) 总体情况分析

1) 学生学习数学的态度

将调查问卷所得到的数据录入 SPSS 软件中进行分析描述统计，统计出高一年级学生对学习数学的态度，调查问卷的具体情况展示如下表所示：

表 4-2-8 学生学习数学的态度统计表

| 题目 | A | | B | | C | | D | | E | |
|----|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|------|
| | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 |
| 1 | 48 | 20.8% | 96 | 41.6% | 51 | 22.1% | 28 | 12.0% | 8 | 3.5% |
| 2 | 32 | 13.9% | 72 | 31.2% | 71 | 30.7% | 52 | 22.5% | 4 | 1.7% |

根据所得出的数据统计分析，对于“你对数学知识非常感兴趣”，对此认同的学生高达达 62.4%，说明绝大多数学生对数学知识还是持正向态度的，但也同样存在将近 22.1% 的学生此表示不确定，态度摇摆；而对于“你会不会在课后或者完成作业后再次学习数学”，有 45.1% 的学生表示会在课后学习数学，这个数据明显低于一半的学生，但仍有 30.7% 的学生表示不确定，有 24.2% 的学生

表示基本不会或者完全不会在课后来对数学进行再学习，这也同时说明了有不少的学生的需要改进其学习方式，培养好自身自主学习的意识。

2) 学生对直观想象素养的态度

高一学生对直观想象素养的态度的调查问卷情况如下表所示：

表 4-2-9 学生对直观想象素养态度统计表

| 题目 | A | | B | | C | | D | | E | |
|----|----|-------|-----|-------|----|-------|----|-------|----|------|
| | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 |
| 3 | 37 | 16.0% | 83 | 36.0% | 76 | 32.9% | 28 | 12.1% | 7 | 3.0% |
| 4 | 52 | 22.5% | 103 | 44.6% | 69 | 29.9% | 6 | 2.6% | 1 | 0.4% |
| 5 | 30 | 13.0% | 85 | 36.8% | 71 | 30.7% | 37 | 16.0% | 8 | 3.5% |

根据统计数据进行分析，对于“你对数学中直观想象知识的喜欢程度”，表示对此比较喜欢和非常喜欢的学生有 52.0%，说明超过一半的学生在面对直观想象的知识时还是持肯定态度的，但同时也有 32.9%的学生表示不确定；对于“如果需要提高数学成绩，你认为培养直观想象素养是否能达到效果”，有 67.1%学生表示完全可以，说明大部分学生认为直观想象对数学成绩是有很大影响的，只有极少数的同学反对；对于“你认为你的直观想象很好”，只有 49.8%学生人数比例认为完全符合或者比较符合，同时也有 30.7%的同学表示难以判断，有 19.5%的学生不太符合或者非常不符合，说明学生对自身直观想象能力上的不足也有一个比较清晰的认识。

3) 学生对直观想象素养的了解

表 4-2-10 学生对直观想象素养的了解统计表

| 题目 | A | | B | | C | | D | | E | |
|----|----|-------|-----|-------|----|-------|----|------|----|------|
| | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 |
| 6 | 58 | 25.1% | 122 | 52.8% | 40 | 17.3% | 10 | 4.4% | 1 | 0.4% |
| 7 | 65 | 28.1% | 122 | 52.8% | 35 | 15.2% | 8 | 3.5% | 1 | 0.4% |

根据数据统计分析，对于“你认为直观的形象（如函数图形等）和直观想象素养之间有联系”，表示有 77.9%的学生认为非常符合或者比较符合，说明这部分学生对学习过程中直观想象方面的知识具有清晰的认识，而有极少数同学认为不符合或者非常不符合，表明这部分学生对题目中的直观想象方面的知识还需要加强学习；对于“你认为借助图形形象能够提升你的直观想象素养”，表示有 80.9%的学生表示非常符合或者比较符合，说明绝大多数学生都认为图形图

象对直观想象方面的知识的学习能具有更好的促进作用，只有极少数的学生认为通过图形图象无法提升直观想象素养。

4) 学生对教学辅助软件的了解程度

表 4-2-11 学生对教学辅助软件的了解程度统计表

| 题目 | A | | B | | C | | D | | E | |
|----|-----|-------|----|-------|----|-------|----|------|----|------|
| | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 |
| 8 | 106 | 45.9% | 65 | 28.1% | 33 | 14.3% | 16 | 6.9% | 11 | 4.8% |
| 9 | 110 | 47.6% | 62 | 26.9% | 25 | 10.8% | 22 | 9.5% | 12 | 5.2% |

根据统计分析，对于“你听说过网络画板吗？（一种网页版形式的教学用具）”，有 74% 的学生表示完全符合或者比较符合，可能是由于前期在学校内向高一年级的数学老师介绍过这款方便快捷的网页，这也让许多学生了解到了网络画板；对于“你听说过 GeoGebra 吗（一款数学教学软件）”，有 74.5% 的学生表示非常符合或者比较符合，这表明教师在实际教学时会用辅助软件进行教学，让学生更为容易理解。

5) 学生对教学辅助软件培养直观想象素养的态度

表 4-2-12 学生对教学辅助软件培养直观想象素养的态度统计表

| 题目 | A | | B | | C | | D | | E | |
|----|-----|-------|-----|-------|----|-------|----|-------|----|------|
| | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 |
| 10 | 101 | 43.7% | 80 | 34.7% | 25 | 10.8% | 24 | 10.4% | 1 | 0.4% |
| 11 | 106 | 45.9% | 97 | 42.0% | 22 | 9.5% | 5 | 2.2% | 1 | 0.4% |
| 12 | 90 | 39.0% | 102 | 44.2% | 34 | 14.7% | 5 | 2.1% | 0 | 0.0% |

根据统计分析，对“你的老师是否经常使用网络画板等教学辅助软件进行教学？”，表示有 78.4% 的学生觉得非常符合或者比较符合，说明学校的教师在进行教学的时候会使用相关的教学辅助软件进行教学，而有少数学生认为不太符合或者非常不符合，对于这部分学生作者持怀疑态度，认为学生在课堂学习的时候可能注意力不太集中，没有进行注意到；对于“你认为使用数学教学辅助软件可以使学习的内容变得更加直观、容易？”，有 87.9% 的学生认为非常符合或者比较符合，说明学生对数学教学软件的能力还是认可的，学生也更愿意接受；对于“你认为使用数学教学软件辅助教学有助于提高你自身直观想象素养水平吗？”，有 83.2% 的学生表示非常符合或者比较符合，说明数学教学辅助软件在学生的角度上认为在教学时是有重要地位的，同样也有极少数的学生认为

不太符合或者非常不符合。

6) 学生对老师培养直观想象素养的看法

表 4-2-13 学生对老师培养直观想象素养的看法统计表

| 题目 | A | | B | | C | | D | | E | |
|----|-----|-------|-----|-------|----|-------|----|------|----|------|
| | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 | 人数 | 占比 |
| 13 | 95 | 41.1% | 107 | 46.4% | 22 | 9.5% | 6 | 2.6% | 1 | 0.4% |
| 14 | 120 | 52.0% | 83 | 35.9% | 27 | 11.7% | 1 | 0.4% | 0 | 0% |
| 15 | 93 | 40.3% | 100 | 43.3% | 33 | 14.3% | 4 | 1.7% | 1 | 0.4% |

根据统计数据进行分析，对“在老师对直观想象素养方面知识进行讲解时，你认为学习它重要吗？”，表示对学习直观想象方面的知识非常重要和比较重要的学生人数高达 87.5%，只有极少数学生认为不重要；对于“你希望老师在教学时使用数学教学软件绘制图象帮助理解吗？”，表示有 87.9% 的学生觉得非常符合或者比较符合，只有极少数学生认为不符合，说明绝大多数学生还是更愿意教师在进行教学的时候能够使用相关类型软件来吸引学生，提高学生的内驱力；对于“教师是否会激励你们利用空间形式特别是图形去讨论问题？”，有 83.6% 的学生表示教师完全会或者基本会激励他们用空间形式去研究数学问题，但同样存在少数表示对此无所谓。

综上，教师在课堂的教学的过程中还是需要让学生更多的去运用直观想象去研究数学问题，绝大部分学生都是对数学充满兴趣，也更希望教师的教学过程能够采用现代信息技术来进行教学，增加课堂中的氛围感。

(2) 性别差异分析

将非常符合、完全会、非常喜欢等定义为 5 分，依次递减至完全不符合、完全不会、完全不感兴趣定义为 1 分，将所得到的分数导入到 SPSS 软件进行分析，得出该校的高一年级的学生在这六个维度中的组统计量。通过对下表数据得出，男生在对学习数学的态度、直观想象素养的态度、直观想象素养各方面的表现这两个维度高于女生，对教学辅助软件的了解程度上男生低于女生。从均值上看，性别在学生对教学辅助软件培养直观想象素养的态度和老师培养直观想象素养的看法这两个维度间均值差异性不大。

表 4-2-14 学生在六个维度中性别差异的组统计量

| | 性别 | N | 均值 | 标准差 | 标准误差平均值 |
|----------------------|----|-----|---------|---------|---------|
| 学生学习数学的态度 | 男 | 96 | 7.2500 | 1.89181 | .19308 |
| | 女 | 135 | 6.7704 | 1.80357 | .15523 |
| 学生对直观想象素养的态度 | 男 | 96 | 11.0938 | 2.13777 | .21819 |
| | 女 | 135 | 10.5185 | 2.08710 | .17963 |
| 学生对直观想象素养各方面的表现 | 男 | 96 | 8.1771 | 1.28959 | .13162 |
| | 女 | 135 | 7.9185 | 1.44063 | .12399 |
| 学生对教学辅助软件的了解程度 | 男 | 96 | 7.8125 | 2.08913 | .21322 |
| | 女 | 135 | 8.2296 | 1.81182 | .15594 |
| 学生对教学辅助软件培养直观想象素养的态度 | 男 | 96 | 12.5729 | 2.12129 | .21650 |
| | 女 | 135 | 12.6444 | 2.04963 | .17640 |
| 学生对老师培养直观想象素养的看法 | 男 | 96 | 12.8542 | 1.86930 | .19079 |
| | 女 | 135 | 12.8593 | 1.86948 | .16090 |

(3) 方向差异分析

将非常符合、完全会、非常喜欢等定义为 5 分，依次递减至完全不符合、完全不会、完全不感兴趣定义为 1 分，将物理方向和历史方向的问卷所得分的数据导入 Excel 中，再利用 SPSS 软件进行分析，得出学生在这六个维度中的组统计量。通过下表数据得出，物理方向的学生在对学习数学的态度、直观想象素养的态度、直观想象素养各方面的表现这三个维度高于历史方向，其余的维度均低于历史方向。

表 4-2-15 学生在六个维度中选科差异的组统计量

| | 方向 | N | 均值 | 标准差 | 标准误差平均值 |
|--------------------|------|-----|---------|---------|---------|
| 学习数学的态度 | 物理方向 | 171 | 7.0175 | 1.78383 | .13641 |
| | 历史方向 | 60 | 6.8333 | 2.04332 | .26379 |
| 对直观想象素养的态度 | 物理方向 | 171 | 10.8655 | 2.01159 | .15383 |
| | 历史方向 | 60 | 10.4500 | 2.40356 | .31030 |
| 对直观想象素养各方面的表现 | 物理方向 | 171 | 8.0760 | 1.30161 | .09954 |
| | 历史方向 | 60 | 7.8833 | 1.59546 | .20597 |
| 对教学辅助软件的了解程度 | 物理方向 | 171 | 7.9825 | 2.05362 | .15704 |
| | 历史方向 | 60 | 8.2667 | 1.56082 | .20150 |
| 对教学辅助软件培养直观想象素养的态度 | 物理方向 | 171 | 12.4094 | 2.14934 | .16436 |
| | 历史方向 | 60 | 13.200 | 1.73498 | .22399 |
| 学生对老师培养直观想象素养的看法 | 物理方向 | 171 | 12.7251 | 1.82802 | .13979 |
| | 历史方向 | 60 | 13.2333 | 1.93423 | .24971 |

4.3 教师访谈

4.3.1 访谈目的

通过访谈了解高中一线教师对直观想象素养的理解以及如何培养学生的直观想象素养；对学生直观想象素养水平的评价；学生素养水平处于此阶段的原因；对培养直观想象素养有哪些困难并提出建议；在教学中如何才能提升学生直观想象素养等。

4.3.2 访谈对象

ZY 市某中学 4 位数学老师，其中教师 A 和教师 B 有 15 年以上的教龄；教师 C 有 10 年以上的教龄；教师 D 有 3 年以上教龄。

4.3.3 访谈提纲的编制

访谈提纲的编制参考了李希峰的《高中生数学直观想象素养提升的调查研究》^[69]和裴阳的《高中生直观想象素养水平调查研究》^[70]中对培养学生直观想象素养举措的调查研究。

4.3.4 访谈实施

2023 年 7 月，访谈提纲的编制参考了导师、联合培养导师和实习基地导师的意见并进行修改最终所形成的。在进行正式访谈之前征得老师同意并约定好时间准时到达，在预定的时间内完成访谈。

4.3.5 访谈结果分析

(1) 请您结合您的教学经验，可以谈谈您对直观想象素养的理解吗？

教师 A：直观想象素养是学生学习过程中能够借助空间想象能力掌握数学图象的变换，从而利用数学几何图形的教学内容解决实际问题。

教师 B：素养其实是一种能力，表明学生现阶段的直观想象能力。

教师 C：直观想象素养是新课标提出的六大核心素养之一对应到我们的数学思想方法，需要用到数形结合、空间想象能力和几何直观。

(2) 那么您认为当前高一学生的直观想象素养还处于什么水平呢？

教师 A：处于初级水平（水平一），整体所处的水平一般，对问题的思考还比较浅显，不能从更深层的角度去观察图象、图形等问题。

教师 B：高一年级学生的直观想象素养的水平高低是存在差异性的，这个应该根据调查统计表来确定，一般来说总体是处于水平一的，物理方向的学生

要高一些，历史方向的学生大部分是要低一些的。

教师 C：水平二，学生的思维比较灵活，具备一定的这种能力。

(3) 既然您认为学生的直观想象素养处于这个水平，那么学生处于这个水平你觉得有哪些原因呢？

教师 A：学生在初中阶段学习的数学知识结构单一，学生的记忆模型以考试为目的。

教师 B：学生本身的数学能力存在差异；小学到初中对于该部分的学习中没有形成一定的认知；学生本身不善于结合生活实例进行学习，也没有形成用图思维。

教师 D：高一学习的知识的比较单一，向量部分就只涉及向量，函数部分就只涉及函数，学生对基础的知识的掌握和理解还不到位，对于系统的知识的一个整合还没有达到这个高度。

(4) 请您回顾一下在您的教学过程中，您是如何来培养学生的直观想象素养的？

教师 B：从生活实例中抽象出几何体，然后再回到生活实例；更多的去担任引导者，引导学生去找图形、图象，去画图形、图象；利用多媒体技术展示给学生看，形成一些基本模型；在做题的时候，有意识地培养学生画图、用图的意识。

教师 C：让学生去画图，从基本的操作与应用中培养直观想象素养，借助多媒体让学生直观的感知。

(5) 您觉得在实际教学过程中来培养学生的直观想象素养存在着哪些困难？

教师 A：学生作图满，没有那么多的时间让学生去实操，学生的空间想象能力弱。

教师 B：学生不能积极投入到整个过程中；学生本身缺乏发现抽象的能力；学生很难按照要求快速的做出图形；对于一些复杂的几何体，教师用软件无法做出，无法展示给学生看。

教师 C：在整个培养的过程中，学生的积极性不太好调动起来，再者从初中到高中的转变，学生的压力也更大，投入的时间也比较少。

教师 D: 存在的最大的困难就是只是难度的跃升, 从初中简单的解析几何, 到了高中之后需要研究直线、圆、圆锥曲线这些综合类问题, 用到的知识点比较多, 学生很难构建这种直观想象的能力, 在立体几何中也是一样的, 知识点的量变多, 难度变大, 对高一学生的要求也就更高, 对学生的思维能力要求也就更高。

(6) 请您谈一下如果想要培养学生的直观想象素养, 您还有哪些建议?

教师 A: 在数学课中单独设计该课程, 其次在解决问题的过程中多去引导学生进行建立图形架构, 再尝试作图进而培养学生的直观想象素养。

教师 B: 这是一个长期积累的过程, 各学段的教师应该共同协作完成这项任务, 关于数学核心素养, 各阶段的老师也应该清楚, 而不是等到高中大量学习这些时才去引导和培养; 家长也可以有意的培养学生这方面的能力; 学生也应该意识到这是一种必备能力。

教师 D: 最重要的一个就是要把时间还给学生, 要让学生有时间去自己感知、去想; 其次教师要对学生进行分步引导, 如果学生无法进行构建完整的一个结构, 教师就要进行引导, 可以给出一些特定的步骤或者模型; 然后就是要从教具入手, 直观想象是和我们具体的图形, 不管是平面的还是立体的, 平时是可以做一些这样的教具, 学生也可以自己去动手做; 还可以利用信息技术, 诸如几何画板这些软件演示给学生看逐渐培养学生的直观想象能力。

综上所述, 教师对培养学生的直观想象素养主要再以下几个方面: 首先就是从初中的过度, 学生的基础知识可能不够扎实, 而知识量又变多了, 更要紧的就是要强化学生的基础, 让学生养成良好的学习习惯; 其次就是教师的教学中更多的要注重引导学生利用对应的知识去解决数学问题, 尤其是立体几何中证明题的规范性, 在教学的时候能够尽可能地将时间还给学生, 让学生思考解题思路; 最后就是学生在学习的过程最主要是要表达出来, 课堂上能够通过语言表达, 作业上能进行文字表达, 访谈的教师都认为信息技术的应用能够对学生直观想象素养的提高具有极大的促进作用。

4.4 高一学生直观想象素养现状分析和总结

4.4.1 高一学生直观想象素养现状

通过对 ZY 市某中学高一年级学生的试卷测试和问卷调查, 得出如下结论:

(1) 试卷测试结果表明：高一学生的直观想象素养水平总体刚达到水平二，仍然具有极大的提升空间。而在复杂的问题中，只有少数学生能够通过想象对复杂的数学问题进行直观表达，反映数学问题的本质，形成解决问题的思路。^[1]通过使用 SPSS 进行数据分析可以总结得出在 ZY 某高中高一的学生在物理方向比之在历史方向上的学生来说平均分略高，而对于该年级男生比之女生略高，通过使用独立样本 T 检验可以得出，在选科的方向上和性别上的差异性不具备统计意义上的显著性差异。

(2) 问卷调查结果表明：对于高一年级的绝大部分的学生来说，他们对于数学的学习仍然是比较感兴趣的，同样他们也认为如果对他们的直观想象素养进行培养是可以对他们的数学成绩提高具备积极的作用。在进行数学的课堂教学时，部分学生也表示能够运用直观想象能力去探索和解决数学问题，但是涉及到身边的实例时，部分学生又表示的不确定；对于学生认为信息技术对学生学习数学的作用是持肯定的态度的，学生也更希望教师能够通过信息技术，诸如几何画板、Geogebra 和网络画板等来进行教学。但是谈到学生对于自身直观想象能力的认知时，大部分的学生认为自己的直观想象能力还不错，说明学生也能清晰的认识到自身的直观想象素养水平。

4.4.2 教师对培养学生直观想象素养的总结

(1) 高一学生直观想象素养现状：教师认为学生直观想象素养处于较低的水平。学生对直观想象的认识也比较少，教师的在教学的过程中能将时间还给学生们的机会太少。

(2) 直观想象素养的主要影响因素：学生的知识储备量不够、学生对于课本中哪些属于直观想象素养部分的了解程度不够、没有养成良好的作图习惯、对文字语言的表述不规范、对数学问题研究不够深入、学习的时间不够等。

(3) 教学培养措施：首先要明确学生当前阶段的直观想象素养水平，在进行教学的过程要突出教学的重难点；教学情境要多涉及生活中的实例；更多的运用现代信息技术培养学生的直观想象素养；掌握好数学语言，课堂上的语言符号表达，作业上的文字符号表达；规范学生的答题思路，尤其是立体几何的证明题；尽可能地的将时间还给学生，让学生能够独立的探索和解决数学问题，总结思想方法等。

综上所述，对于高一学生来说对他们的直观想象素养进行培养是极为重要的，学生从初中过渡过来需要学习的量增多，教师应该如何去把控好这个力度十分重要；教师需要培养学生的数学思维，教师在对数学问题进行讲解的过程中需要保持一定的神秘感，更多的是去引导学生向着自发的方向去，而不是直接开始讲题，要让学生通过自己的探究来找到属于且适合自身的学习方法，通过这样的一个教学过程，能够对学生的思维得到极大的锻炼；最后教师在完成一小阶段的教学后要及时做出课后反思，有条件的尽可能组织学生进行交流讨论，教师作为巡视员参与到学生的讨论交流中来，让教师了解到学生仍然存在一些什么问题，方便今后的教学中来作出改进。

5 网络画板培养高一学生直观想象素养的课例研究

5.1 网络画板培养高一学生直观想象素养

经过对学生直观想象素养试卷测试、问卷调查和教师访谈结果分析可以发现，在实际教学中需要多媒体进行演示教学来促进学生对知识的吸收和消化，而通过教师访谈发现教师对直观想象素养的了解并不全面，虽然在教学过程中也十分注重对学生直观想象素养的培养，但是教师却对动态作图软件不熟悉，以至于在听课的时候都没有看到教师有使用网络画板等动态作图软件，但是教师仍然也会有使用 PPT、希沃画板等辅助教学，只是没有看到动态演示的过程，如果教师的教学过程能够加上这些动态展示过程是更能直观的将教师想要传达的知识呈现出来的，学生也能更好的理解。。

在教学过程中使用的理论指导为“三教”理念，即结合网络画板教会学生思考、体验、表达，其中最主要的是用网络画板来展示图形动态变化过程，以此来发展学生的数学核心素养。

5.2 课例研究设计

5.2.1 课例研究的目的

尝试在授课的过程中使用网络画板来进行动态展示，并使用“三教”理念为课例研究过程中的教学指导理念，结合当前学生的直观想象素养现状来引导学生对直观知识的更进一步的理解和学习，并在这个过程中给予学生足够的思考、体验和表达的时间，进而提升学生的直观想象素养。

5.2.2 课例的选取

结合具体实习情况，选取《普通高中数学课程标准实验教科书必修第三册（人教 B 版 2019 版）》第七章第三节：7.3.2 正弦型函数的性质与图象作为课例研究一的内容。选取这一节的原因：首先，这一节能够与物理进行连接；其次，这一节的学习为后面学习余弦型函数等提供了范例；再次，通过网络画板的直观演示能够更好的提高学生的几何直观，进而培养学生的直观想象素养。

选取《普通高中数学课程标准实验教科书必修第四册（人教 B 版 2019 版）》第十一章第二节：11.2 平面的基本事实与推论作为课例研究二的内容。选取这一节的原因是本节内容为立体几何初步的基础，需要学生有较高的空间想象能力，通过对平面的基本事实及推论的演示可以提高学生的空间想象能力，进而培养学生的直观想象素养。

5.2.3 课例分析框架

课例研究的分析是以上课前期的准备、教学的过程以及教学后的总结反思为主要步骤。在课前准备中的分析主要是基于网络画板并以“三教”理念为理论指导，结合高一学生的直观想象素养的现状来进行教学要素分析和教学过程设计；教学的过程主要是以课堂实录的形式来进行呈现；总结反思则是在完成一堂课后的教学反思，并结合“教思考、教体验和教表达”对学生进行课例研究的总结和反思。

5.3 课例 1：正弦型函数的性质与图象

5.3.1 教学要素分析

(1) 教材分析

本节内容选自《普通高中数学课程标准实验教科书必修第三册（人教 B 版 2019 版）》第七章第三节：7.3.2 正弦型函数的性质与图象。本节课的知识点主要有：其一是用五点法作出正弦型函数，其二是利用图形的直观感知总结正弦型函数的性质，其三是通过研究不同的正弦型函数的定义域、值域、周期和五点作图法将其与标准正弦函数进行类比这两者图象之间的变换关系，并将其推广到一般情形。在教材中通过引入将生活实例将问题数学化，引发学生思考正弦型函数与正弦函数之间的关系，接着给出正弦型函数的定义，通过三个例子对三个参数进行探究，在顺序上从最简单的振幅 A 开始进行探究让学生进行探究，而在对图象探究之前，教材中则会先对其性质进行探究，让学生和教师进行类比得出正弦型函数的性质，然后再绘制图形，另外两个参数也是同样的方法，最后则是进行综合应用。而与人教 A 版教材相比，在内容顺序上有所不同，B 版教材是在学习了正弦函数之后便进入学习正弦型函数，A 版教材是在三角函数（包括正余弦、正切函数）之后才学习的内容，并且称呼也不同，称函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ；在对参数探究的顺序上也有不同，B 版教材是首先对最

简单的参数 A 进行探究，再到参数 φ 和参数 ω ，每一次的探究都是采用 $y = \sin x$ 即正弦函数的单一参数变化后的函数， A 版教材是先对参数 φ 进行探究再到参数 ω 和参数 A ，而 A 版教材在对参数探究的时候则会沿用之前的函数，让学生能更为直观的了解两个参数同时变换的过程。

本节课所学习的内容是中学数学重要的内容之一，也是现实生活中常见的数学模型，本节课程是学生已经能够用五点作图法作出正弦函数的图象以及函数图象平移的相关方法，让学生通过正弦函数到正弦型函数的过渡，来进行探究实际生活中常见的数学模型：即正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ，通过对三个参数 A 、 ω 和 φ 进行探究对函数性质和图象的影响，并在学习后进行综合探究并让学生学会正弦型函数的性质与图象，学生通过五点作图法，强化对该部分知识的深化学习，为之后学习三角恒等变换和正余弦定理打基础，也为物理诸如单摆、简谐、机械波等知识提供基础数学模型，本节知识是理论与实际相联系的中介点。

(2) 学情分析

对高一（4）班的学生的测试卷进行统计分析，可以得出学生的直观想象素养的平均分为 53.77，依据文中对于水平的划分可以得出高一（4）的直观想象素养水平总体处于水平二，具体水平人数占比如下表：

表 5-3-1 高一（4）班的学生直观想象素养人数与占比

| 水平 | 分数段 | 人数 | 百分比 |
|-----|----------|----|-------|
| 水平零 | 0-10 分 | 1 | 3.3% |
| 水平一 | 11-50 分 | 10 | 33.4% |
| 水平二 | 51-80 分 | 18 | 60.0% |
| 水平三 | 81-100 分 | 1 | 3.3% |
| 总和 | | 30 | 100% |

通过上表的分布情况可以看出，高一（4）班学生的直观想象素养在水平二人数最多，这也说明了学生可以对关键而有用信息进行充分的开掘，找出解决问题的思路；少数的学生可以在综合复杂的情境中经过对问题的剖析进而发现数学的规律，找到解决问题的思路。

学生具备一定的几何直观和空间想象力，但学生对于几何直观所呈现的知识而总结出来的结论了解尚有一定的欠缺，在教学的时候通过从特殊到一般总结规律，然后通过五点作图法，利用几何直观呈现并验证猜想，可以更为有效

的提高学生的直观想象素养。

(3) 教学目标分析

- 1) 了解正弦型函数的概念及其简单的物理背景；
- 2) 探究正弦型函数的定义域、值域、周期，掌握用五点作图法画正弦型函数图象的方法；
- 3) 数形结合理解参数 A ， ω ， φ 对于正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响，从而发现正弦曲线与正弦型函数图象的变换关系。

在此部分内容中，教师的教学过程不仅要侧重于对函数图象的变换，还要探究 A ， ω ， φ 对正弦型函数图象的影响，并不只是要让学生记住口诀“左加右减，上加下减”，更多的是要明确的参数的实际意义，构建周期变化的数学模型，让学生理解到学习正弦型函数的必要性，通过引入的设计让学生体会到数学来源于生活，加强数学与实际生活的联系，并通过一连串的“思考”与“探究”，让学生来观察、归纳和总结，从而进一步把握正弦型函数的图象与性质，并体会到研究函数的一般思想和方法。在这个过程借助信息技术对图象的直观、动态的展示更能促进学生直观想象素养的发展

(4) 教学重难点分析

- 1) 教学重点： A ， ω ， φ 对于正弦型函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象的影响。
- 2) 教学难点：正弦型函数的周期与 ω 的关系。

教学的重点是教学过程需要重点教学的，教学的难点是需要学生进行突破，在本节中学生需要重点学习三个参数对正弦型函数图象的影响，并理解其意义，而在这三个参数中尤以 ω 为变量时最难学习，教师的教学过程应该在此花费大功夫。

5.3.2 教学过程设计

(1) 片段一（复习回顾）

让学生观察 PPT 上的图片及题目，同学们通过物理学知识将 x 与 t 的关系可以写成什么？



图 5-3-1

问题 1: 再列举几个生活实例如家用交流电流与时间关系, 潮汐现象等。在上述中所说的 x 与 t 都是 t 的函数, 那么对于这一类型的函数又具有什么样性质呢? 我们又应该怎样来研究这类函数的性质呢?

【设计意图】创设直观情景, 让学生去经历感性和理性的直观, 促进学生进行数学思考, 在正弦函数的教学过程中用熟悉的匀速圆周运动为背景导入, 而在正弦型函数的教学中也采用实际生活中的情景引入正弦型函数, 让学生通过思考来表达出数学知识, 帮助学生与生活实际相联系, 了解研究该类函数的实际意义。

(2) 片段 2 (探究新知)

问题 2: 什么是正弦型函数? 它的标准函数形式是怎样的?

【设计意图】学生在学习了正弦函数和余弦函数之后的进一步学习, 通过提问的方式让学生们回答出本节课主要内容的概念, 学生可以类比必修一学习过的指数型函数和对数型函数来回答和解释; 学生通过预习来回答出它的标准函数形式。

问题 3: $y = 2 \sin x$ 的定义域、值域、周期分别是什么?

追问 1: 如何用五点作图法作出 $y = 2 \sin x$ 的图象?

追问 2: $y = 2 \sin x$ 可以由 $y = \sin x$ 经过怎样的图象变换得到?

追问 3: 作出 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 的图象, 探究 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 可以由 $y = \sin x$ 经过怎样的图象变换得到?

追问 4: 总结一般地, $y = A \sin x$ 的定义域、值域、周期分别是什么? 可以由 $y = \sin x$ 经过怎样的图象变换得到?

【设计意图】三个参数的研究比较复杂, 因此对三个参数分别进行研究。研究方法都是从特殊到一般的研究方法。让学生对作图的过程具有一定的了解, 为画正弦型函数奠定了良好的基础, 同时也为与正弦型函数的图象和性质的类比作准备。本节课教学重难点的第一个环节, 利用画正弦型函数让学生对描点法画函数图象的步骤具有更深一步的认识。培养学生的动手操作能力, 让学生进行思考和体验后进行数学表达。网络画板进行辅助教学, 来激发学生自主探索, 培养学生的归纳和总结能力, 也能让学生的几何直观得到提升, 进而培养学生的直观想象素养。

此次的探究采用网络画板对函数进行规范的五点法作图，让学生进行对知识本质的理解，教师通过网络画板进行动画制作，将静态的图象转换为动态演示，动静结合，让学生去观察和分析图形，最后通过网络画板进行展示对参数 A 的不同取值进行变换，即为数形结合，教师通过教会学生进行思考参数变化对图形的变化，通过网络画板来体验动态变化过程，进而让学生能够能够用语言对参数和图形的变化进行表达，培养学生的思考、分析和解决问题的能力。

问题 5：类比研究 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域、值域、周期、五点法作图、与 $y = \sin x$ 的图象变换关系，并推广到一般情形。

追问 1：总结一般地， $y = \sin(x + \varphi)$ 的定义域、值域、周期分别是什么？可以由 $y = \sin x$ 经过怎样的图象变换得到？

追问 2：我们将结合前面所学的 A 和现在的 φ 对正弦型函数的影响。

【设计意图】通过网络画板对于每个函数的研究，采用动静结合的方式，将参数 φ 对正弦型函数的影响过程进行直观具象的展现，让学生理解问题的本质，提高学生几何直观和数形结合的能力。

教学过程中采用提出科学合理的数学问题来创设数学情境作为激发学生去思考和探究的主要动力，过程中引导学生由特殊到一般，学生体验到数学问题带来的乐趣，体验到数学问题所带来的数与形的结合，感受到函数图象的几何展示，进而形成直观的表象，学生再进行小组讨论和合作，在这个过程中鼓励学生进行用数学的语言来表达数学问题，教师能够通过小组展现的成果来了解学生当前的进度，学生是否真的理解到了 φ 、 A 和 φ 对正弦型函数的影响，学生在对数学问题的表达过程中也会学习到多种方法以及思想，进而查漏补缺。

问题 6：探究 ω 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响。类比研究 $y = \sin 2x$ 与 $y = \sin \frac{1}{2}x$ 的定义域、值域、周期、五点法作图、与 $y = \sin x$ 的图象变换关系，并推广到一般情形。

追问 1：总结一般地， $y = \sin \omega x$ 的定义域、值域、周期分别是什么？可以由 $y = \sin x$ 经过怎样的图象变换得到？

追问 2：我们来探究一下 A 与 ω ， ω 与 φ 对正弦型函数的影响。

【设计意图】通过网络画板的打点作图，动态曲线，呈现出 $y = \sin 2x$ 与

$y = \sin \frac{1}{2}x$ 的图象的动态的生成过程，让学生理解参数 ω 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响；学生进行分组讨论，培养学生合作学习的能力。教师通过提出问题进而追问促进学生思考，让学生分析图形特征，感受几何直观，学生进行总结得到图形变换的语言描述，培养了学生对图形分析、数形结合和知识表达等能力。学生通过参加追问 2 的过程，形成了适量的探究意识，对数学学习更具有探索和挑战的兴趣。

(3) 片段 3 (例题讲解)

探究函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的定义域、值域和周期性，并作出一个周期内的函数图象，按照分组进行小组讨论并在纸上写出你们小组的成果。

| | | | | | |
|--|------------------|------------------|-----------------|-------------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| $\mu = (2x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y = 3 \sin \mu = y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |

(4) 片段 4 (课堂总结)

本节课你主要学习到哪些内容？你的收获是什么？哪个环节没弄清楚？米有什么困惑？

【设计意图】通过课堂小结让学生对本节课的学习梳理出一个清晰的脉络。同时，体会从特殊到一般的研究方法的应用，更加领悟到数形结合思想的普遍性与重要性。

(5) 片段 5 (作业布置)

P50 练习 A 1、5

P51 练习 B 1、4

5.3.3 课堂实录

此次教学于 2023 年 6 月 19 日上午第一节课，在该中学高一（4）班由作者执教，并用手机进行录音记录。

(1) 片段 1 (情景导入)

教师利用 PPT 放出图片，让学生回答……

师：同学们来一起观察一下下面这张图片，同学们是不是觉得十分眼熟呢，物理里面所学习的弹簧振子的简谐振动的位移问题，那由物理学知识我们应该怎样写出由物理学知识可知 x 与 t 的关系可以写成什么？

生： $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ 。

师：回答的很不错，那除了弹簧振子的简谐振动和书上所提到的交流电流，同学们还能再举几个例子吗？

生：潮汐现象、单摆、音叉发出的纯音振动……

师：学生们回答的非常好，我们在物理学中学习过了简谐振动和交流电流，在上述中所说的 x 与 i 都是 t 的函数，那么这种类型的函数具有什么性质呢？怎样来研究这种类型函数的性质呢？那就让我们带着这些问题来一起进入我们今天的课程。

(2) 片段 2 (探究新知)

师：同学们我们在上面的例子中所学习到 x 与 i 关于 t 的函数，这样的函数叫什么呢？

生：正弦型函数。

师：看来同学们都用心预习了，对，这样的函数叫做正弦型函数。一般地，形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的函数，在物理、工程等学科的研究中经常遇到，这种类型的函数称为正弦型函数。那么接下来我们就来探究一下这一类的函数的性质与图象。首先我们先来探究 A 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的性质与图象。

例 1：探究函数 $y = 2 \sin x$ 的定义域、值域和周期性，并作出它在一个周期内的图象。

师：同学们，让我们一起来探究一下这个函数的性质，我们都知道函数的有三要素，即定义域、值域和对应关系，对应关系我们在函数表达式里面已经呈现的很明显了，那么对于这个函数我们首先先来看一下定义域，有哪位同学能来回答一下呢？

生：定义域为 \mathbf{R}

师：回答的很好，那它的值域呢？

生： $[-2, 2]$ ，因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，所以 $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$ 。

师：回答的很不错，那么我们在知道 $y = \sin x$ 是周期函数，那么 $y = 2 \sin x$

是否也是周期函数呢？那么它的最小正周期为什么？

生：是周期函数，周期为 2π 。

师：那同学们接下来看着老师 PPT 展示的表格用五点作图法在纸上画出一个周期的函数图象。

| | | | | | |
|----------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin x$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y = 2 \sin x$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |

学生动手操作画图。

师：老师下来巡视了一圈，发现同学们画的都挺准确的，虽然连接的曲线不太平滑，但是同学们展示出来的图象也是十分好看的，那么同学们来看着电子白板上面，老师在网络画板上面给大家动态展示一下这个过程。我们首先先来回顾一下正弦函数的描点作图。

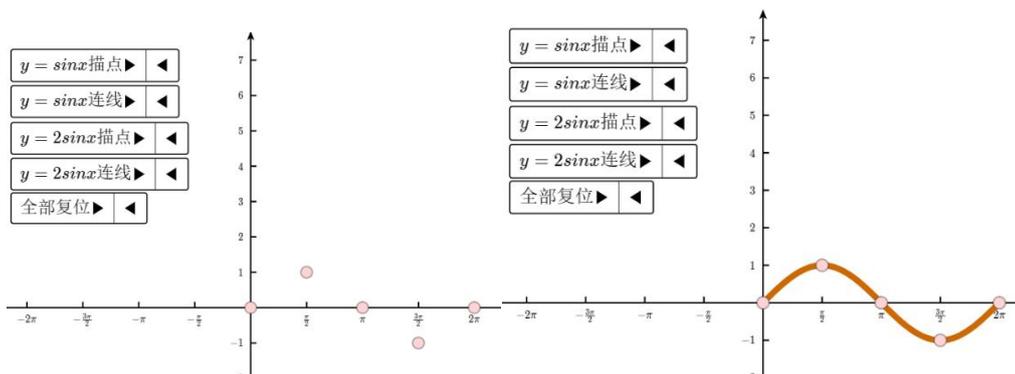


图 5-3-2

师：那么我们在回顾了正弦函数的五点作图法之后，我们来对 $y = 2 \sin x$ ，来进行五点作图法，同学们来看到大屏幕，我们按照我们事先找到的五个点来进行作图。

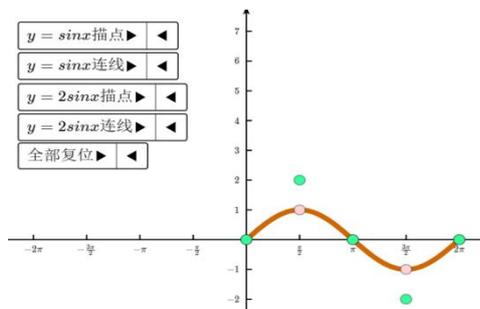


图 5-3-3

师：同学也是这样描点的吧。

生：（齐声）是的。

师：那么我们接下来就用平滑的曲线将它连接起来。

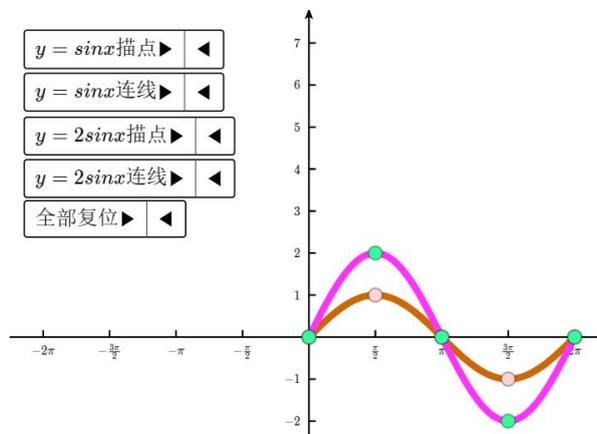


图 5-3-4

师：那同学们我们已经画出来了 $y = 2 \sin x$ 的函数图象，来观察一下它和 $y = \sin x$ 之间有什么区别。

生：纵坐标都扩大了两倍。

师：回答的很不错，那么既然 $y = 2 \sin x$ 的纵坐标扩大了两倍，那么 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 的纵坐标是否会缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 呢，同学们请来看大屏幕，我们先来进行描点。

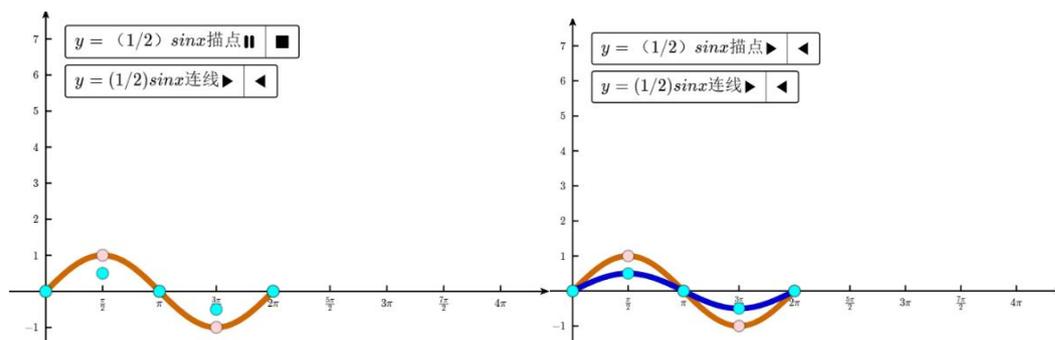


图 5-3-5

师：同学们来观察 $y = \frac{1}{2} \sin x$ 的函数图象相对于 $y = \sin x$ 来说纵坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，那么同学们按照我们现在基本得出的这个结论来快速将 $y = 3 \sin x$ 的函数图象画出来。

学生快速作图，教师展示动态图。

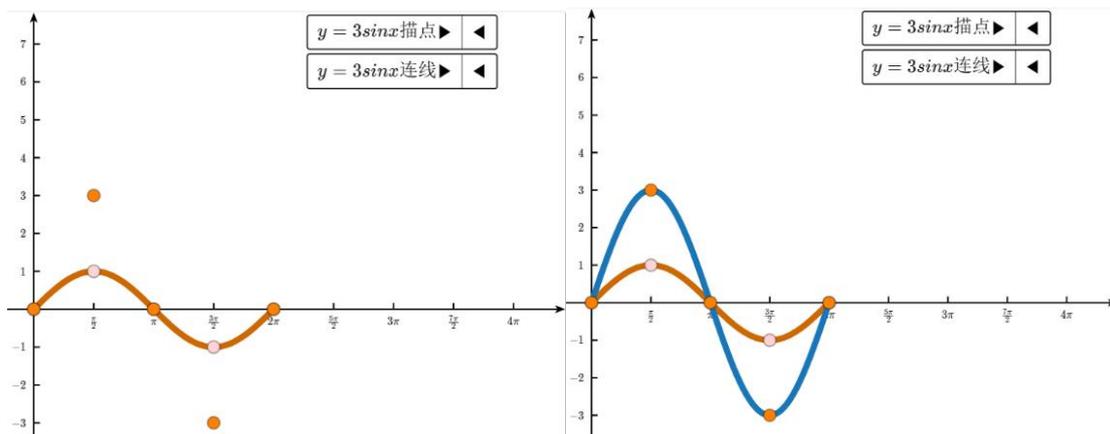


图 5-3-6

师：那么请一位同学来简单说一下 A 对 $y = A \sin x$ 图象的影响。

生：函数 $y = A \sin x$ 的定义域为 R ，值域为 $[-|A|, |A|]$ ，周期为 2π ，根据 $|A|$ 的变化，决定纵坐标变为原来的 $|A|$ 倍或者 $\frac{1}{|A|}$ 。

师：好，回答的不错。从图中的动态展示过程我们可以看出 $y = 2 \sin x$ 的图象可以由 $y = \sin x$ 的图象上的点保持横坐标不变，纵坐标变为原来的2倍，那么我们可以知道一般地，函数 $y = A \sin x (A \neq 0)$ 的定义域为 R ，值域为 $[-|A|, |A|]$ ，周期为 2π 。那接下来同学们来看一下整体的动态图。

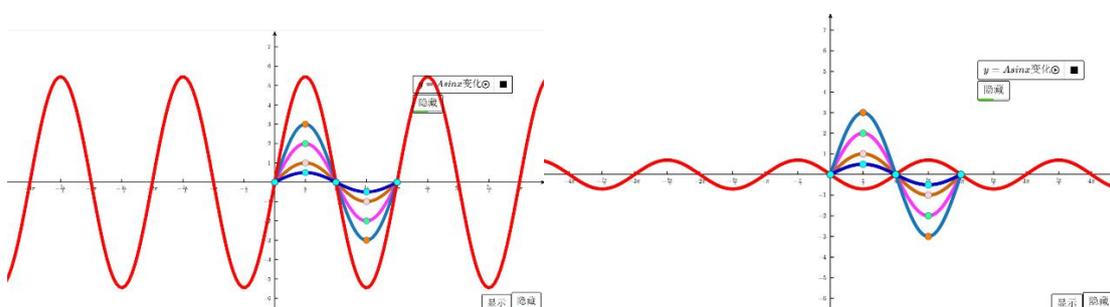


图 5-3-7

师：那同学们我们探究完了 A 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响，接下来我们接着来探究 φ 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响。我们来探究一下 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的定义域、值域和周期性。同样的哪位同学能来说说这个函数的定义域、值域以及周期呢？

生：我们令 $\mu = x + \frac{\pi}{3}$ ，那么 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 就等价于 $y = \sin \mu$ ，由于 $x \in R$ ，所以 $x + \frac{\pi}{3} = \mu \in R$ ，因此 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的定义域仍然是 R ，而它的值域也

是同理可以知道是 $[-1,1]$ 。

师：那周期呢？

生：由于换元之后 $y = \sin \mu$ 的周期为 2π 可知 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的周期也为 2π 。

师：我们在之前所学习的一次函数和二次函数的图象它的左右平移是遵循什么原则的呢？

生：左加右减。

师：对，准确来说是在 x 上来进行左加右减，那么在这里 φ 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 是否也和一次函数和二次函数的左右平移一样呢？那么同学们按照之前的分组分别画出 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 和 $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ 在一个周期内的函数图象，给大家十分钟的时间。

学生作图，教师巡视。

师：好，时间到，在这期间老师也巡视了一圈，大部分小组还是画的不错的，那么接下来请同学们看着电子白板上。

由于 $0 \leq x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi$ ，即 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

| | | | | | |
|--|------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
| $\mu = x + \frac{\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

由于 $0 \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi$ ，即 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$

| | | | | | |
|--|-----------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|
| x | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{3}$ |
| $\mu = x - \frac{\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

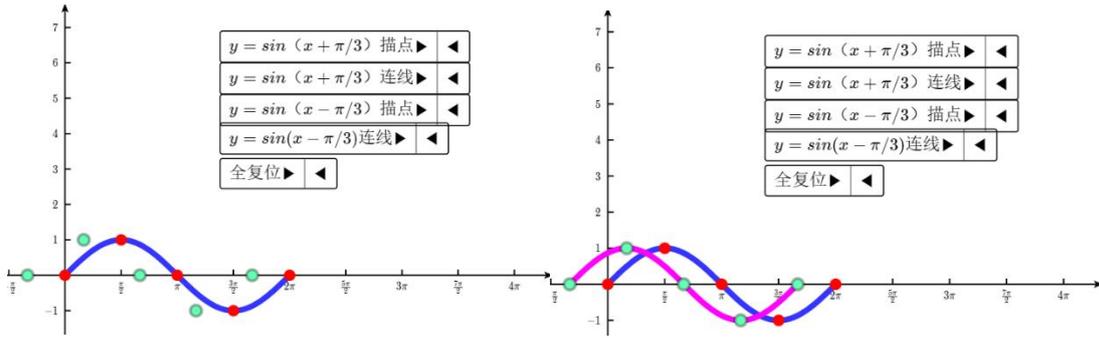


图 5-3-8

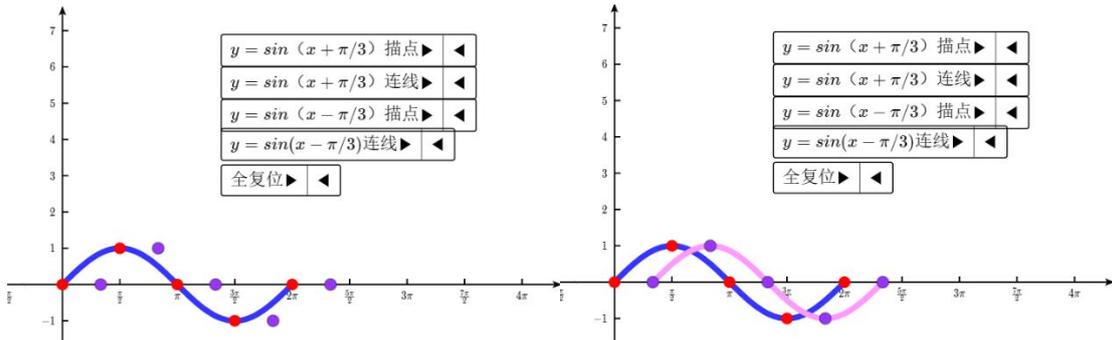


图 5-3-9

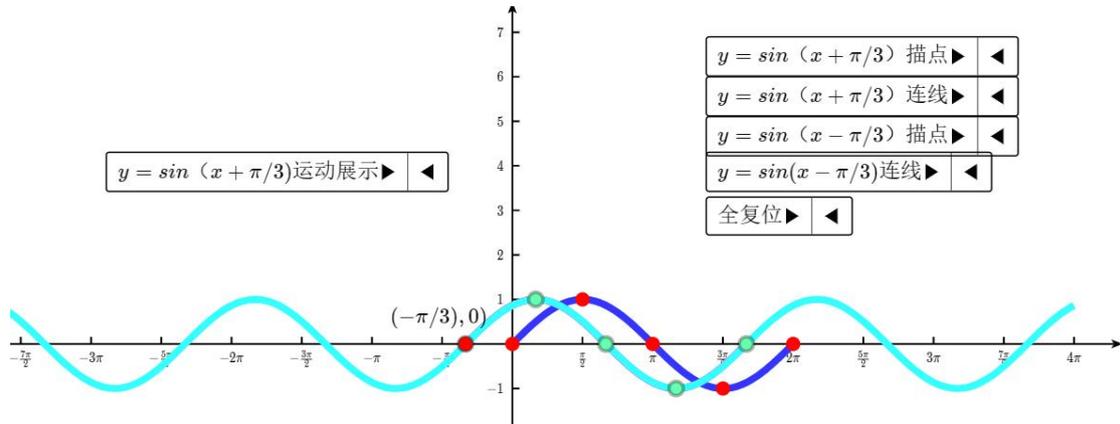


图 5-3-10

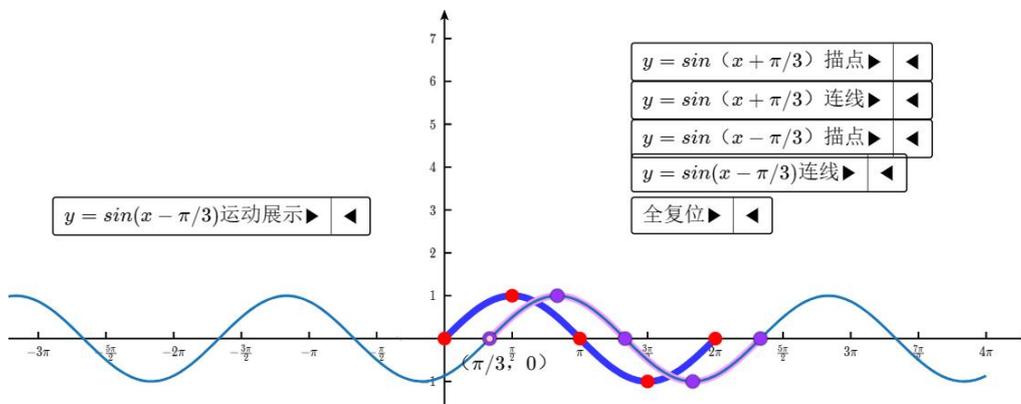


图 5-3-11

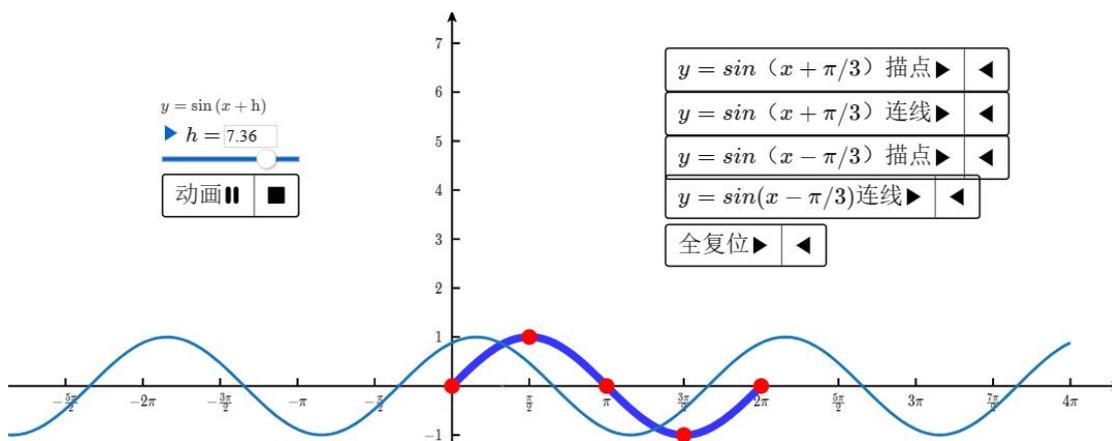


图 5-3-12

师：从图中的动态展示我们可以看出， $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到， $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到，同样的也是满足左加右减的。那么我们就可以得到一般地，函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的定义域为 R ，值域为 $[-1, 1]$ ，周期为 2π 。我们将结合前面所学的 A 和现在的 φ 对正弦型函数的影响，以 $y = 3 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 为例。

| | | | | | |
|--|------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
| $\mu = x + \frac{\pi}{3}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y = \sin \mu = 3 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 3 | 0 | -3 | 0 |

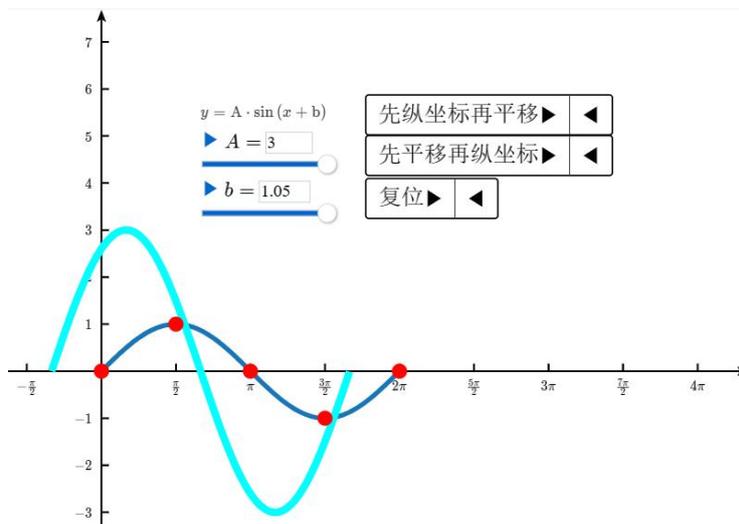


图 5-3-13

师：我们通过动态图的展示可以看出 A 与 φ 的顺序是不影响正弦型函数的图象最终的结果。那我们探究完了 φ 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响，接下来我们接着来探究 ω 对函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响。我们来探究一下 $y = \sin 2x$ 的定义域、值域和周期性。同样的哪位同学能来说说这个函数的定义域、值域以及周期呢？

生：我们令 $\mu = 2x$ ，那么 $y = \sin 2x$ 就等价于 $y = \sin \mu$ ，由于 $x \in R$ ，所以 $2x = \mu \in R$ ，因此 $y = \sin 2x$ 的定义域仍然是 R ，而它的值域也是同理可以知道是 $[-1, 1]$ 。

师：那周期呢？

生：由于换元之后 $y = \sin \mu$ 的周期为 2π 可知 $\mu + 2\pi = 2x + 2\pi = 2(x + \pi)$ ，因此可以知道对于任意 x 当它增加且至少增加到 $x + \pi$ 时， $y = \sin 2x$ 的函数值才重复出现，因此说明周期为 π 。

师：回答的不错，其实我们知道周期是指函数值重复出现的自变量 x 要加上的那个非零常数 T ，这个 T 是针对 x 而言的，那么函数 $y = \sin 2x$ 仅对 $2x$ 而言，每增加 2π ， $\sin 2x$ 的值就重复出现，但对于自变量 x 而言，每增加 π ， $\sin 2x$ 的值就重复出现，因此 $y = \sin 2x$ 的周期为 π ，那么这个关系式我们可以写成 $f(x + \pi) = \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$ ，那大家来猜测一下 $y = \sin \frac{1}{2}x$ 周期为多少，按照我们前面的分析，同样分小组同学们来探讨一下并画出函数图象。

学生操作，教师巡视。

师：好，时间到，在这期间老师也巡视了一圈，大部分小组还是画的不错的，那么接下来请同学们看着电子白板上。

由于 $0 \leq 2x \leq 2\pi$ ，即 $0 \leq x \leq \pi$

| | | | | | |
|--------------------------|---|-----------------|-----------------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | π |
| $\mu = 2x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin 2x$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

| | | | | | |
|------------------------------------|---|-----------------|--------|------------------|--------|
| x | 0 | π | 2π | 3π | 4π |
| $\mu = \frac{1}{2}x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin \frac{1}{2}x$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

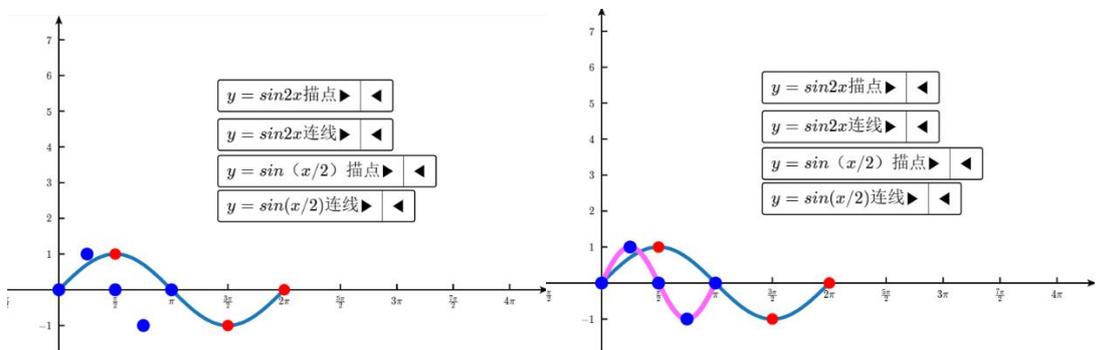


图 5-3-14

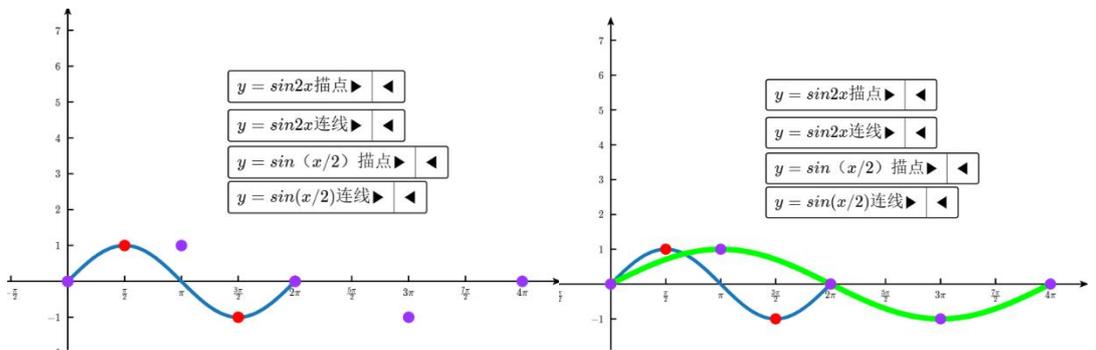


图 5-3-15

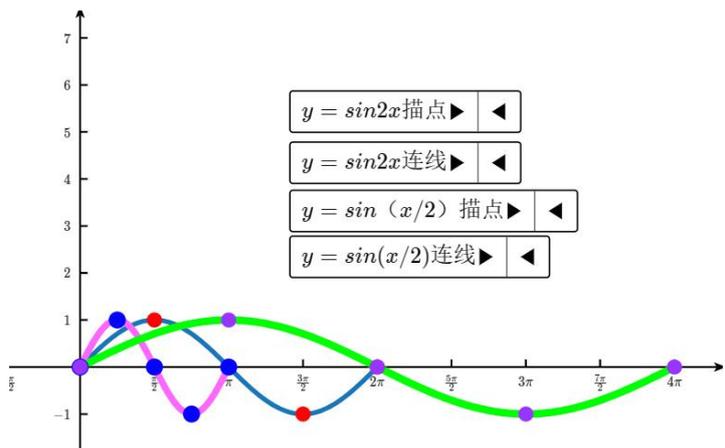


图 5-3-16

师：从图中的动态展示我们可以看出， $y = \sin 2x$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象上的点纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到， $y = \sin \frac{1}{2}x$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象上的点纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍得到。那么请一位同学

根据我们得到的特殊的结论来总结一下一般的结论。

生：一般地，函数 $y = \sin \omega x$ 的定义域为 R ，值域为 $[-1, 1]$ ，周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ ，当 $\omega > 1$ 时，图象上各点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ，当 $0 < \omega < 1$ 时，图象上各点的纵坐标不变，横坐标伸长为原来的 ω 倍。

师：回答的很好，那么我们在学习了三个参数对正弦型函数图象的影响，我们来探究一下 A 与 ω ， ω 与 φ 对正弦型函数的影响，我们分别来看一下 $y = 2\sin \frac{1}{2}x$ ， $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的函数图象的变化。同学们请来看电子白板。

| | | | | | |
|-------------------------------------|---|-----------------|--------|------------------|--------|
| x | 0 | π | 2π | 3π | 4π |
| $\mu = \frac{1}{2}x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin \frac{1}{2}x$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y = \sin \mu = 2\sin \frac{1}{2}x$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |

| | | | | | |
|---|-------------------|-----------------|-------------------|------------------|--------------------|
| x | $-\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{12}$ |
| $\mu = 2x + \frac{\pi}{6}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |

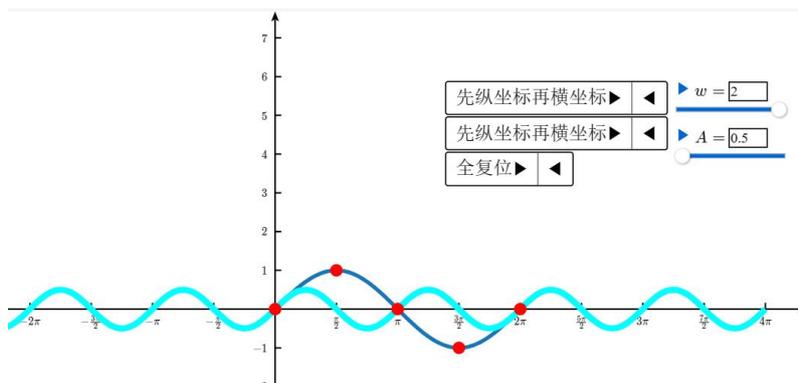


图 5-3-17

师：请一位同学来说一下通过动图的观察 A 与 ω 之间的先后顺序会对函数有影响吗。

生：不会。

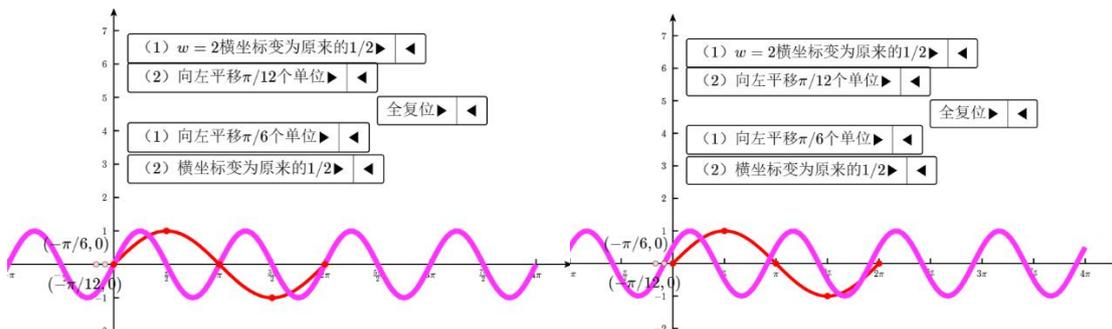


图 5-3-18

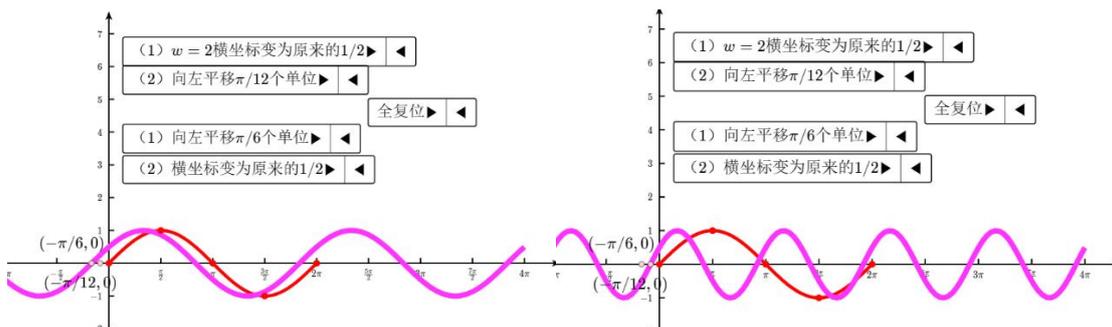


图 5-3-19

师：那么 ω 与 φ 的先后顺序会有影响吗。

生：会，在图中我们看到先收缩再平移，会向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，而先平移再收缩就会先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位。

师：没错，我们所说的左加右减是相对于 x 来说的，是在 x 上来进行左加右减，如果我们先变换了 ω ，那么 x 前面的系数也就发生了变化，相应的，我们需要平移的单位也就发生了变化。在对 ω 与 φ 变换时，我们可以先将图象上所有的点向左或向右平移 $|\varphi|$ 个单位，然后纵坐标不变，横坐标缩短或者伸长为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 或者 ω 倍。我们也可以纵坐标不变，横坐标首先缩短或者伸长为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 或者 ω 倍，然后图象上的点向左或右平移 $|\frac{\varphi}{\omega}|$ 个单位。

(3) 片段 3: (例题讲解)

师：接下来我们来做一个综合的例题，探究函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的性质，并作出一个周期内的函数图象，那么大家按照之前的分组进行小组讨论并在纸上写出你们小组的成果。

学生进行讨论。

师：老师听到大家讨论的声音也渐渐停止了，那么哪一个小组来分享一下

呢？

生：该函数的定义域为 R ，值域为 $[-3,3]$ ，周期为 π 。一个周期内的函数图象如图所示：

师：回答的很好，大家认可他们小组的答案吗？那好同学们看着电子白板上面，老师也为同学们展示了动态的变化过程。

| | | | | | |
|---|------------------|------------------|-----------------|-------------------|------------------|
| x | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| $\mu = (2x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ | 2π |
| $y = \sin \mu = y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y = 3 \sin \mu = y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ | 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |

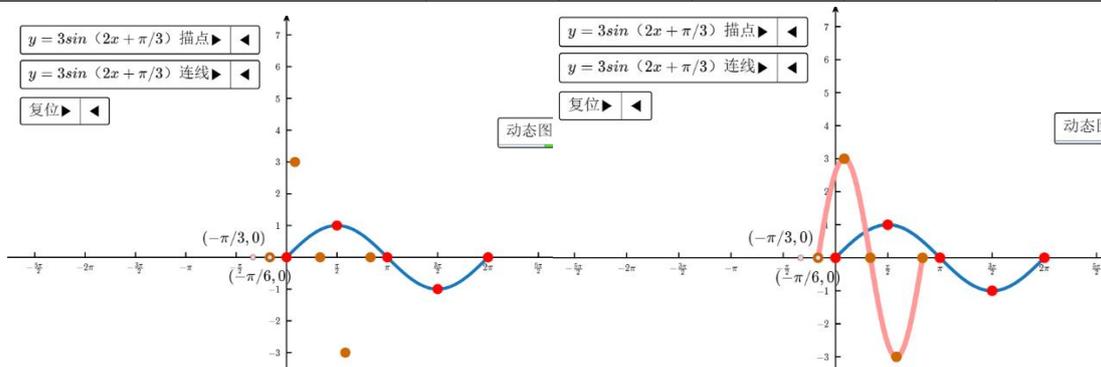


图 5-3-20

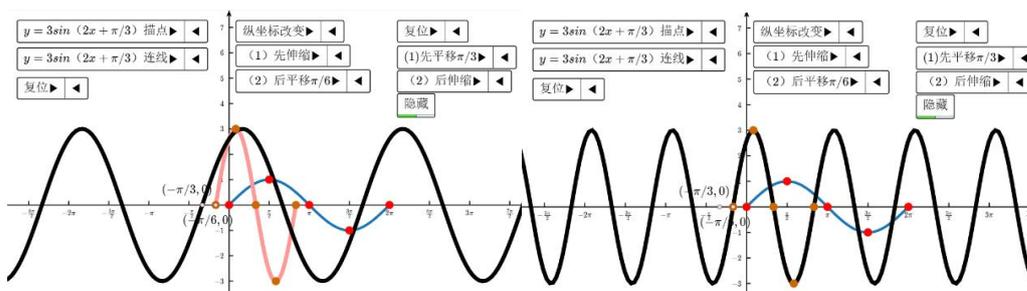


图 5-3-21

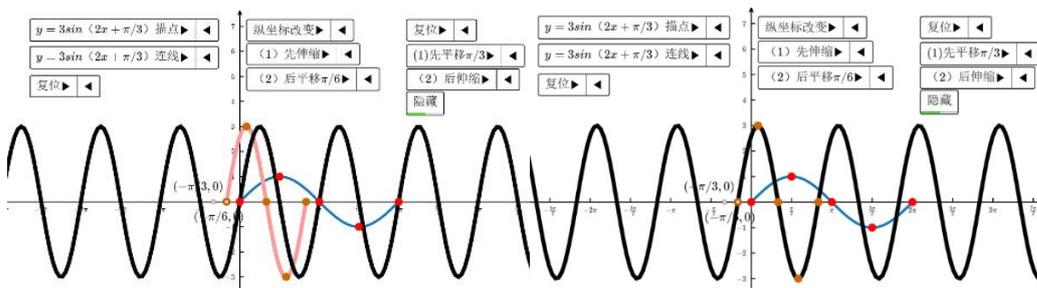


图 5-3-22

(4) 片段 4 (课堂总结)

本节课你主要学习到哪些内容？你的收获是什么？哪个环节没弄清楚？有什么困惑？请 XXX 同学来回答一下。

生：本节课我们主要学习了正弦型函数，并探究了三个参数对正弦型函数的影响。我的疑问是：如果正弦函数到正弦型函数的变化过程中，如果顺序变换，那么它的初相进行变换的过程是否会不一样呢？（同学们进行讨论，等待老师回答）。

师：在例题中我们可以看到如果我们先将 ω 变为原来的 2 倍，周期则变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，即得到 $y = \sin 2x$ ，那么我们知道函数的左右平移是相对 x 而言，那么在这里我们对 $y = \sin 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位就可以得到 $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，这是一种情况；那么接下来我们先来进行平移再将周期进行变化，先将函数向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ ，再将横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ；我们得到的结果都是一样的，但在这里我们就要注意平移的单位是不一样的。

(5) 片段 5 (作业布置)

P50 练习 A 1、5

P51 练习 B 1、4

5.3.4 教学反思

(1) 教学设计方面

在正弦型函数的性质与图象的教学设计中，通过图片让学生首先从生活实际中来认识正弦型函数，设计问题“这类函数叫什么？”，随之提出问题让学生在生活再找出这类函数，然后给出这类函数的概念：正弦型函数，标准形式 $(y = A \sin(\omega x + \varphi))$ 。并在接下来的设计过程中引导学生来进行“五点作图法”，帮助学生从理性的角度上来认识正弦型函数，并能用严谨的语言来表述正弦型函数从正弦函数的变化过程。

在探究三个参数对正弦型函数的影响的教学设计中，提出数学问题让学生类比正弦函数，引发学生思考，学生和教师合作先得出正弦型函数的性质，让学生能够明白知识之间是具备联系性的，并在得出性质后，让学生进行描点作图，通过“五点作图法”作出正弦型函数的图象，学生在对这个过程进行直观

感知，体验知识形成的过程；教师再通过网络画板的动态作图展示来对学生的结论进行验证，再让学生来对数学知识进行表达，即用语言来描述这个变化的过程，通过函数图象来借助几何直观增强学生的对直观想象素养的体验感。

在进行实际问题解决的教学设计中，例题的选择为正弦型函数的基础题，同时对三个参数进行变化，帮助学生快速应用，同时让学生发现参数变化顺序不同的差异性。

此教学设计的优点在于，首先，通过提问让学生进行猜想和探究，再到让学生进行动手操作，让学生通过几何直观来加深对直观想象素养方面知识的理解；其次，在各个参数探究中的问题设计过程中，让学生参与，来回答答案，引发学生思考，引导学生寻找恰当的解决问题的方式；最后就是在例题的设计让学生进行讨论，学生来回答，进一步增强学生对正弦型函数的直观感知，加强几何图形来解决问题的能力，让学生能够用已有的知识来进行问题表征。

此教学设计的不足之处在于，首先让学生进行对最简单参数探究过程中进行图形绘制这个过程，部分学生在对正弦函数学习的时候有可能还没太搞明白。其次，学生们在进行合作交流的时候少数学生的操作过程花费的时间过多，未能及时进行处理，在此处设计没有考虑到。最后，学生在进行同时变换三个参数的时候有部分会出现问题，在进行例题小组讨论的时候，学生也有少数未能正确找到一个周期，在这里的设计稍有不足，没有设计出备用方案。再一个教师觉得例题有点简单，给学生讨论时间不足，以至于学生的出现错误。

此教学设计应该改进之处，考虑到学生当前的学习情况，在引入的过程中抽出少量的时间再次复习前面的知识以便于学生可以在合作探究的过程中节约时间，再设计出备用方案，以考虑到课堂教学时探究时间过长，教师可以及时干预。

(2) 教学实施方面

在此次教学实施的过程中严格按照预定的教学设计进行实施，反向也比较好，学生的课堂参与度也较高。教师通过对实际情境来提出问题，引发学生对问题的发现以及进行直观的表达，让学生经历直观想象的过程，从学习中找到乐趣，从乐趣出发体会数学知识，利用几何直观感悟直观想象。教师与学生在总结的时候也能利用准确的符号和文字语言来对今天所学的数学知识进行表达

进行加深理解，让学生进行类比正弦函数，通过网络画板作图来利用几何直观感知知识之间的联系进而提升直观想象素养。

学生对于将正弦函数变成正弦型函数的过程只能按照教师给定的过程来进行僵硬的记忆，而不能做到真正的理解，由于不是标准的正弦函数，在作图的过程中速度比较慢，出错率也比较高。与此同时，我也发现了在这其中存在的许多的不足，诸如学生在进行合作讨论的时候，碍于时间的关系，只选取了少量的学生来回答问题，教师在进行巡视的时候会对学生在进行讨论的过程中出现的问题进行提醒，这样会使得学生无法进行独立思考；课堂上教学的经验稍有不足以至于在语言上也会有稍许停顿，对时间的把控也有一定的弥补空间。

(3) 学生学习方面

学生基本上都能够积极配合教学，学生在进行正弦型函数的性质与图象的学习过程中学习态度积极，也对其认识较为深刻。教师在教学过程中也采取适当的问题去引发学生思考，让学生先得出性质，再进行函数图象的绘制，通过几何直观来感知函数图象的变化，让学生由更好的学习体验，在学生对正弦型函数的变化的语言表达能够发现绝大多数学生都是能正确的描述正弦函数到正弦型函数的变化过程。

学生在 A 对正弦型函数的影响探究过程中掌握较好。教学的过程也通过恰当的问题来引发学生深思，通过作图呈现的直观性来帮助学生验证性质，同时学生也需要用语言文字来表达这个变化过程。

利用正弦型函数来解决问题的设计相对而言较为简单。在例题中主要通过设计三种参数的变化来让学生进行求解对应函数的性质及完成一个周期内的图形，相对而言，学生的掌握也较好。

5.3.5 课例研究总结

在此次课例实施的过程中，充分发挥了网络画板的作用，教学过程的简便性，课前通过通讯软件将事先画好的图形的网址上传至教室的电脑，不用使用 U 盘再去寻找文件，只需要点击网址打开网页便能完全展示，如若登录网络画板的账号，则事先不用上传网址，即开即用；在教学过程的展示采用动静结合的方式，教师的教学过程不再是传统的展示 PPT 或者手绘，这个过程在对研究三个参数对正弦型函数的影响过程中更为能吸睛。

在此次课例中，通过问题情境的创设来“教思考”，让学生以原有的知识为基础，通过探究以及思考来理解数学知识。教学过程中多次提出数学问题引发学生思考，诸如参数 A 对正弦型函数的影响，以及后面提出的参数之间的组合对正弦型函数的影响，学生并能进行作图，发展学生的几何直观。“教体验”能帮助学生体会数学知识的生成过程，明白知识的形成条件、发展情况。教师提出问题，促进学生思考，让学生分析图形特征，感受几何直观，在活动中教师在网络画板的动态直观展示由正弦函数到正弦型函数的变化过程。“教表达”则是让学生通过生生之间的合作、师生之间的交流来对数学知识进行表达，在学生合作之后的问答过程中，学生能用语言对知识进行表达，在探究各个参数对正弦型函数的影响过程中，学生也能通过文字语言来对变化的过程进行表达。学生能在表达的过程中来发现自己的不足，能在与他人分享中获得经验。学生能够在对本节课内容的复习深入过程中形成较为完整的知识体系。而学生在这个过程的反思也尤为重要，有助于帮助学生提升直观想象素养。

5.4 课例 2：平面的基本事实与推论

5.4.1 教学要素分析

(1) 教材分析

本节内容选自《普通高中数学课程标准实验教科书必修第四册（人教 B 版 2019 版）》第十一章第二节：11.2 平面的基本事实与推论。本节课的知识主要分为三个部分，一是三个公理和三个推论的认识。二是在学习了空间几何体的基础上通过观察分析能用语言表达（包括符号语言、文字语言和图形语言）来刻画平面的基本事实与推论。三是能够通过学习逐步提高从数学的角度来发现、提出、分析以及解决问题的能力，进而提升学生的直观想象素养。

平面的基本事实与推论的学习是与实际密切联系的，通过对平面概念的抽象，接受并理解三个基本事实与推论，为之后的线面、面面位置关系的学习埋下伏笔。在教材中通过观察凳子，将凳子看成一个平面，通过问答的形式，让学生得出基本事实 1，“三个点确定一个平面”是平面的存在性，基于基本事实 1，通过生活例子得出基本事实 2，再通过生活实例得出基本事实 3，而三个推论也都是基于基本事实 1。与人教 A 版相比较，A 版在本节教学内容之前就指明了“平面”的概念，这点是 B 版教材中所没有的，在表示方式上 A 版将对平

面等的关系阐述的更详细，在各个事实与推论的教学过程中只是所选取的生活实例的选取不同。

(2) 学情分析

对高一（4）班的学生的测试卷进行统计分析，可以得出学生的直观想象素养的平均分为 53.77，依据文中对于水平的划分可以得出高一（4）的直观想象素养水平总体处于水平二，具体水平人数占比如下表：

表 5-4-1 高一（4）班的学生直观想象素养人数与占比

| 水平 | 分数段 | 人数 | 百分比 |
|-----|----------|----|-------|
| 水平零 | 0-10 分 | 1 | 3.3% |
| 水平一 | 11-50 分 | 10 | 33.4% |
| 水平二 | 51-80 分 | 18 | 60.0% |
| 水平三 | 81-100 分 | 1 | 3.3% |
| 总和 | | 30 | 100% |

通过上表的分布情况可以看出，高一（4）班学生的直观想象素养在水平二人数最多，这也说明了学生可以对关键而有用信息进行充分的开掘，找出解决问题的思路；少数的学生可以在综合复杂的情境中经过对问题的剖析进而发现数学的规律，找到解决问题的思路。

学生的学习可以在生活中的实例来学习平面的基本事实与推论，但是学生仍然缺乏一定的空间想象力。

(3) 教学目标分析

1) 了解平面的基本事实与推论，能用图形、文字、符号三种语言描述三个基本事实和三个推论，理解三个基本事实和三个推论的地位与作用。

2) 会用平面的基本事实证明点共线、线共点、点线共面三个典型问题，熟悉符号语言、文字语言、图形语言之间的转换。

3) 培养学生的直观想象、数学抽象、逻辑推理能力。

在教学过程中要让学生会用图形、文字、符号三种语言来对三个事实及三个推论进行表述，能够利用三个基本事实说明平面无限延展的特征，能利用三个事实与推论进行作图和证明。在进行三个基本事实探究的过程中，学生体会到研究基本元素之间的位置关系来刻画基本元素的特征，学生能够对问题进行研究，通过直观感知和动手操作得出结论，发展学生的直观想象和数学抽象的素养。

(4) 教学重难点分析

1) 教学重点：平面的基本事实和推论

2) 教学难点：符号语言、文字语言、图形语言之间的转换，对平面的基本事实的理解和集合符号语言的表示，对推论的说理证明。

本节课是对三个基本事实与推论进行研究，是立体几何的理论基础，学生在学习的过程中要理解到“平面”的“无限延展”是客观存在的，就像“直线”的“无限延伸”一元，本节课的学习中，学生要学会用图形、文字、符号语言来对平面的基本事实与推论进行表述，相对于来说图形语言具备直观性，文字语言较为通俗易懂，但是结合集合的符号语言来描述几何元素之间的关系，对学生来说有一点困难，所以教师的教学过程需要进行尽可能地引导学生来理解图形和文字语言，让学生逐步熟悉符号语言进行表达。

5.4.2 教学过程设计

(1) 片段 1：小视频 1 和 2（情景导入，引入新课）

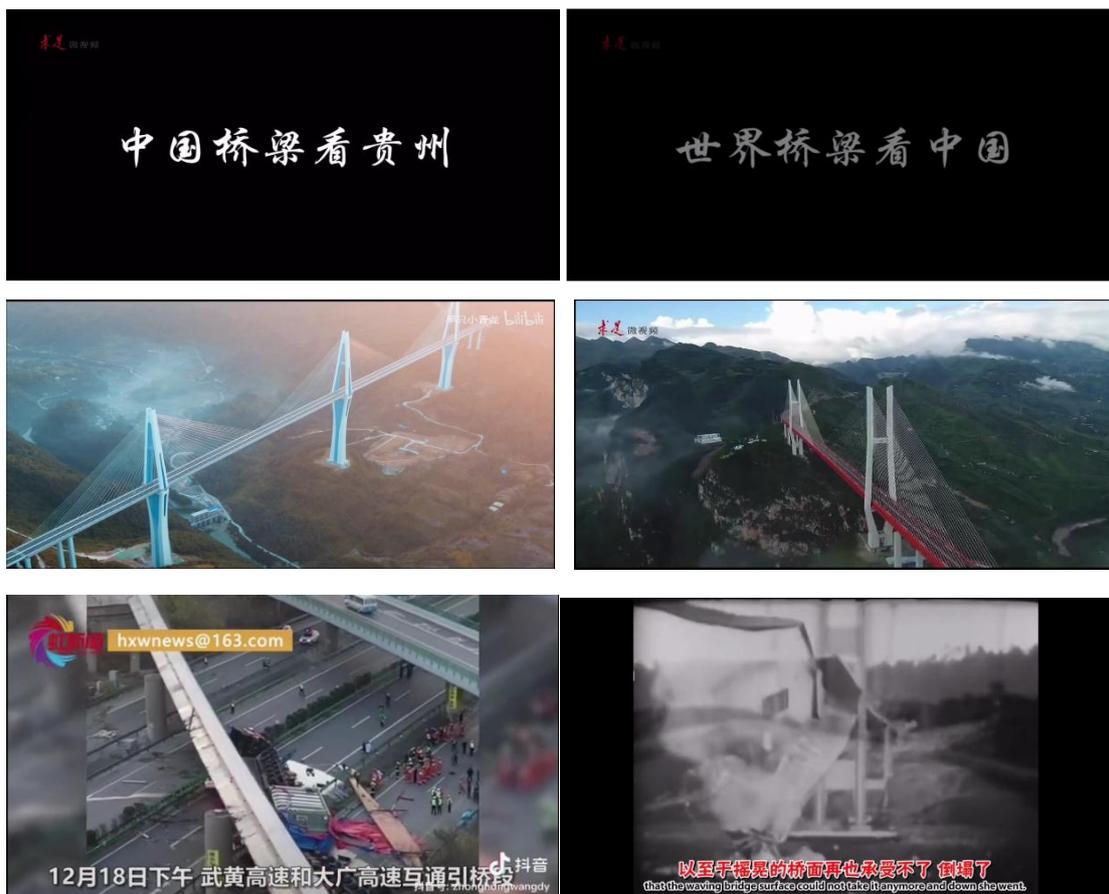


图 5-4-1

问题 1：观察上面两个小视频，你发现了什么？

【设计意图】让学生能在实际情境中通过观察、思考以及猜想来对问题进行表述，帮助学生将生活中的实例与知识点相关联，同时也需要学生具备一定的直观想象素养来。

问题 2：如何把一个平面固定在空间中，至少需要几个点？

【设计意图】创设直观情景，让学生去经历感性和理性的直观，促进学生进行数学思考，用学生熟悉且常见的桥梁作为背景，利用实际生活中的情景引入平面如何固定的问题来激发学生思考，让学生通过思考来表达出数学知识，帮助学生与生活实际相联系。通过小视频的观看让学生感受平面是否能固定？需要几个点固定？并能通过一定的探讨得出初步的结论，并对结论进行验证，带着问题进行操作，让学生的思考更具备连贯性。

(2) 片段 2：（新知探究，得出概念）

概念介绍：在初中，我们学习过直线，回忆一下直线有哪些特征？观察下面三个“平面”，思考一下平面应该具有哪些特征？

（直线很“直”且“无限延伸；类似地，平面很“平”且“无限延展”）

活动 1：取五根 10cm 长，直径为 3mm 的木棍以及一个 15×10cm 的长方形纸板，假设木棍仅为一个支点，不被视为一个平面，来进行具体操作，如果需要把一个平面固定在空间中，至少需要几个点？

追问 1：通过活动 1，四个点能固定平面吗？五个点呢？

追问 2：四个点、五个点一定能固定一个平面吗？

【设计意图】通过这样一个例子，来让学生能够对平面固定这样的概念进行实际具体的操作，让学生进行思考，学生在进行动手操作的过程中来体验知识形成的过程（几个点能固定平面），学生通过小组交流讨论和思考来对所得问题进行语言表达，包括图形语言、符号语言和文字语言。

在这个过程中教师会采用网络画板辅助教学，在学生们讨论得出结论后进行验证，通过网络画板进行直观的展示空间图形，学生的思维得到发散，不会再局限于平面，而是在空间中来确定平面，在这个过程中，教师会给予学生充分的思考，然后再将结论进行表达，培养了学生的分析和解决问题的能力，也提高了学生的空间想象力。

问题 2：我们经常会在厨房看到用于挂物的置物板，那么我们将它抽象成

数学问题：将一条直线固定在平面内，至少需要几个点？

【设计意图】通过实际生活的例子抽象出数学问题，让学生凭借生活经验和自己的直观想象能力判断问题。

问题 3：进行裁纸的时候，可以将刀锋视作在一个平面进行运动，那么裁纸刀所裁出的是什么样的痕迹？

追问 1：若将刀锋视作一个平面，那么这两个平面进行相交时，其公共点具有怎样的特点？

【设计意图】合理科学的问题的提出，引发学生来思考问题，思考两个平面的公共点会有怎样的特征，学生用两张白纸模拟平面来进行数学问题的体验，小组内讨论得出结论对数学问题进行表达。

在这个过程中采用网络画板的空间动态图形的展示，一来引起学生的注意力，二来这样的教学过程学生更容易记住；学生的视觉受到一定的刺激，思考问题的角度也会多样，网络画板这样展示空间图形的动态过程更能对学生的思维发展起到良好的促进作用。

问题 4：除了用点固定平面位置外，是否可以用直线来固定平面的位置？

追问 1：直线最少要几条才能固定一个平面？

【设计意图】通过前面对三个基本事实的学习，引导学生得出推论，学生可以充分发挥自己的直观想象能力来进行动手操作验证。

(3) 片段 3（例题讲解）

例 1：如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 是 CC_1 上的一点（不与 C 、 C_1 重合）试说明 D_1 、 B 、 F 三个点确定的平面与平面 $ABCD$ 相交，并画出这两个平面的交线。

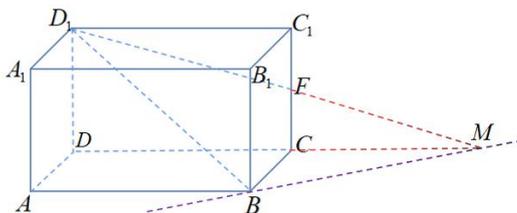


图 5-4-2

【设计意图】学生学习了新知识的结论并进行思考，通过例题的练习来体验所获得的结论；学生可以清晰地感知空间几何体并能运用新学习的知识对问

题进行猜想和表述。

(4) 片段 4 (课堂总结)

本节课学习的内容是什么？这三个基本事实和三个推论能否灵活运用？你的收获？你仍然存在的疑问？

【设计意图】在课堂的结尾给学生留足时间对平面的基本事实与推论进行总结，让学生来阐述学习过的知识，包括符号语言、文字语言和图形语言来进行表达，建立起完整的知识框架。

(5) 片段 5 (作业布置)

P95 习题 11-2A 2、4

P96 习题 11-2B 1、4、5

5.4.3 课堂实录

此次教学于 2023 年 6 月 21 日下午第二节课，在该中学高一（4）班实施。

(1) 片段 1 (情景导入，引入新课)

教师利用 PPT 放出两段视频（一段为桥梁的视频，一段为设施搭建不善引发事故的视频），让学生观察……

师：同学生观察这两段视频，从视频中你们观察到了什么？

生：学生举手回答，“很多桥梁”“有桥梁倒塌了”“倒塌的桥只有一根柱子支撑”。

师：有同学观察到了倒塌的桥梁只有一根柱子支撑，那同学们想一下要让桥梁进行固定，我们应该怎么办呢？

生：增加支撑点。

师：这位同学回答的非常好，那么同学们在初中，我们学习过直线，回忆一下直线有哪些特征？观察下面三个“平面”，思考一下平面应该具有哪些特征？

生：直线很“直”且“无限延伸”。

师：类似地，平面很“平”且“无限延展”。

观察 PPT 中几位数学家对平面的定义并思考我们可以用哪些元素来研究平面？

生：直线、点

师：既然同学们都说到了直线和点，那我们就从最简单的点开始，同学生固定一个平面，最少需要几个点呢？那么我们就带着这样的一个问题一起来研究平面吧。

(2) 片段 2 (探究新知)

师：同学们，拿起你们桌子上的木棍和纸板来动手操作一下，究竟要几个点才能固定一个平面呢？

生：（操作完成的学生），最少要三个。

师：最少要三个，这样的三个吗？（教师演示出共线的三个点）。

生：齐声回答，不共线的三个点。

师：那既然三个点可以确定一个平面，那么四个点、五个点呢？

生：可以确定平面。

教师动手操作，四个点、五个点支撑平面，但是一但挪动任意一根平面也是可以被确定的。

师：所以我们确定一个平面至少需要三个不共线的点。

教师演示网络画板动图，一个点、两个点、三个点、四个点。

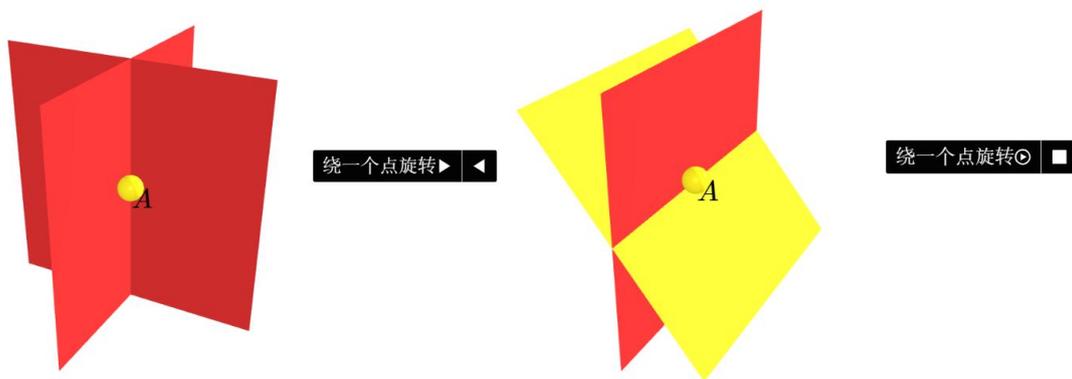


图 5-4-3

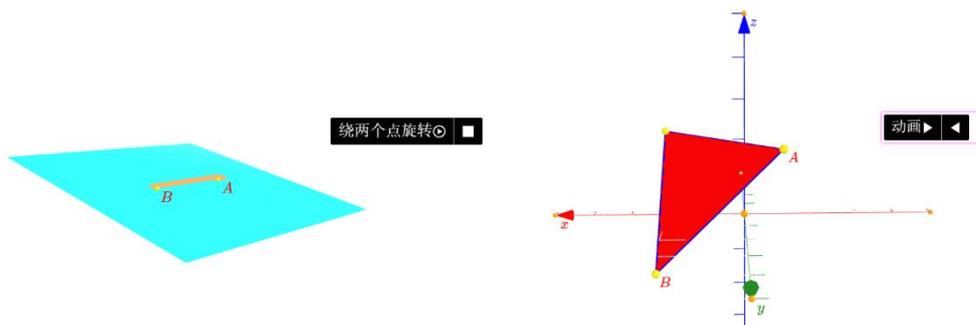


图 5-4-4

师：我们通过观察.网络画板上面的动画演示可以验证我们的猜想，固定一个平面最少需要三个不共线的点。这就是我们今天要学习的基本事实一：经过不共线的三个点，有且只有一个平面。这是我们的文字语言。那么它应该还有图形语言和符号语言，请同学们来看 PPT。

师：我们已经学习基本事实一，这是确定一个平面的依据，也是判定若干个点共面的依据。那同学们我们再来思考这样一个问题，同学们应该都知道厨房置物架用来挂菜刀、勺子之类的，那么我们将置物架看做成一条直线，我们想要将这条直线固定在平面内，至少需要几个点呢？

生：最少需要两个点。

师：那这就是我们的基本事实二，如果一条直线上两个点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内。这是我们用来判定之现在平面内的依据，也是判定点在平面内的方法。这是文字描述，那么老师请两位同学上来板书一下符号语言和图形语言。

生： $A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$



图 5-4-5

师：这两位学生回答的非常好，平面的基本事实二是用来判定直线是否在平面内以及判断一个面是否是平面。如果一个面内的任意两点所确定的直线都在这个平面内，那么这个面就是平面。例如，球面不是一个平面，因为球面上任意两点所确定的直线中，只有两个点在球面上。

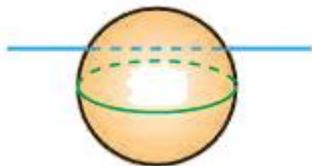


图 5-4-6

师：同学们我们在学习了基本事实一和基本事实二来思考一下，经过一条直线和一点，能确定平面吗？

生：可以。

师：那么我们应该怎样来证明呢。

生：由平面的基本事实二可以知道一条直线的两个点在平面上，那么这条直线就在这个平面内，这就有两个点了，再有一个点就可以确定平面了。那么请一位同学来对推论一进行符号语言的展示。

生： $C \notin$ 直线 AB ，则存在唯一平面 α ，使得 $C \in \alpha$ ， $AB \subset \alpha$ 。

师：回答的很好，推论一是我们用来判定若干条直线共面或若干个平面重合的依据，也是判断几何图形是平面图形的依据。那么同学们我们再观察一下图片，如图把三角尺的一个角立在课桌上，三角尺所在平面与桌面所在的平面是否只会相交于 B ？为什么？

生：并不止交于 B 点，前面的学习我们知道平面是无限延展的。

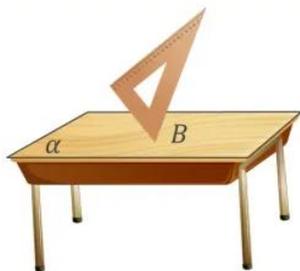


图 5-4-7

师：很不错的回答，那同学们我们来看这样的一个动图，将平面进行延伸可以看到两个不重合的平面有一个公共点，将平面延伸可以发现它们之间只有一条交线。这样就得到了基本事实三，请同学们来看电子白板。

网络画板展示。

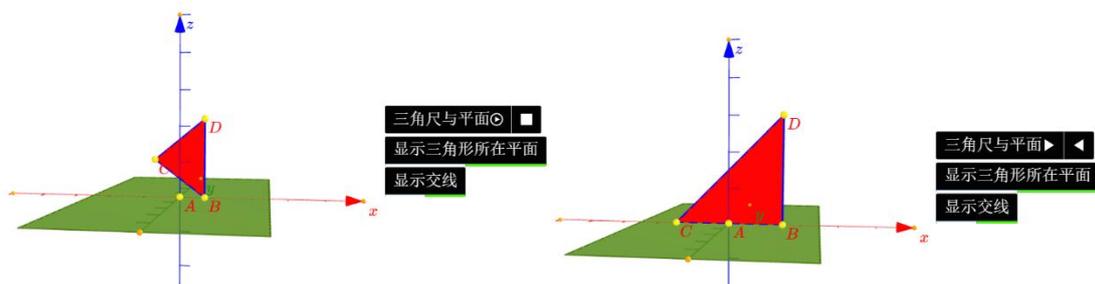


图 5-4-8

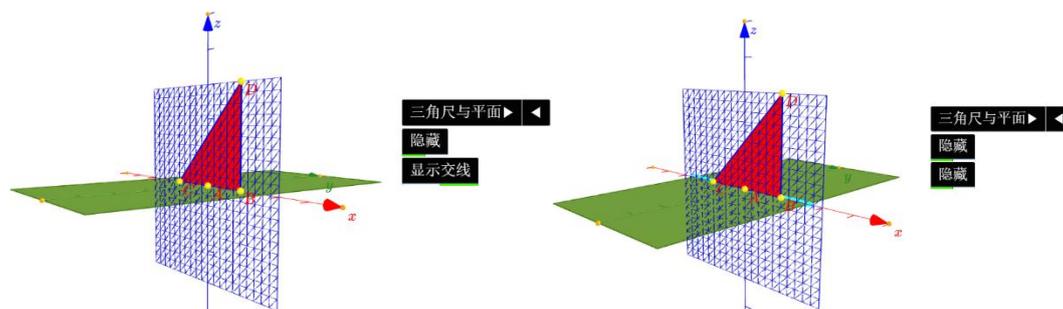


图 5-4-9

师：同学们看完了动态图的展示过程，那么请一位同学来用符号语言描述一下基本事实三。

生： $\alpha \cap \beta = A, \Rightarrow \alpha \cap \beta = m, A \in m.$

师：回答的很好。基本事实三可以用来判定两个平面是否相交，也可以判定若干个点在象个相交平面的交线上。这样我们就学习三个基本事实和一个推论，那么还剩两个推论，我们接着来观察下面这一个情景。下图是一张倒置的凳子，你能用所学知识检查一下凳子的四条腿的末端是否在同一平面内？如果只用两条直线能否确定一个平面。



图 5-4-10

生：平行的两条直线可以确定一个平面；相交的平面可以确定一个平面。

师：很不错的回答，这位同学一口气就将我们的推论二和三都说出来了。那我们用标准的文字语言来描述这两个推论吧。推论二：经过两条相交直线，有且只有一个平面；推论三经过两条平行直线，有且只有一个平面。那为什么呢？

生：在这两个推论上我们可以回归到基本事实一和二上。

师：请两位同学分别将这两个推论符号语言和图形语言在黑板上展示出来。学生黑板上书写。

(3) 片段三（例题讲解）

师：新知识已经学习完毕，那么接下来就来挑战一下例题吧。

例 1：判断正误

- (1) 三个点可以确定一个平面
- (2) 一条直线和直线外的一点可以确定一个平面
- (3) 四边形是平面图形
- (4) 两条不重合的直线可以确定一个平面

师生活动，挑选举手的同学来回答问题。

师：接下来我们再来看另外一道例题，

例 2：如图所示，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， F 是 CC_1 上的一点（不与 C 、 C_1 重合）试说明 D_1 、 B 、 F 三个点确定的平面与平面 $ABCD$ 相交，并画出这两个平面的交线。

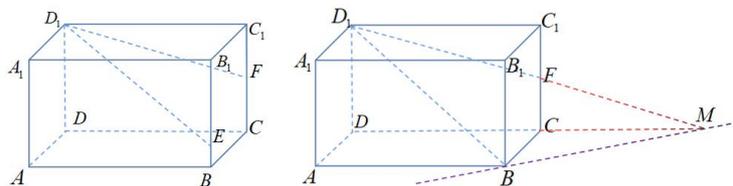


图 5-4-11

生：通过延申直线利用平面的基本事实和推论进行证明。

(4) 片段 4（课堂小结）

师：这节课学习的内容有些什么？这三个基本事实和三个推论能否灵活运用？你的收获？你仍然存在的疑问？请 XX 同学来回答这个问题，并谈谈你自身的感受。

生：三个基本事实和三个推论，并学习了三种语言表达。可以进行灵活运用。我的收获是通过课堂的学习，并进行实验的直观感知来发现平面的基本事实与推论，发展了我们的空间想象能力，使得我们对数学的兴趣更加深了。目前没有什么疑惑。

(5) 片段 5（作业布置）

P95 习题 11-2A 2、4

P96 习题 11-2B 1、4、5

5.4.4 教学反思

(1) 教学设计方面

在平面的基本事实与推论的教学设计中，首先通过两个小视频进行情景导

入，并提出问题“怎样固定平面？”来引发学生思考，随之通过实际动手操作，让学生来得出基本事实一，教师再通过网络画板来展示动态图验证学生得出的结论，帮助学生来接受和认可基本事实一，最后也要让学生能用严谨的语言来表达基本事实。

在基本事实二和三的设计中，采用实际生活中的例子来提出问题引发学生思考，让学生观察感知，进行模型的分析 and 猜想，教师通过网络画板的辅助教学来展示动态图形的变化过程，学生在问题的带动下，进行主动的思考，经历了从现实生活中抽象出的几何图形和教师所提出的几何问题来进行探讨，发展了学生的逻辑推理素养和直观想象素养。而在后面三个推论的设计中更多的是要让学生感知动态变化的过程，以及利用起三个基本事实得到这三个推论。

在进行设计的过程中，例题 1 就是对概念的教学的应用，也是连接生活实际的桥梁，能帮助学生快速的进行应用；例 2 则是综合类的题型，需要学生具备一定程度空间想象能力才能进行作辅助图进行分析。

此篇教学设计的好处在于在对数学知识进行探索的过程中能够更为注重去引导学生的思维朝着预定的方向发展，让学生主动去思考，主动在头脑中呈现图形；其次，教师利用问题来引导学生进行思考发现规律，得到结论，并通过网络画板的动态展示让学生的视觉得到“满足”，让学生的思维拓展；最后，则是在例题的设计过程中，先强化学生的概念，再进行综合应用让学生能够灵活运用平面的基本事实与推论；同时在整个教学过程中更为注重学生的表达，除了基本事实一教师完全展示三种语言表达，剩下的两个基本事实和三个推论的其他语言表达都交给学生。

但在此教学设计中仍存在不足：首先，在基本事实一的动手操作环节，部分学生只用一根木棍找到就将平面固定，这部分学生忘记了开头补充的概念，平面是无限延展的，因此在这一部分的设计中会有一些与众不同的结果，以至于他们相互之间的讨论有一点混乱；其次，学生在进行其它语言的表达中尤其是符号语言的表达有些不准确，以至于结果的意思不全面；最后，则是无法让学生自己动手来制作动态图，一来需要学习成本，再者需要特定的教室。

此教学设计需要改进的部分，教学过程的设计没有考虑全面，在对基本事实 1 的探究过程中没有预设到学生动手操作可能进行呈现的多种情况，再者学

生没有能够动手自己来用网络画板进行绘制动态图。

(2) 教学实施方面

此次的教学实施过程严格按照预定的教学设计进行实施，学生的反馈较好，学生的参与度较高。通过现实的情境提出相应的问题，让学生进行思考得出基本结论，并通过网络画板向学生展示直观的动态图，在每一次探究的过程中都会随机挑选一名学生来进行总结，学生能用口述准确的表述出文字语言，进而不仅能加深回答问题的学生，同时听问题的学生都能获得知识的强化，在教学过程中也让学生亲自动手来操作，让学生的知识体系能够更为连贯。

没有进行对知识的深层剖析，而只是简单的记忆下来的学生也是有的，不过这种情况仍然属于极少数，在进行例题 2 的时候学生的脚步明显放慢了，部分学生很难直接想象到目标图形，也很难着手画出辅助图。直观图的演示过程可能有一些快，有些学生可能未反应过来，教师在引导的过程也给出了较多的提示，学生的自主思考时间也稍显不足：教师课堂经验上的不足，教学过程中的停顿，时间上的把控等。

(3) 学生学习方面

学生在整个过程中积极配合。在动手操作过程中学生积极参与。教学过程中也通过了恰当的问题引发学生的思考，学生通过生活中的实例图片也抽象出数学问题，同时，学生在经过教学后从学生的表达中可以看出学生能用三种语言来描述平面的基本事实与推论。

学生对三个基本事实和三个推论的掌握较好。教学中通过问题的方式来引导学生进行直观感知，在实例中来引发学生思考，有动态图展示来验证同学们的猜想，同时也注重学生的三种表达形式。

利用平面的基本事实与推论来解决实际问题的设计也相对简单。在例 1 中，主要是概念的考察，内容也相对简单，从学生的回答和解释过程中也可以看出学生对该知识掌握的比较。在例 2 中，设计的问题需要学生能综合运用今天所学的知识，让学生能够充分利用平面的基本事实与推论来解决问题。

5.4.5 课例研究总结

在此次课例教学的实施过程中，极大的发挥了网络画板的 3D 作图能力，教学过程更为简洁方便，充分发挥了网络画板的作用，教学过程的简便性，在

教学过程的展示采用动静结合的方式。

本节课的设计是为了让学生能够对公理进行直观感知，发展学生的空间想象能力，进而提升学生的直观想象素养。在活动中让学生来进行亲身体验对于不共线的三个点是能够确定一个平面这一基本事实，让学生在这个学习的过程中所获得的知识更加直观，学生在对于网络画板的动态直观展示过程中，体悟到数学知识的生成过程，帮助学生理解和学习新知识。在交流的过程中也会有学生之间的探讨，学生与教师之间的对话，在与学生交流的这个宝贵过程中，每个学生都会展示出自己的不同的看法，学生与学生之间的思维也会变得更为灵活，教师也能在这个交流的过程中为学生解决困惑，大家一起进步。在最后课堂的总结中，将最后的几分钟交给学生，让学生来做这个小老师，帮助学生更好的理解新知识，能让学生的知识体系更加完善。

6 研究总结及反思

6.1 研究总结

本文结合“网络画板”、以“三教”理念为理论指导和高一学生的直观想象素养的现状进行课例研究分析，主要开展了以下工作：

(1) 试卷测试的结果表明学生的直观想象素养的均值为 50.13，所对应的水平为直观想象素养所划分的水平二的较低阶段，即表示大部分学生基本能达到这个水平。只有极少数学生能够通过想象对复杂的数学问题进行直观表达，反映数学问题的本质，形成解决问题的思路。高一学生的直观想象素养在选科差异和性别差异上都没有显著性差异；因此在对学生进行教学的过程中不需要刻意对性别或者选科方向不同的学生进行单独教学，但同时也不能忽略极少数学生的学习成绩较差的学生。

(2) 通过对调查问卷的分析所得到的相对应的结果展示，大部分的学生对于数学知识的学习还是充满着极大的热爱，他们也相信通过对直观想象素养方面的知识的学习能对数学成绩具有较大的作用，也认为网络画板等教学辅助软件能提高学生的数学成绩，甚至希望教学教学的过程能多采用诸如网络画板等现代信息技术来教学。并且通过 SPSS 分析得出男生在对学习数学的态度、直观想象素养的态度、直观想象素养各方面的表现这三个维度高于女生，对教学辅助软件的了解程度上男生低于女生。从均值上看，性别在学生对教学辅助软件培养直观想象素养的态度和对老师培养直观想象素养的看法这两个维度间均值差异性不大。而物理方向的学生在对学习数学的态度、直观想象素养的态度、直观想象素养各方面的表现这三个维度高于历史方向，学生对教学辅助软件的了解程度、对教学辅助软件培养直观想象素养的态度和对老师培养直观想象素养的看法这三个维度均低于历史方向。

(3) 通过对教师访谈得出，影响学生直观想象素养的因素有：学生自身的知识储备量、学生对课本及现实生活中直观想象素养的知识的了解程度不够、学生的学习习惯（课前预习、课后复习、时间分配、任务分配等）没有达标、

对数学问题的学习不够深入等

(4) 在进行课堂教学的过程中要培养学生的直观想象素养需要注意：首先要明确学生目前直观想象素养所处的阶段，教学过程中突出教学重难点，情景设计的过程中突出培养学生直观想象素养；数学的几何直观和空间想象力，数学的公理和性质的形成过程；注重现代信息技术诸如网络画板等融入数学课堂；注重学生的思维能力，数学表达能力，给予学生足够的时间来进行独立分析完成数学问题；改善教学过程，以学生为主体，教师为主导，培养学生的直观想象素养。

(5) 通过课例研究的实施、分析和总结可以得出在实际的教学过程中使用网络画板能对学生的直观想象素养具有促进作用，具体表现为在“三教”理念的指导下，即“教思考”通过问题的提出让学生思考变化过程，提升学生的数学思维能力；“教体验”通过网络画板来展示几何直观和空间想象方面的知识提升学生对知识的感悟能力；“教表达”让学生进行数学表达来加深对数学知识的理解。

6.2 研究反思

本文在进行研究的过程中也会具备一些不足之处，具体主要表现为如下几点：

(1) 在进行课例研究的过程中，对于研究所选取的对象比较单一，只选取了ZY市某间市直属高中的高一年级，其他年级的调查未有体现，如果将调查对象扩展的更为全面，能够覆盖到全年级以及市内其他具有代表性的高中，进行分学段、分区域的进行对比分析会更好的反应学生的直观想象素养。

(2) 通过SPSS检测，在这个过程中所采用的测试卷和调查问卷的信效度均合格，但是测试卷中的题目仍然有所欠缺，所关注的问题也没有全面的体现在问卷中。

(3) 在正式进行开展课例进行课堂实录时，由于自身的教学经验不够丰富，教学阅历不够多，因此在进行理论教学的时候也会表现出不尽不祥的有点尴尬的瞬间，对教学内容的分析还不够全面，说明仍然需要对自身教学技能提升而加大学习，课堂上的时间也把控的不够好。

通过对相关的文献的阅读，对网络画板、“三教”理念、直观想象素养、

课例研究有了一定的了解，将这些理念进行合理的应用，设计出对应的教学设计，能极大地提高学生的直观想象素养。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2018. 4-7, 74.
- [2] 张朝立."网络画板在初中数学几何教学的应用——以“圆周角”教学为例".融合信息技术·赋能课程教学创新——第六届中小学数字化教学研讨会论文案例集.Ed.王志刚,2021, 551-555.
- [3] 严虹,游泰杰,吕传汉.对数学教学中“教思考教体验教表达”的认识与思考[J].数学教育学报,2017,26(05):26-30.
- [4] 邓子薇.初中数学教学中“教思考”的教学设计案例研究[D].贵州师范大学,2018.
- [5] 李晶晶.基于“三教”理念的初中几何证明教学研究[D].贵州师范大学,2020.DOI:10.27048/d.cnki.ggzsu.2020.000540.
- [6] 孙迪.“三教”理念下初中数学课堂“说数学”活动行动研析[D].贵州师范大学,2020.DOI:10.27048/d.cnki.ggzsu.2020.000027.
- [7] 张娜.DeSeCo 项目关于核心素养的研究及启示[J].教育科学研究,2013,(10):39-45.
- [8] 教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见(摘编)[J].青海教育,2014(12):4-5.
- [9] 马云鹏.关于数学核心素养的几个问题[J].课程.教材.教法,2015,35(09):36-39.DOI:10.19877/j.cnki.kcjcjf.2015.09.006.
- [10] 中华人民共和国教育部. 义务教育阶段数学课程标准 (2011 年版) [S]. 北京师范大学出版社.
- [11] 中华人民共和国教育部编订中学数学教学大纲(修订草案)1956——1957 学年度[J].数学通报,1956(08):24-39.
- [12] 代钦.历史文化视角下的中国数学课例研究[J].数学通报,2018,57(08):1-6+12.
- [13] 郭衍,曹一鸣.高中数学课程中信息技术使用的国际比较——基于中国等十四国高中数学课程标准的研究[J].中国电化教育,2016(05):119-125.
- [14] 王姗姗.欧几里得和他的《几何原本》[J].初中生世界,2021(09):57-58.
- [15] 中学数学教学大纲(草案)[J].数学通报,1953(Z2):1-19.
- [16] 张定强,裴阳.中小學生直观想象素养研究:回顾与展望[J]北京教育学院学报, 2020, 34(05):24-32.DOI:10.16398/jejieissn1008-228x.2020.05.004.
- [17] 周聪寅.K 市高二学生直观想象素养现状与培养策略研究[D].云南师范大学,2022.DOI:10.27459/d.cnki.gynfc.2022.000062.
- [18] 周艳祖.高中生直观想象素养的现状调查及教学建议[J].中学数

- 学,2018(19):32-34.
- [19] 吴文俊主编;李迪分主编.中国数学史大系 第1卷[M].-北京:北京师范大学出版社,1998.9
- [20] 凌世超.基于核心素养下小学生数学几何直观能力的培养[J].家长,2020(29):18+20.
- [21] 刘文生.注重几何实验教学 提升直观想象素养——谈立体几何初步的学习[J].福建中学数学,2022(02):33-36.
- [22] 郭龙祥.高中数学直观想象能力培养策略探寻[J].数学教学通讯,2021(06):62-63.
- [23] 杨东.从几何直观到空间想象——以一道习题的在线直播教学为例[J].中学数学教学参考,2020(30):12-14.
- [24] 周霜.高中生直观想象素养现状调查及培养策略研究[D].陕西师范大学,2021.DOI:10.27292/d.cnki.gsxfu.2021.000349.
- [25] 虞大芳.基于直观想象素养培养的初中数学微课教学研究[D].西南大学,2020.DOI:10.27684/d.cnki.gxndx.2020.004436.
- [26] 施佳莹.国内近十五年直观想象能力研究综述[J].中学数学教学,2022(04):1-6.
- [27] 李向婷.高中生数学直观想象素养发展研究[D].西南大学,2021.DOI:10.27684/d.cnki.gxndx.2021.002056.
- [28] 谢传定.指导空间想象培养数学几何直观能力[J].小学生(中旬刊),2022(04):95-96.
- [29] Meng Yun, Yang Z .Research on Mathematical Intuitive Imagination Literacy in China[J].Asian Journal of Education and Social Studies,2022,27-39.
- [30] 王建根,刘麦学.从现代信息处理技术看数学教学改革[J].数学教育学报,1999(04):52-54.
- [31] 苏洪雨,江雪萍.乔治·布尔:现代信息技术的数学基础奠基者[J].自然辩证法通讯,2008(03):80-87+112.
- [32] 李保臻,孙名符,韩晓玲.信息技术支持下的数学教学应处理好几个关系[J].中国电化教育,2011(05):97-101+105.
- [33] 周大众.基于信息技术的数学教学矛盾及其化解[J].教学与管理,2018(13):45-47.
- [34] 柯俊.课程视野中之信息技术与课程整合研究[D].南京师范大学,2005.
- [35] 柳成行.数学教师现代信息技术能力的自我培养[J].成人教育,2010,30(11):39-40.
- [36] 张海红.走向现代信息技术视野的小学数学课堂[J].中国电化教育,2002(05):26-27.
- [37] 王爱玲.现代信息技术在数学教育中的应用与现状调查研究[J].数学教育学报,2009,18(02):69-71.
- [38] 高素敏.利用现代信息技术提高中学数学教学质量[J].教育探索,2009(10):55-56.

- [39]张丽娟,陈孝国.信息技术下的合作学习在数学教学中的运用[J].继续教育研究,2008(01):108-109.
- [40]王光生,赵兴龙,付东方.信息技术环境下的数学探究学习[J].中国电化教育,2006(04):48-51.
- [41]骆魁敏.现代信息技术环境下高中数学研究性学习教学策略初探[J].电化教育研究,2003(01):76-80.DOI:10.13811/j.cnki.eer.2003.01.017.
- [42]闻杰.数学教学与现代信息技术的整合行动——动点间距离最小值的探索[J].数学通报,2004(09):15-17.
- [43]卢明.从三个实例分析信息技术在数学应用教学中的作用[J].数学通报,2007(07):48-52.
- [44]李渺,钟志华.利用现代信息技术实现数学教学的3个转化——以“勾股定理”课为例[J].数学通报,2016,55(02):57-60.
- [45]中华人民共和国教育部.教育信息化2.0行动计划 [EB/OL]. (2018-04-18) [2022-03-01]. <http://www.moe.gov.cn/srcsite/A16/s3342/201804/t20180425-334188.html>.
- [46]王锦秋,韦煜,陈小红.网络画板在立体几何教学中的应用——以“球的表面积与体积”教学为例[J].高中数学教与学,2022(16):51-54.
- [47]樊甜甜.智慧环境下“网络画板”在初中数学教学的设计与实践研究[D].宁夏大学,2022.DOI:10.27257/d.cnki.gnxhc.2022.000608.
- [48]方王洋.运用网络画板辅助二次函数的综合实践教学研究[D].海南师范大学,2022.DOI:10.27719/d.cnki.ghnsf.2022.000301.
- [49]李赵容.基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究[D].贵州师范大学,2021.DOI:10.27048/d.cnki.ggzsu.2021.000162.
- [50]刘正章.网络画板辅助教学的实践与认识——以“函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 图象”的教学为例[J].高中数学教与学,2018(24):17-19.
- [51]张兴福.简析网络画板在中学数学教学中的应用[J].智力,2020(07):61-63.
- [52]刁露.浅谈网络画板在小、中、高三阶段数学教学中的应用[J].数学学习与研究,2021(19):64-65.
- [53]李萌.基于网络画板的小学生数学抽象思维能力培养研究[D].沈阳师范大学,2020.DOI:10.27328/d.cnki.gshsc.2020.000960.
- [54]杜佳佳.应用网络画板培养小学生几何直观能力的教学策略研究[D].新疆师范大学,2021.DOI:10.27432/d.cnki.gxsfu.2021.000177.
- [55]葛海波.教师专业发展视野下的“课例研究”研究[D].安徽师范大学,2012.
- [56]王贺欣.我国课例研究实施现状与对策研究[D].天津大学,2020.DOI:10.27356/d.cnki.gtjdu.2020.001802.
- [57]顾泠沅,王洁.教师在教育行动中成长——以课例为载体的教师教育模式研究[J].全球教育展望,2003,32(01):44-49.
- [58]教育部关于积极推进中小学评价与考试制度改革的通知[J].中华人民共和国

- 国务院公报,2003(19):32-35.
- [59]中共中央国务院关于全面深化新时代教师队伍建设改革的意见[N].人民日报,2018-02-01(001).
- [60]教师教育振兴行动计划(2018—2022年)[J].重庆与世界,2018(08):15-18.
- [61]杨晓.中日中小学课例研究的比较研究[D].湖南师范大学,2015.
- [62]黎雪梅.日、美和香港地区课例研究特征及启示[J].中国成人教育,2013(12):113-115.
- [63]赵学静.基于“课例研究”的数学学科教学内容知识(MPCK)的研究与实践[D].合肥师范学院,2022.DOI:10.27829/d.cnki.ghfsy.2022.000053.
- [64]摆超.数学史融入小学“圆”单元教学的课例研究[D].信阳师范学院,2022.DOI:10.27435/d.cnki.gxsfc.2022.000351.
- [65]朱风伦.小学方程教学中思想方法指导及课例研究[D].山东师范大学,2015.
- [66]杨明.高中生直观想象素养水平现状研究[J].科幻画报,2022(02):175-176.
- [67]杨晓明.SPSS在教育统计中应用[M].--2版.--北京:高等教育出版社,2012.5
- [68]裴娣娜.教育研究方法导论[M].-合肥:安徽教育出版社,1995.8
- [69]裴阳.高中生直观想象素养水平调查研究[D].西北师范大学,2020.DOI:10.27410/d.cnki.gxbfu.2020.000435.
- [70]李希峰.高中生数学直观想象素养提升的调查研究[D].曲阜师范大学,2022.DOI:10.27267/d.cnki.gqfsu.2022.000516.

3. 已知关于 x 的二次函数 $f(x) = ax^2 - bx + 1$ (20 分) (若无法作答, 请简要阐明理由)

(1) 记集合 $A = \{-1, 1, 2\}$ 与 $B = \{-2, -1, 1\}$, 分别从两个集合中随机抽取一个数, 记作 a, b , 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是减函数的概率;

(2) 设点 (a, b) 是区域 $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ 内的随机点, 求函数 $f(x)$ 在区间

$[1, +\infty)$ 上是增函数的概率。

4. 已知向量 $\vec{m} = (\sqrt{3} \cos wx, 1), \vec{n} = (\sin wx, \cos^2 wx - \frac{1}{2})(w > 0)$, 函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$, 其最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 。(25 分) (若无法作答, 请简要阐明理由)

(1) 求 $f(x)$ 的表达式

(2) 将函数的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 再将得到的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 得到 $y = g(x)$, 求出 $y = g(x)$ 的单调递增区间, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 求出函数 $y = g(x)$ 的值域。

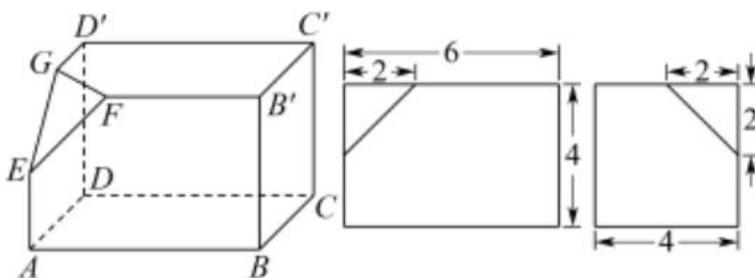
(3) 做出 $y = g(x)$ 在一个周期内的函数图象

5. 如图所示, 在长方体中截去一个角得到多面体的直观图, 它的正视图和侧视图在右面画出 (单位: cm)。(25 分) (若无法作答, 请简要阐明理由)

(1) 在正视图下面按照三视图的要求画出该多面体的俯视图;

(2) 按照给出的尺寸, 求该多面体的体积;

(3) 在所给的直观图中连接 BC' , 证明, $BC' \parallel$ 面 EFG



直观想象素养评分标准

1. 如图所示为贵州第一桥——北盘江大桥，请仔细观察如下所示图片，并说明图片中包含哪些**基本平面图形**。（13分）（若无法作答，请简要阐明理由）

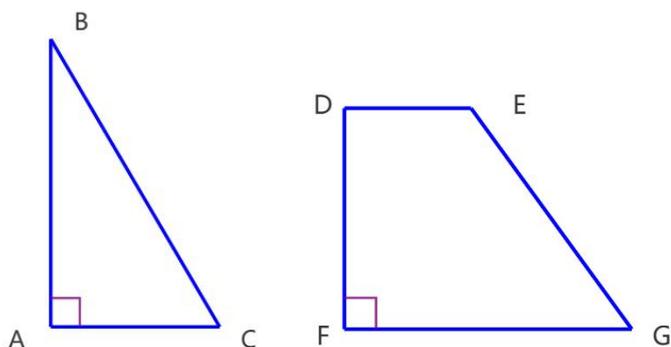


解析：主要考查学生在现实的情境中能否根据物体特征来抽象出几何图形。

答案：三角形、四边形、平行四边形、梯形、矩形、菱形、正方形、圆弧等等。

| 考察知识与目标 | 评分标准 |
|--|---|
| 考查学生可以抽象出实物中的几何图形，建立简单的图形与实物之间的联系，学生若能正确找到并描述抽象出相应的平面几何图形则认为学生达到了水平一；若完全回答错误或者空白就说明学生在熟悉的情境中抽象出实物的几何图形，说明学生处于水平零 | 0：完全错误或者空白 9（若正确一个则得3分，上限9分）：正方形、长方形、三角形（直角、等腰三角形）、梯形（直角、等腰梯形）等，若未回答出圆弧之类的则将所填有的上限为12分 4：圆弧、五边形、六边形等回答一个即可得4分（有些学生可能看到了但不会描述）（水平一）识别出复杂图形 |

2. 如下面两个图形直角三角形 ABCD 和直角梯形 DEFG, 分别沿着 AB、AC、DE、DF 和 FG 旋转一周得到五个几何体，请画出这五个几何体。（17分）（若无法作答，请简要阐明理由）



| 考察知识与目标 | 评分标准 |
|---|---|
| 考查学生根据平面图形和旋转轴画出对应的立体图形，能够探索图形的运动规律，由此认为学生达到水平一要求；若完全错误或者空白则认为水平零 | 0: 完全错误或者空白 12: (若正确一个则得 3 分, 上限 12 分) (水平一) 5: 画出绕 DE 旋转的立体图形 (图形较为复杂) (水平一) |

3. 已知关于 x 的二次函数 $f(x) = ax^2 - bx + 1$ (20 分) (若无法作答, 请简要阐明理由)

(1) 记集合 $A = \{-1, 1, 2\}$ 与 $B = \{-2, -1, 1\}$, 分别从两个集合中随机抽取一个数, 记作 a, b , 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是减函数的概率;

(2) 设点 (a, b) 是区域 $\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ 内的随机点, 请结合图象求

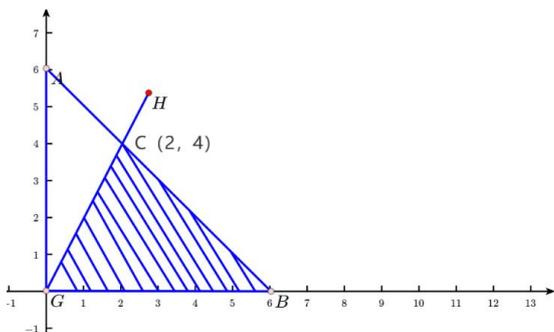
出函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数的概率。

答案:

(1) 要使函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是减函数, 需要 $a < 0$, 且 $-\frac{b}{2a} \leq 1$, 即 $a < 0$ 且 $b \leq 2a$, 对于所有的 (a, b) 的取法总数有 $3 \times 3 = 9$ 个, 满足条件的 (a, b) 有: $(-1, -2)$

所求的概率为 $P = \frac{1}{9}$

(2) 如图所示:



$$\text{求得} \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{面积为} \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

$$\text{由} \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{解得点} C(2,4), \text{ 因此区域阴影部分面积满足} a > 0,$$

$$\text{且} b \leq 2a \text{ 的面积为} \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

$$\text{所以所求的概率为} P = \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times 4}{\frac{1}{2} \times 6 \times 6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

| 考察知识与目标 | 评分标准 |
|---|---|
| 第一小问考查学生将函数问题进行几何直观, 利用图形理解、分析和解决问题的能力。由此学生的解题过程基本完整, 结论正确则认为达到水平二; | 0: 完全错误或者空白 (水平零) 2: a 的取值范围 (水平二) 2: a 、 b 之间的关系 (若未得到此范围和关系式或者不全面则认为学生无法通过二次函数的图象来解决问题, 则仍然为水平零, 正确则为水平二) 2: 得到相应的概率 (水平二) |
| 第二小问学生能够通过数形结合得出相应的区域, 计算出交点坐标, 可认为达到水平三要求 | 0: 完全错误或者空白 (水平零) 3: 画出题设相应的函数图象 (水平三) 3: 通过二次函数找到正确的范围 (水平三) 3: 通过数形结合, 得到 C 点的坐标 (水平三) 3: 求出总面积和正确目标面积 (水平二) 2: 得到答案 (水平二) |

4. 已知向量 $\vec{m} = (\sqrt{3} \cos wx, 1)$, $\vec{n} = (\sin wx, \cos^2 wx - \frac{1}{2})$ ($w > 0$), 函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$, 其最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 。(25分) (若无法作答, 请简要阐明理由)

(1) 求 $f(x)$ 的表达式

(2) 将函数的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 再将得到的图象上各点的横

坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），得到 $y = g(x)$ ，求出 $y = g(x)$ 的单调递增区间，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，求出函数 $y = g(x)$ 的值域。

(3) 做出 $y = g(x)$ 在一个周期内的函数图象

答案：(1) 首先根据向量的数量积公式，结合三角恒等变换，化简函数并求出角速度。

$$\text{向量 } \vec{m} = (\sqrt{3} \cos wx, 1), \vec{n} = (\sin wx, \cos^2 wx - \frac{1}{2}) (w > 0)$$

$$\text{且函数 } f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \cos wx \sin wx + \cos^2 wx - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2wx + \frac{\cos 2wx + 1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2wx + \frac{1}{2} \cos 2wx \\ &= \sin(2wx + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

又因为函数 $y = f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $T = \frac{2\pi}{2w} = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $w = 2$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{6})$$

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后得到 $y = \sin(4x - \frac{\pi}{3})$

再将所得图象上所有的点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）得到 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象

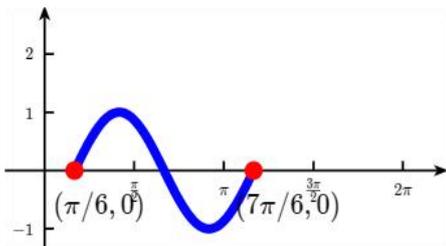
$$\text{所以 } g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

依据正弦函数的单调递增区间，令 $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为： $[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $-\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ 得到函数 $g(x)$ 的值域为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

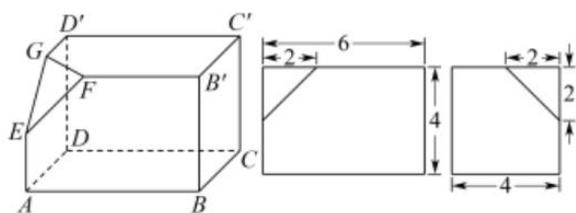
(3) 如图所示为一个周期的函数图象



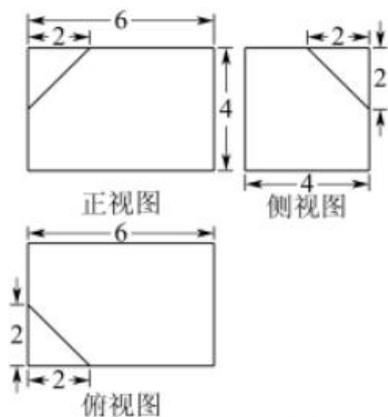
| 考察知识与目标 | 评分标准 |
|---|---|
| 第一小问考查学生能正确对向量的数量积的计算与三角恒等变换的运用，学生能够通过数到形，正确计算出对应的函数，则认为达到水平一的要求 | 0: 完全错误或者空白（水平零） 5: 正确计算得到函数（过程不完整酌情给分，化简可得 2 分，求出 w 可得 2 分，得出答案得 1 分）（水平一） |
| 第二小问考查学生能在熟悉的情境中对函数图象的伸缩平移变换发现数学规律，学生能正确进行变换则达到水平一；学生能够在借助标准正弦函数图象求解得到递增区间和对应值域，利用图象理解、分析和解决问题，学生解题过程基本完整，结论正确，则认为学生达到水平二 | 0: 完全错误或者空白（水平零） 4: 得到平移后的函数（水平一） 4: 得到伸缩后的函数（水平一） 2: 得到递增区间（水平二） 3: 得到 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $g(x)$ 的值域（水平二） |
| 第三小问考察学生将函数问题进行进行几何直观，画出函数图象，若学生能正确画出则认为学生达到水平二的要求 | 0: 完全错误或者空白（水平零） 3: 描述出对应五点（水平一） 4: 正确画出相应的函数图象（水平二） |

5. 如图所示，在长方体中截去一个角得到多面体的直观图，它的正视图和侧视图在右面画出（单位：cm）。（25 分）（若无法作答，请简要阐明理由）

- (1) 在正视图下面按照三视图的要求画出该多面体的俯视图；
- (2) 按照给出的尺寸，求该多面体的体积；
- (3) 在所给的直观图中连接 BC' ，证明， $BC' \parallel$ 面 EFG



(1)



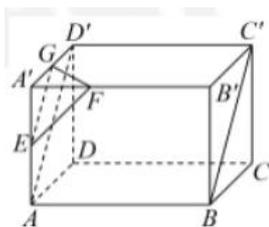
(2) 可以看作是一个长方体截去一个小三棱锥, 设大长方体的体积为 V_1 , 小三棱锥的体积为 V_2

依据图中条件可得 $V_1 = 6 \times 4 \times 4 = 96\text{cm}^3$

$$V_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}\text{cm}^3$$

$$\text{所以 } V = V_1 - V_2 = \frac{284}{3}\text{cm}^3$$

(3) 证明, 如图所示



在长方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 连接 AD' , 则 $AD' \parallel BC'$

又因为 E, G 分别为 $AA', A'D'$ 中点, 所以 $AD' \parallel EG$, 从而 $EG \parallel BC'$,

又因为 $EG \subset$ 平面 EFG , $BC' \not\subset$ 平面 EFG

所以 $BC' \parallel$ 平面 EFG

| 考察知识与目标 | 评分标准 |
|---|--|
| 第一小问考查学生通过立体图形抽象出三视图, 学生能画出则认为学生达到水平一要求, 若正确标注各边则学生能够体会图形与数量的关系, 则认为学生达到水平二 | 0: 完全错误或者空白 (水平零) 4: 正确画出俯视图 (水平一) 3: 正确标注各边的长度 (水平二) |
| 第二小问需要学生借助想象建立几何图形, 并借助几何图形综合分析图形与图形、图形与数量间的关系, 能较为完整的回答这一小问, 则可认为达到水平三要求。 | 0: 完全错误或者空白 (水平零) 4: 求出大长方体体积 (水平三) 4: 求出小三棱锥的体积 (水平三) 3: 求出多面体体积 (水平三) |
| 第三小问考察直线与平面平行的证明, 要求学生需要借助空间想象描述立体图形内边与边的关系的能力, 学生能完整回答这一小问则认为学生达到水平二要求。 | 0: 完全错误或者空白 (水平零) 2: 正确找到中介平行线 (水平二) 2: 正确找到平面外一条直线平行于平面内的一条直线 (水平二) 3: 正确运用线面平行的判定定理 (水平二) |

| 水平 | 水平零 | 水平一 | 水平二 | 水平三 |
|------|--------|---------|---------|----------|
| 对应分数 | 0-10 分 | 11-50 分 | 51-80 分 | 81-100 分 |

附录 2：高一学生直观想象素养的调查问卷

第一部分 基本信息

班级： 性别： 所选科目： 编号（调查者填写）：

你在平时的数学考试中，成绩处于以下分布的（ ）分数段

A.70 分以下 B.71—90 分 C.91—110 分 D.111—130 分 E.131—150 分

第二部分 调查问题

请根据以下问题，在你所认可的选项上打“√”（单选）。

1.你对数学知识非常感兴趣

[A]完全正确 [B]较为正确 [C]说不准 [D]不怎么正确 [E]完全不正确

2.你会不会在课后或者在完成作业后再次学习数学？

[A]完全会 [B]基本会 [C]不确定 [D]基本不会 [E]完全不会

3.你对数学中直观想象知识的喜欢程度

[A]非常喜欢 [B]比较喜欢 [C]不确定 [D]比较不喜欢 [E]非常不喜欢

4.如果需要提高数学成绩，你认为培养直观想象是否能达到效果

[A]完全可以 [B]基本可以 [C]不确定 [D]基本不可以 [E]完全不可以

5. 直观想象“是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态和变化，利用空间形式（如图形图象）理解和解决数学问题的素养”。你认为你的“直观想象素养”非常好（ ）

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

6. 你认为直观的图象（如函数图形等）和直观想象素养之间有联系（ ）

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

7. 你认为借助图形图象能够提升你的直观想象素养（ ）

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

8.你听说过网络画板吗? (一种网页版形式的教学用具) ()

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

9.你听说过 GeoGebra 吗? (一种数学教学软件) ()

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

10.你的老师经常使用网络画板等教学辅助软件进行教学 ()

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

11.你认为使用数学软件教学可以使学习的内容变得更加直观、容易 ()

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

12.你认为使用数学教学软件辅助教学有利于你提高自身直观想象素养水平吗 ()

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

13.在老师对直观想象方面的知识进行讲解时,你认为学习它重要吗?

[A]非常重要 [B]比较重要 [C]不确定 [D]比较不重要 [E]非常不重要

14.你希望老师在教学时使用数学教学软件绘制图象帮助理解吗 ()

[A] 非常符合 [B] 比较符合 [C] 难以判断 [D] 不太符合 [E] 非常不符合

15.教师是否激励你们利用空间形式特别是图形去讨论问题?

[A]完全会 [B]基本会 [C]不确定 [D]基本不会 [E]完全不会

调查到此结束,再次感谢你的协助!

附录 3：教师访谈提纲

1. 请您结合您的教学经验，可以谈谈您对直观想象素养的理解吗？
2. 那么您认为当前高一学生的直观想象素养还处于什么水平呢？
3. 既然您认为学生的直观想象素养处于这个水平，那么学生处于这个水平你觉得有哪些原因呢？
4. 请您回顾一下在您的教学过程中，您是如何来培养学生的直观想象素养的？
5. 您觉得在实际教学过程中来培养学生的直观想象素养存在着哪些困难？
6. 请您谈一下如果想要培养学生的直观想象素养，您还有哪些建议？