

閩南師範大學

教育硕士专业学位论文

网络画板助力学生深度学习的
数学教学研究

刘华吉

閩南師範大學

二〇二四年五月

学校代码：10402

学 号：

分 类 号：

密 级：

閩南師範大學

教育硕士专业学位论文

网络画板助力学生深度学习的
数学教学研究

学位申请人：刘华吉

指 导 教 师：周仕荣教授

学 位 类 别：教育硕士

学 科 专 业：学科教学（数学）

授 予 单 位：闽南师范大学

答 辩 日 期：二〇二四年五月

CODE: 10402

NO.:

U.D.C.:

Classified Index:

A Thesis for the Degree of Master of Education

**Research on Promoting Students'
Deep Learning
by Network Sketchpad
during Mathematics Teaching**

Candidate : Liu Hua-ji

Supervisor : Prof. Zhou Shi-rong

Specialty : Subject Teaching (Mathematics)

Academic Degree Applied for : Master of Education

University : Minnan Normal University

Date of Thesis Defence : May, 2024

摘要

深度学习产生之后，因人工智能 ChatGPT 风靡一时而再次闻名，随后文心一言、通义千问、盘古等国内大模型也相继问世，“人工智能+深度学习”成为热点话题。目前，信息技术与数学教学的融合仍在探索发展阶段。基于网络画板的数学教学，可以创设直观情境，强化学生的学习动机，促进数学知识关系建构，能够满足教学实践对于数学深度学习的内在追求。因此，研究如何利用网络画板助力学生深度学习就成为了一项现实课题。

本文采用理论应用和实验研究相结合的研究范式。首先，通过文献研究综述网络画板和深度学习的研究现状，深入挖掘网络画板的功能价值，揭示深度学习的内涵特征。其次，采用问卷调查法，了解目前高中数学深度学习现状，发现学生存在的主要问题如下：（1）数学学习动机不足；（2）知识建构能力有限；（3）问题解决能力较差；（4）缺乏批判性思维。但学生在有效沟通、协作交流、反思能力方面表现较好。再次，在研究建构主义等教育学、心理学理论基础上，构建网络画板助力深度学习的教学模式。最后，通过准实验研究法，验证网络画板助力深度学习教学模式的有效性。

研究发现，网络画板助力学生深度学习教学模式具有一定的可行性。具体表现在如下几个方面：1、利用网络画板创设直观的教学情境，能够强化学生的内在学习动机；2、借助网络画板的动态表征开展探究活动，能够促进学生对知识的理解与建构；3、通过网络画板提供问题解决思路的平台，促进学生解决问题的能力；4、依托网络画板渗透数学思想，学生在质疑、批判、反思中形成理性精神，便于提高迁移应用能力。基于以上四个方面，提供了网络画板助力学生深度学习的教学样例——《平面向量基本定理》。

关键词：网络画板；深度学习；高中数学；教学设计

Abstract

After the emergence of deep learning, it became famous again because of the popularity of artificial intelligence ChatGPT. Then, ERNIE Bot, Tongyi Qianwen, Pangu and other domestic large language models came out one after another. "Artificial intelligence+deep learning" became a hot topic. At present, the integration of information technology and mathematics teaching is still in the exploratory development stage. Mathematics teaching based on network Sketchpad can create intuitive situations, strengthen students' learning motivation, promote the construction of mathematical knowledge relations, and meet the internal pursuit of deep learning in teaching practice. Therefore, studying how to use network Sketchpad to promote students' deep learning has become a practical issue.

This article adopts a research paradigm that combines theoretical application and experimental research. Firstly, through literature review, the current research status of network Sketchpad and deep learning is summarized, and the functional value of network Sketchpad is deeply explored, and the connotation characteristics of deep learning are revealed. Secondly, questionnaire survey is used to investigate the current situation of mathematics deep learning in high school, and the main problems of students are found as follows: (1) insufficient motivation for mathematics learning; (2) Limited knowledge construction ability; (3) Poor problem solving ability; (4) Lack of critical thinking. However, students perform well in effective communication, collaborative communication and reflective ability. Thirdly, on the basis of the study of pedagogy and psychology theories such as constructivism, the teaching mode of deep learning improved by network Sketchpad is constructed. Finally, quasi-experimental research method is used to verify the effectiveness of deep learning teaching mode improved by network Sketchpad.

Research has found that the teaching model of using network Sketchpad promoting students' deep learning has certain feasibility. Specifically, it is manifested in the following

aspects: 1. Creating intuitive teaching situations using network Sketchpad can strengthen students' intrinsic learning motivation; 2. Utilizing the dynamic representation of network Sketchpad to carry out exploration activities can promote students' understanding and construction of knowledge; 3. Provide a platform for problem-solving ideas through network Sketchpad, promoting students' ability to solve problems; 4. Relying on the network Sketchpad to penetrate mathematical ideas, students can form a rational spirit in questioning, criticism, and reflection, which facilitates the improvement of their transfer and application abilities. Based on the above four aspects, a teaching example of using network Sketchpad promoting students' deep learning is provided - "Basic Theorem of Plane Vectors".

Key Words: network Sketchpad; deep learning; high school mathematics; instructional design

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.1.1 政策导向:国家教育信息化与现代化的要求	1
1.1.2 课标倡导:落实数学核心素养的重要路径	1
1.1.3 现实诉求:育人方式改革的迫切需要	2
1.2 研究问题.....	3
1.3 研究目的.....	3
1.4 研究意义.....	4
1.5 研究方法.....	4
1.6 研究框架.....	5
第 2 章 文献综述与理论基础	9
2.1 网络画板研究综述.....	9
2.1.1 网络画板的研究现状.....	9
2.1.2 网络画板的功能价值.....	11
2.2 深度学习研究综述.....	16
2.2.1 深度学习的内涵特征.....	16
2.2.2 深度学习的过程模型.....	18
2.2.3 深度学习的评价体系.....	19
2.3 理论基础.....	21
2.3.1 元认知理论.....	22
2.3.2 多元表征理论.....	23
2.3.3 情境认知理论.....	24
第 3 章 高中数学课堂深度学习的现状调查及分析	25
3.1 调查问卷的设计.....	25
3.2 问卷的测试.....	26
3.2.1 问卷的发放.....	26
3.2.2 问卷信度、效度分析.....	26
3.3 研究结果.....	27
3.3.1 受调查者的情况分析.....	27
3.3.2 主要存在的问题分析.....	30
第 4 章 网络画板助力学生深度学习的教学模式	33
4.1 网络画板助力学生深度学习的教学原则	33
4.1.1 科学性教学原则.....	33
4.1.2 学习者为中心原则.....	34

4.1.3 逐层抽象原则.....	34
4.2 网络画板助力学生深度学习的教学模式构建	35
4.2.1 内容整合	36
4.2.2 目标定位	37
4.2.3 策略选择	37
4.2.4 评价方式	41
4.3 网络画板助力深度学习的教学样例	41
4.3.1 《平面向量基本定理》教学设计	41
第5章 网络画板助力学生深度学习的教学实验	53
5.1 实验设计与实施	53
5.2 实验结果与分析	54
5.2.1 前测数据分析	54
5.2.2 后测数据分析	55
5.2.3 实验结果分析	56
5.3 实验结论	59
第6章 总结与思考	61
6.1 研究结论	61
6.2 研究局限与展望	62
6.2.1 研究局限	62
6.2.2 研究展望	62
参考文献	63
附录1 高中数学深度学习能力调查问卷	67
附录2 平面向量基本定理测试卷	71

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 政策导向：国家教育信息化与现代化的要求

在新一轮科技革命和产业革命浪潮的推动下，当代世界的教育教学改革也在发生深刻变化。2012 年，教育部通过《教育信息化十年发展规划（2011-2020 年）》，提出要探索信息技术与教育的全面深度融合。经过几年时间，信息技术的发展已经惠及千家万户，但是在教育领域，信息技术对课堂教学的影响仍然十分有限。在互联网飞速发展的今天，我们必须紧跟时代要求，从信息技术的特点出发，反思我国技术支持下的信息化课堂教学现状，深入探索信息技术与数学教学的深度融合。2018 年，教育部印发《教育信息化 2.0 行动计划》，又指出持续推动信息技术与教育深度融合。教育信息化要求在教育领域中充分运用现代信息技术，提高使用信息技术的能力，用以辅助解决学习、工作与生活中的问题，培育全面发展的复合型人才。2022 年，党的二十大进一步明确了“中国式现代化”的本质特征和要求，为我国教育现代化建设指明了方向^[1]。中国式基础教育现代化是立德树人、素质全面发展的教育现代化，而教育现代化的核心是人的现代化。在中小学课堂中，要培养素质发展的人，提高人的现代化，就离不开信息化教育。只有构建新型教育体系，才能改变传统沉闷、低效的课堂教学，向积极、高效的信息化课堂转变。

1.1.2 课标倡导：落实数学核心素养的重要路径

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称课程标准）指出要重视信息技术的应用，优化课堂教学，转变教学与学习方式^[2]。在人工智能时代，信息技术与数学课程的深度融合是大势所趋，利用信息技术辅助教学，不仅能够创设所需要的教学情境，还为师生开展探究活动提供了一个平台，提高教学的积极性和实效性。

因此，教师应重视信息技术的运用，合理使用信息技术辅助教学，提高学生的信息素养，使科技在教育领域发挥巨大的潜能。

课程标准中明确指出高中数学教学以发展学生数学学科核心素养为导向，创设合适的教学情境，启发学生思考，引导学生把握数学内容的本质^[2]。发展数学学科核心素养，就是要发展学生的必备品格与关键能力，这与深度学习的理念不谋而合。因此，在课堂教学中，教师要培养学生深度学习的能力，从激发学生的学习兴趣入手，借助现代化教学手段，培养学生良好的学习习惯，积极主动思考，努力建构知识，促进学生高阶思维能力的发展，从浅层学习向深度学习转变，提高数学学科核心素养，真正实现立德树人。

1.1.3 现实诉求：育人方式改革的迫切需要

我国的数学基础教育课堂中，具有自己独特的教育教学传统。数学教学注重突出知识型的具体目标，善于由“旧知”引出“新知”，重视反复训练和巩固记忆，重视变式练习和深化理解，重视解题和关注技巧方法，考试导向，注重知识与技能的传授^[3]。传统教学虽有可取之处，但也存在许多弊端，如仍然存在学生机械学习、被动训练和死记硬背等问题以及教育活动被有限的、重复性的知识和应试策略训练替代等困境^[4]。在信息化时代，需要深化教育改革，培育全面发展的人，这离不开深度学习。

当前，人工智能有着惊人的发展速度，ChatGPT 和 Sora 在国内外掀起了轩然大波，人们惊叹于它强大的功能，也担忧其带来的风险，其背后离不开深度学习技术的支持。在信息化时代的背景下，如何才能不被取代？在教育领域，改革教学方式，增加技术支持，转变教育理念，促进深度学习都是刻不容缓的。网络画板作为现代信息技术中促进教师教学、改变学生学习方式的可视化动态软件，与数学课程进行深度融合，能够加快教育信息化融合创新，满足教学实践对数学核心素养的内在追求。因此，如何利用信息技术促进深度学习是现阶段需要研究的重要课题，本研究将借助信息技术软件——网络画板，将网络画板与数学课堂深度融合，探究网络画板助力数学深度学习的方式，促进深度学习发生。

1.2 研究问题

在人工智能时代，在“双减”政策的影响下，在教学改革呼声日渐增长的今天，面对新老教育观念、教学方法、教学模式冲击融合的数学教师该何去何从？虽然在目前的中学课堂中，有相当数量的一线教师在用网络画板进行教学实践，但是又该怎样从教育学、心理学的理论高度下认识和挖掘网络画板的教育价值功能，促进学生深度学习？

基于此，本文提出了以下几个问题，并重点进行研究。

（1）当前高中生数学深度学习的现状如何？

该问题主要是为全面了解现阶段高中生数学深度学习的水平，从而发现课堂教学存在的不足，为后续研究提供方向。

（2）网络画板助力深度学习的效果如何？

该问题主要指向网络画板以什么样的方式和路径促进深度学习，对此需要明确网络画板助力深度学习的教学模式、遵循的设计原则及具体教学流程的设计。研究主要通过教学实验，来验证网络画板是否能够真正促进数学深度学习，以及在多大程度上影响了学习效果。

1.3 研究目的

本研究的主要目的是利用网络画板等信息技术与数学课程深度融合，改变学生浅层学习的现象，以促进深度学习。具体包括：

（1）在阐述信息技术与深度学习关系的基础上，提出网络画板助力数学深度学习的主张，构建网络画板助力数学深度学习的教学模式，以期为如何促进深度学习提供一些思路。

（2）将网络画板助力数学深度学习的理论付诸于教学实践，在实际教学中检验该理论的可行性和有效性，以期为网络画板等信息技术操作环境下的教学提供一定的经验参考。

(3) 在教学实践中,通过网络画板创设的数学环境,吸引学生高效学习,最终学生能够达到深度学习水平。

1.4 研究意义

在“互联网+”时代,研究如何利用网络环境促进深度学习是新时代的潮流,也是落实数学核心素养的重要途径。而网络画板作为优秀的多媒体教学工具之一,在中学数学课堂中具有比较广泛的应用场景,网络画板的诸多功能为促进学生深度学习提供了可能。本研究在深入挖掘网络画板的功能价值以及深度学习的内涵特征的基础上,提出了网络画板助力深度学习的原则,构建了相应的教学模式,具有一定的理论意义和实践意义。

(1) 理论意义

一方面,研究从深度学习的内在要求出发,深入分析促进深度学习的要素,丰富深度学习的相关研究,为研究者提供理论参考。另一方面,研究可以厘清网络画板与深度学习之间的契合点,网络画板助力深度学习的教学设计原则及教学设计流程,有助于拓宽网络画板相关研究的视野,丰富相关理论。

(2) 实践意义

一方面,研究中形成的网络画板助力深度学习的教学设计方案及典型案例等,可以丰富教学案例,同时也可以为一线教师在实际教学过程中提供实践参考。另一方面,对于学生来说,研究也为中学生的数学学习提供了新的视角与实践模式,在使用网络画板的过程中提高自己的深度学习能力。

1.5 研究方法

本文采用理论与实践相结合的研究方法,包括文献研究法、问卷调查法、准实验研究法。

(1) 文献研究法

文献研究法,通过搜集、整理、分析网络画板及深度学习相关文献,对文献进行

研究，形成新的认识的研究方法。本研究围绕“网络画板”、“信息技术”、“深度学习”、“浅层学习”等关键词，利用 CNKI 数据库搜索相关文献，对文献的各个维度进行统计分析，并利用图表进行展示，从而呈现某个领域的研究趋势或研究热点。

（2）问卷调查法

问卷调查法，通过问卷方式对研究问题进行调查，搜集资料、分析结果并获得结论的方法。为了深入了解当前高中数学课堂深度学习的现状，采用问卷调查法进行调查，进而找到当前高中数学教学存在的相关问题，以及高中生在深度学习方面存在的不足。本研究主要采用量表的形式进行问卷设计，调查主要围绕高中生的认知领域、人际领域、内省领域三个部分开展，每个领域又进行详细划分，以全面了解高中生深度学习现状。

（3）准实验研究法

本研究在保持原本班级不变动的情况下进行教学实验，研究设置实验班和对照班两个班级进行相关实验研究，通过测试两个班学习效果的差异，来测评学习网络画板助力数学深度学习的效果。

1.6 研究框架

基于对上述问题的思考，为了明晰深度学习的内涵本质以及发生机制，深入理解目前中学课堂中用网络画板助力深度学习的教学现状，本文从深度学习理论出发，尝试将网络画板与数学课程进行深度融合，建立促进深度学习的数学教学设计模式。本研究的整体思路如下：

第一章，绪论，主要解决“为什么研究”的问题。从当前国家教育信息化与教育现代化时代背景下对教育技术的外在要求、课程标准中倡导的落实核心素养的重要路径、基础教育的现状对育人方式改革的迫切需要等，三个不同的角度论述了深度学习以及信息技术融入数学教学的重要性，并说明网络画板助力深度学习的研究目的与意义、研究问题与方法、研究思路与框架。

第二章，文献综述与理论基础，主要解决“前人对研究相关问题所做的研究，有

哪些理论基础”等问题。该部分的主要内容包括对国内外研究现状进行梳理，对本研究核心关键词进行界定，分别探讨网络画板的价值功能和深度学习理论的内涵特征、过程模型、评价体系，并介绍涉及到的相关理论，为后续研究中构建网络画板助力深度学习的理论体系奠定理论基础。

第三章，高中数学课堂深度学习的现状调查及分析，主要解决“目前高中生在深度学习方面存在哪些不足”的问题。调查问卷从认知领域、人际领域、内省领域三个方面进行全面设计，包括信息技术使用能力、沟通协作能力、学习内在动机等十个具体维度，通过 SPSS27.0 软件对回收的问卷进行分析，以发现目前高中生在深度学习方面存在的不足，为后续研究设计提供有针对性的参考。

第四章，网络画板助力深度学习的教学模式，主要解决“研究了什么”的问题。在论述网络画板和深度学习之间内在联系的基础上，提出网络画板助力数学深度学习的教学原则，构建网络画板助力数学深度学习的一般教学模式，教学模式立足于学情和教材内容，以高阶思维发展为目标，在网络画板操作环境下，从发生机制、行为进程、目标旨向提出教学策略，关注学生元认知的发展，为后一章的实践研究过程提供理论支撑。根据网络画板助力深度学习的一般教学模式，结合高中“平面向量及其应用”部分章节的教学要求，设计教学案例。

第五章，网络画板助力深度学习的教学设计实践研究，主要解决“研究效果如何”的问题。教学实验从实验设计、实验实施开始，到最后进行数据收集、结果分析。在实验设计中，实验对象是来自高中两个平行班级的学生；实验的测量工具为平面向量基本定理测试卷。实验实施完成后，进行数据的收集与分析，根据深度学习的特征，验证网络画板对深度学习的促进效果以及教学模式的可行性。

第六章，总结与思考。总结研究成果，揭示网络画板在哪些方面促进了深度学习，分析存在的问题及不足，以期对网络画板与深度学习的融合有指导意义，并展望网络画板操作环境下促进深度学习的后续研究。

本研究将从理论和实践的角度分别探讨“网络画板助力数学深度学习”的问题，其研究框架如图 1.1 所示。

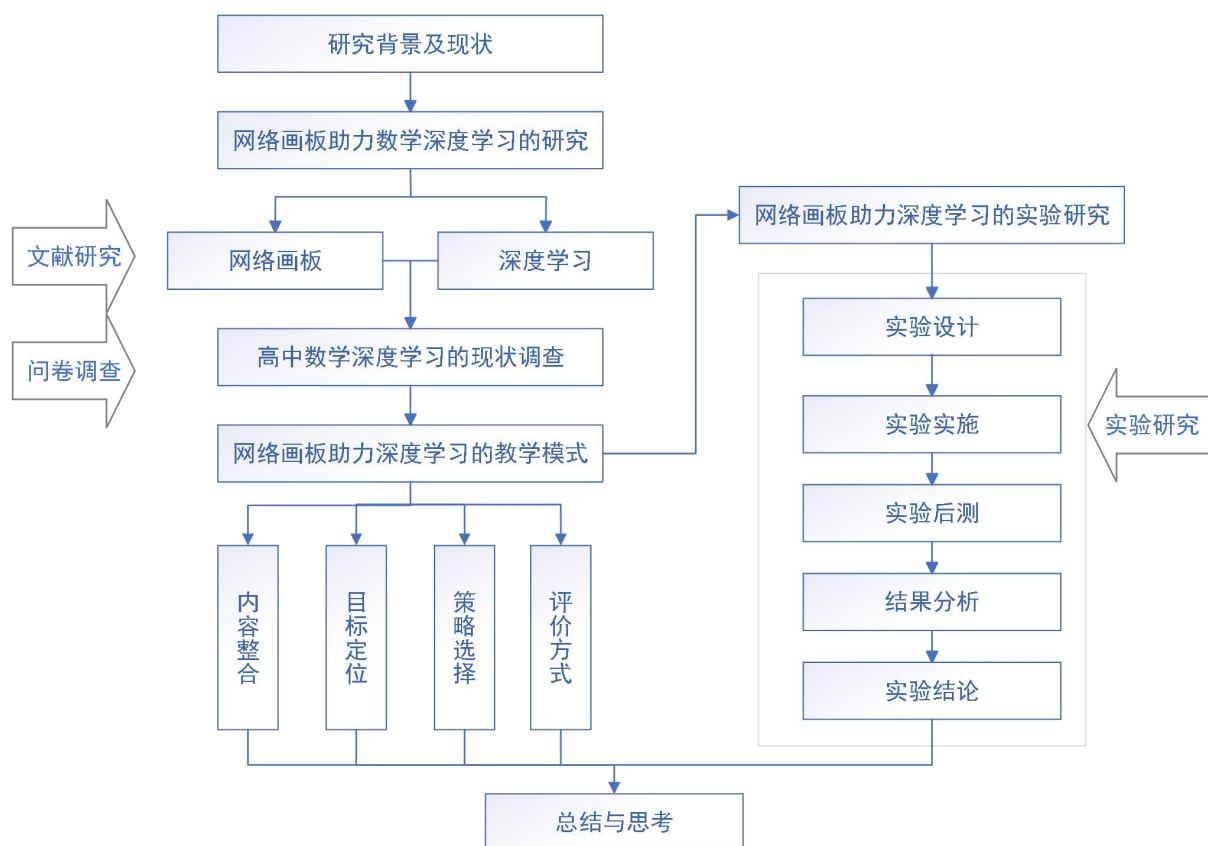


图 1.1 研究框架

第 2 章 文献综述与理论基础

2.1 网络画板研究综述

网络画板是在超级画板的基础上，整合智能推理技术、动态几何技术、符号运算、网络交互等技术开发的动态数学教育软件，具有“写、画、测、变、编、演、推、算”等专有功能。

2.1.1 网络画板的研究现状

通过网络画板的发展历程，我们知道网络画板是在超级画板的基础之上形成的，并于 2016 年正式发布。由于发布时间不长，推广使用需要一定的过程，所以可供研究的文献数量也相对有限。本研究以 CNKI 期刊数据库以及学术论文数据库为主要数据来源，以主题“网络画板”进行检索，统计年限不设限制，截止日期为 2024 年 1 月 1 日，共检索出文献 136 篇，剔除掉不相关文献后共获得 88 篇（其中学位论文 26 篇）。

（1）文献数量分析

对文献数量进行数据统计，得出如图 2.1 所示的变化趋势图。从图中我们可以看出网络画板相关文献始于 2017 年，这与网络画板软件发布时间为 2016 年有关。从 2017 年至 2019 年，文献数量均低于 5 篇，表明网络画板前期发展缓慢，使用人数还相对较少，因此相关的研究也就较少。2019 年之后，文献数量逐步增长，在 2022 年文献数量达到峰值 26 篇，近一年略有下降。

虽然文献数量整体呈上升趋势，但相比国外数学教育软件，仍然相差甚远。国外数学教育软件几何画板，由于发行时间早，几何画板具有更广泛的用户群体，相关研究文献成千上万，因此国产软件网络画板还有很长的路要走。但随着信息技术的不断发展，网络画板功能越来越强大，越来越多的使用者会加入网络画板研究阵列，预计发文量将会持续增长。

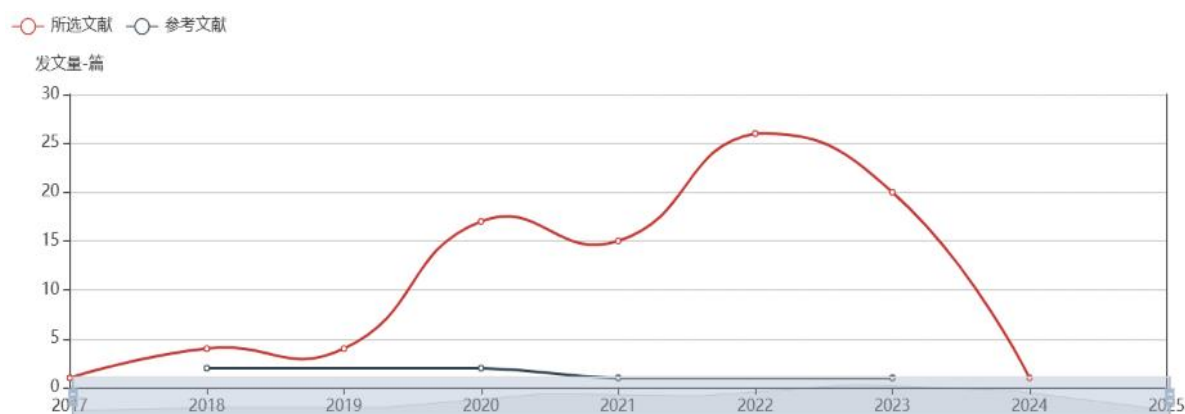


图 2.1 网络画板研究发表趋势图

(2) 研究内容分析

对研究样本的 88 篇文献进行内容分析，可以总结出当前网络画板的研究内容主要集中在中小学数学教学设计与应用、实验研究、其他领域三部分。其中网络画板在中学数学中的设计、应用、研究方面的文章居多。

在中小学数学教学设计与应用部分，主要包括网络画板在中学数学课堂中的应用、利用网络画板研究数学试题、开展数学实验、进行教学设计研究以及案例分析等，如尹洁的《网络画板在高中函数教学中的应用》^[5]、刁露的《浅谈网络画板在小、中、高三阶段数学教学中的应用》^[6]等研究使用网络画板优化课堂教学，赵小利的《用网络画板开展数学实验,助力小学数学教与学——以六年级教材“圆”为例》^[7]利用网络画板开展数学实验，吸引学生积极参与课堂。在实验研究部分，以学位论文居多，如、李赵容的《基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究——以“函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象”教学为例》^[8]，学位论文主要是关于网络画板对数学思想方法、数学核心素养提升以及探究性教学的实验研究。还有一些网络画板相关的文献涉及教师应用网络画板的能力、数字化学习、互联网教育改革等，此外，杜佳佳的《网络画板教学应用研究工作现状和趋势分析》^[9] 这篇文章对网络画板的研究现状和趋势进行了分析概括。

总的来说，网络画板相关的文献主要集中在一般教学层面的使用上，而网络画板辅助数学教学的应用价值如何、如何结合网络画板提升数学核心素养、网络画板相关的理论探索、误区分析、相应对策等研究却凤毛麟角。

2.1.2 网络画板的功能价值

(1) 提供直观感知，激发学习兴趣

数学源于对现实世界的抽象，数学学科抽象性的特点决定了学生思维理解上存在困难，而将抽象内容直观化、可视化，可以突破这一认知障碍。以网络画板为代表的数学教育软件可以丰富教学的内容，将文本、图片、图象、动画乃至声音等形式内容融入数学课堂中，利用网络画板中图形的移动、色彩变化、同步解说等手段表达教学内容，将抽象的数学知识直观呈现出来，被感官直观感知，吸引学生的注意力，打破课堂枯燥无味、沉闷低效的课堂氛围，打破传统教学中凭空想象、似有非有、难以理解之苦，激发了学生学习的兴趣，调动学生的积极性，强化学习动机，使学生的思维进入活跃状态，实现“冰冷的美丽”向“火热的思考”转化。

例如，“三角函数图象”的教学，在 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 中，传统的教学是将 ω 取几个有限的值，如 ω 取 $1, 2, \frac{1}{2}$ 。在传统数学课堂中，教师通常只展示函数图象的个别画面，其变化过程也只能口头描述。而借助网络画板可以动态设置参数，如图 2.2， A, ω, φ 的值可以任意设置，并且瞬间就能够观察图象所发生的变化，生动地展示出函数图象的变化过程，实现动态与静态之间的转换。网络画板建立了“形”与“数”间的联系，将数学对象可视化、动态化，学生感受到运动的观念，并将其内化为思维的一部分，极大地调动了学习的积极性，让学习可见。

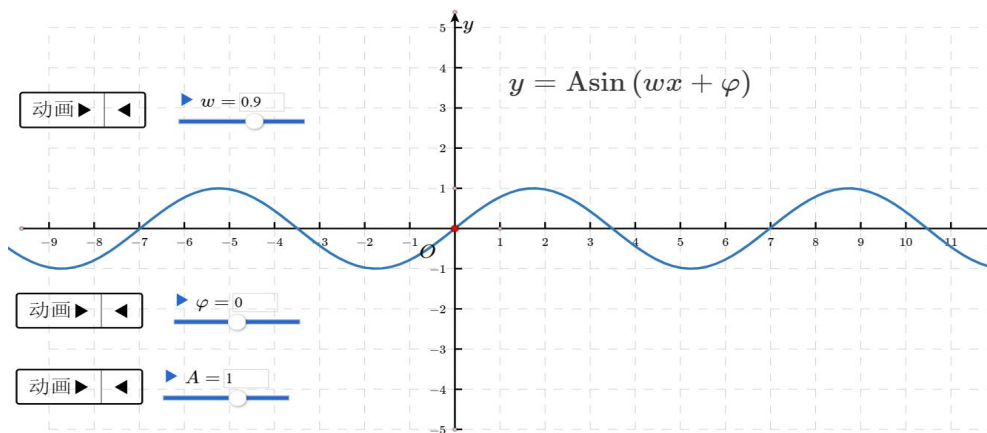


图 2.2 三角函数图象

(2) 拓宽探究途径，优化知识建构

弗赖登塔尔认为，学习数学的唯一正确方法是实行“再创造”^[10]。学生通过独立思考与自主探究亲历再创造过程，对知识建构产生深刻理解。网络画板的最大特点是动态性，能在变动的状态下揭示不变的数学关系，为学生提供“探究式”学习的平台，使学生能够对知识进行探索、尝试和发现，寻求解决问题的途径，体会从具体到抽象、从模糊到清晰的数学发现过程。通过网络画板开展探究活动，让学生直接参与数学知识的建构过程，突出学生的主体地位，既可以加深学生对知识的理解，又可以促进学生的协作交流能力。

例如，探究直线 $l_1: 3x+4y-2=0$ ，直线 $l_2: 2x+y+2=0$ ，两直线交于点 N ，问方程 $3x+4y-2+l(2x+y+2)=0$ 表示什么图形？在网络画板的辅助下，引导学生思考探究“当 $l=0$ 时，方程表示什么图形；当 l 取定值时，方程表示什么图形；当 l 变化时，方程表示什么图形？”。学生不难回答前两问，对有难度的第三问，可利用网络画板作出函数 $y=-\frac{3+2l}{4+l}x+\frac{2-2l}{4+l}$ 的图象，设置参数 l 取值范围为 $[-10,10]$ ，改变参数的同时对函数图象进行跟踪，如图 2.3。通过观察，学生猜测当 l 变化时，该方程表示经过定点 N 的许多直线。确定一条直线除了定点还需要斜率，只要再求出斜率即可完成证明。利用网络画板创设探究环境，展现动画及跟踪效果，学生在眼见为实的基础上得出结论，随后进行严格证明，会比直接分析方程理解得更透彻。

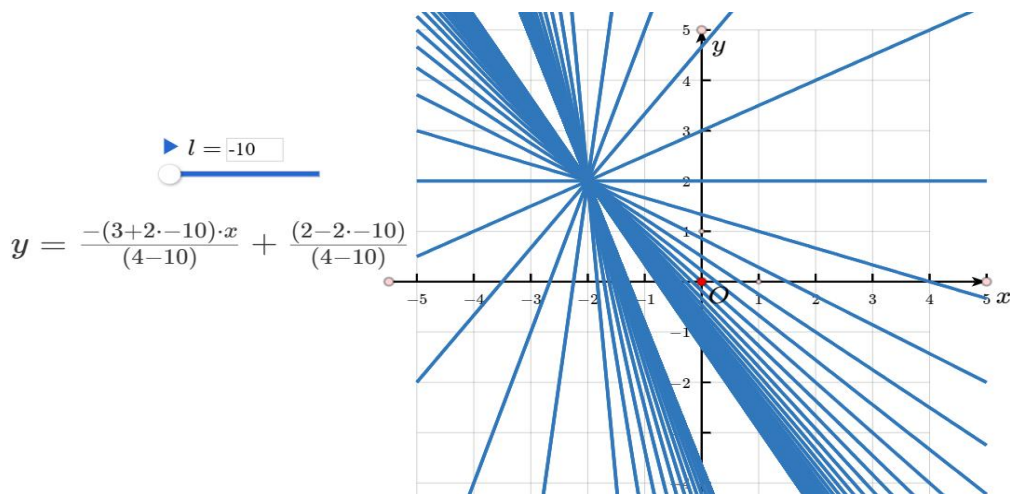


图 2.3 例题函数图象

(3) 渗透数学思想, 训练数学思维

网络画板虽然只是一个教育软件, 本身不具有数学思想。但是网络画板不局限于作图、测量、演示等功能, 在网络画板制作课件和辅助教学的过程中还渗透着数学思想和方法。有学者曾谈怎样用几何画板渗透数学思想方法, 其中概括了几何画板蕴含的思想方法有公理化思想和函数、映射、对应思想以及数形结合思想等^[1]。例如三角形的内切圆不能直接先画三角形再大致画一个圆, 这样没有意义, 当拖动时二者会出现分离, 必须确定内心和垂足进行画圆才有逻辑意义, 这体现了公理化思想; 轨迹问题可以归结为主、从动点运动生成的, 绘制图象时必须找到这种对应关系, 这体现了函数映射思想; 网络画板的许多问题都是通过“代数问题几何化”、“几何问题代数化”来解决的, 在“形”与“数”之间建立桥梁, 这体现了数形结合思想, 如函数方程 $\lg x = \sin x$ 解的分析, 学生会想到作出图象来观察, 但往往因为作图不准确而得不出三个解, 借助网络画板可以绘制出准确的函数图象来帮助分析推理, 如图 2.4 所示。而网络画板与几何画板相对应, 作为国内数学教育软件, 其中也蕴含了上述思想方法。

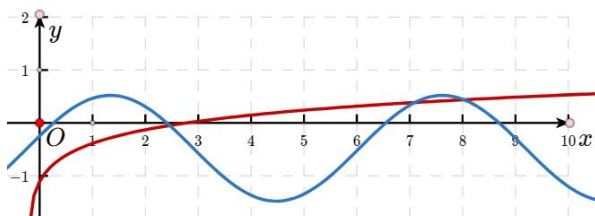


图 2.4 $y = \lg x$ 和 $y = \sin x$ 函数图象

除此之外, 我们认为网络画板还蕴含着化归思想、分类思想、特殊到一般、动静转化等思想。例如化归思想, 可以把复杂的问题转化为学生已知的问题。如梯形的面积公式为 $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, 这个公式学生都知道, 但是如何得到的却未可知。利用网络画板的旋转功能, 将梯形围绕一条腰的中点旋转 180° , 可以得到一个平行四边形, 如图 2.5, 很容易得出梯形面积是右边平行四边形面积的一半。

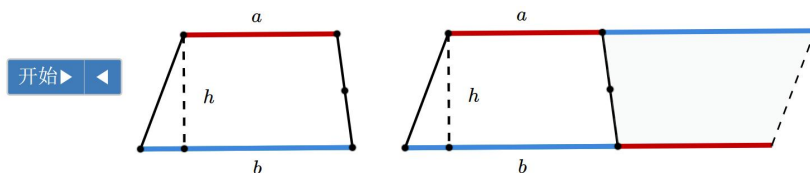


图 2.5 梯形面积图象

(4) 涵养数学美育，发展数学情感

数学是高度抽象化、符号化、形式化的一门科学，其中蕴含着数学之美，但是受制于传统教学手段，对中小學生来说，感受到数学的理性美不是一件容易的事。网络画板为此提供了一个平台，可以凸显数学的动态美、呈现数学的对称美、表现数学的统一美、展示数学的奇异美。例如使用网络画板的函数作图功能，可以制作出蝴蝶曲线、心形曲线、勾股树，使用图形变换功能可以制作出动态地毯等图形，网络画板的3D作图功能更加强大，可以制作函数线旋转、炫彩花、魔方等，让数学变得更炫酷，改变以往枯燥无味的课堂环境，一些示例如图2.6所示。

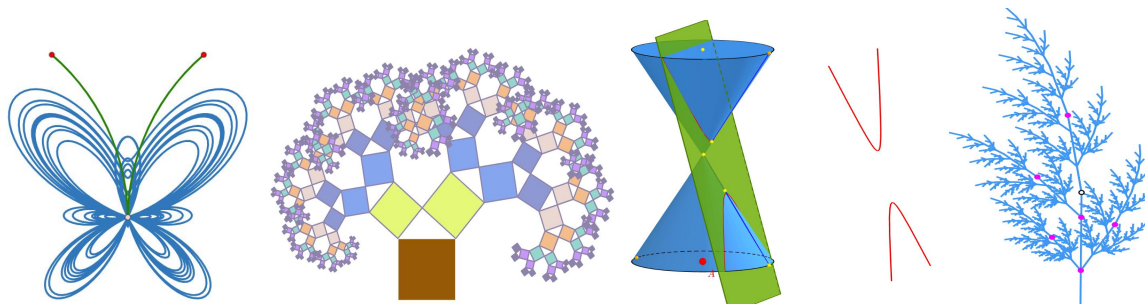


图 2.6 网络画板示例图

但传统教学中最多呈现静态的数学对象，而网络画板的作图特点——在动态中保持不变的几何性质，可以让学生感受到数学更多不一样的美。例如通过网络画板进行迭代绘制的科赫雪花曲线，如图2.7。如果设原来的三角形边长是 a ，通过计算每一个的周长和面积，能够得到周长分别是： $3a, \frac{4}{3} \times 3a, (\frac{4}{3})^2 \times 3a, \dots \rightarrow \infty$ 。而面积分别是：

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times S, S + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times S + \frac{3}{4} \times (\frac{4}{9})^2 \times S, \dots \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$$

我们会发现这种曲线虽然周长会无限增加，但是面积却越来越趋于一个定值，这种奇特的美会让学生感受到数学的无限魅力，在潜移默化中培养了数学审美意识，对数学的情感得到提升。

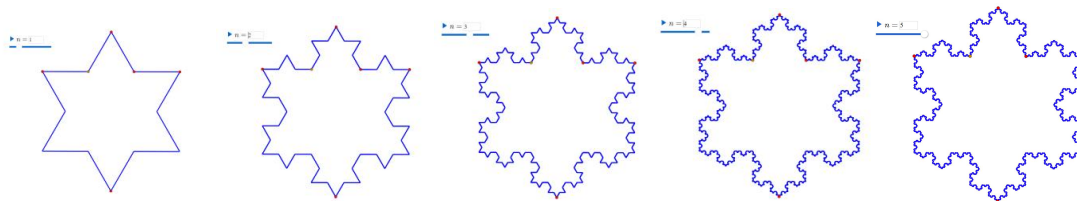


图 2.7 科赫雪花曲线

(5) 实现虚拟实验，培养创新能力

波利亚曾说：“数学一方面是严谨的，是系统的演绎科学；另一方面看却像一门实验性的归纳科学。”从这另一面来看，数学教学中离不开实验。数学实验往往是按照“观察发现—>进行分析—>初步猜想—>推理论证—>形成结论—>验证结论”的过程展开的。网络画板正好给广大师生提供了一个理想的虚拟实验室。在教学中，教师可以有意识地引导学生自主创作，利用数学直觉的感知、观察、猜想、发现、类比、归纳、抽象概括、演绎与证明等让学生体会数学结论形成的过程。学生在学习过程中常常会产生新的想法，但通常情况下没有办法及时进行验证，因而创新能力得不到良好的发展。网络画板给学生提供了一个证实想法的机会，学生的想象力得到充分发挥，给创新教育带来了可能。

概率中有许多随机实验，它与生活息息相关，但是由于教学条件的限制，传统教学无法进行足够多次数的实验，不利于培养学生的随机意识。借助网络画板模拟概率中的随机实验，不仅可以实现任意多次，而且能够加深学生对概率的认识。例如，在学习正态分布时，可以以高尔顿钉板实验作为背景问题引入，形象地勾勒出正态分布曲线，激发学习兴趣，深化认知。此外还有一些实验如蒲丰投针实验等，针与直线订交的概率为 $P = \frac{2l}{\pi d}$ ，由此可以算出圆周率，令人感到惊奇，通过网络画板模拟投针实验，圆周率在某次投针情况下算出为 3.1408，如图 2.8 所示。

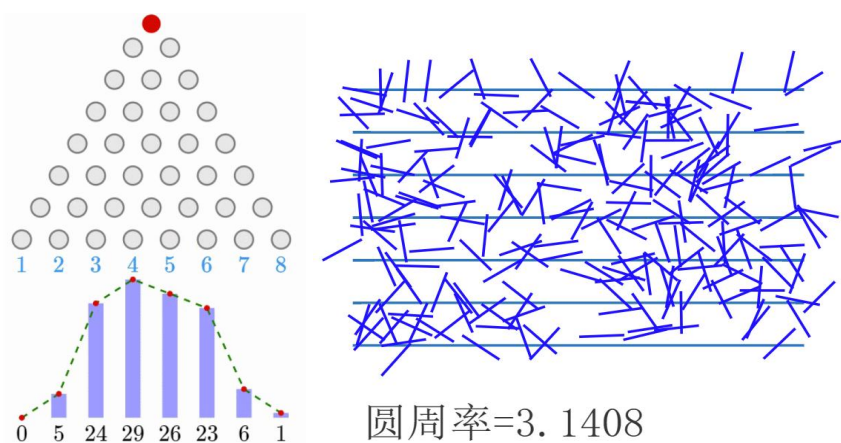


图 2.8 网络画板模拟实验

网络画板在教学中的广泛应用，帮助学生从“学数学”到“做数学”，再到“玩数学”，实现从被动学习到主动学习，再到创造性学习，从浅层学习走向深度学习。

2.2 深度学习研究综述

在高度信息化的知识经济时代，各种新型学习方式不断涌现，面对学习碎片化、浅表化的问题，有必要更深入地分析理解深度学习的内涵本质，把握其主要特征，揭示其发生机制，进而形成其促进策略。

2.2.1 深度学习的内涵特征

20 世纪 70 年代，弗伦斯·马顿和罗杰·萨尔乔将“深度学习”引入教育领域，根据学生在阅读时加工信息的方式提出了浅层学习与深度学习的概念^[12]。在 20 世纪 90 年代，比格斯等人分析了促进学生深度学习的因素，发展了浅层学习与深度学习的理论^[13]。其后，保罗·拉姆斯登、诺埃尔·恩特维斯特等人也对学习过程和学习结果进行了不同角度的研究，但都发现学生的学习方法有浅层学习和深度学习之分。与浅层学习相比，深度学习更注重知识的理解与建构、迁移与应用。

目前深度学习没有统一的定义，但是国内外研究者都相继给出了许多界定，详见表 2.1 和表 2.2。

表 2.1 国外深度学习的定义

主要作者	深度学习的概念
Marton F	获取知识和加工信息的方式 ^[12]
Biggs	学习者运用多样化的学习策略，建立单个信息与知识结构之间的联系、应用知识来解决真实情境中的复杂问题 ^[13]
Eric Jensen	学习者经过分析、加工获得的新知识，通过改变思想、控制力或行为方式应用新知识 ^[14]
美国国家研究委员会	个体将学习的知识从一种情境应用到另一种情境的过程，既迁移 ^[15]
休利特基金会 (WFHF)	学生胜任 21 世纪工作和公民生活必须具备的能力，包括六种能力 ^[16]
Bransford	学生通过提取原有经验以解决不同新情境问题的能力 ^[17]
美国卓越教育联盟	有效学习并能将所学付诸应用，将测试与其他能力相联系 ^[18]

表 2.2 国内深度学习的定义

相关作者	深度学习的概念
黎加厚、安富海	指在理解的基础上，以高阶思维为目标，能够批判地学习新知识，并将它们融入原有的认知结构中，能将已有的知识迁移到新的情境中，解决问题的学习 ^[19,20]
张浩、吴秀娟	深度学习是一种主动的、批判性的学习方式，是实现有意义学习的有效方式 ^[21]
杜鹃	是发展高阶思维能力、以学习者为中心的高阶认知工具 ^[22]
郭华、何克抗	学生围绕着有挑战性的主题，全身心积极参与，创新能力和高阶思维能力获得发展的有意义的学习过程 ^[23,24]

通过对国内外深度学习的概念进行梳理，可以发现国内外研究者们总体上把深度学习划分为学习过程说、学习结果说，另外布鲁姆的认知目标分类可以划分为学习层次说。综合国内外学者对浅层学习、深度学习的定义。本文将深度学习定义为：深度学习是指学习者以整合的知识为内容，以高阶思维的发展为目标，积极主动地、批判性地构建新知识，并能够将已有知识迁移应用，解决问题的学习。

国内外研究者除了对深度学习的概念进行界定外，也在相应概念的基础上，不同程度地对深度学习的主要特征进行了阐述。大部分研究者都从知识的加工方式进行概括，如 Eric Jensen、黎加厚、张浩、安富海等学者，将深度学习的特征概括为知识的批判理解、与原有知识进行联系、进行知识的有机整合、学习过程的主动建构、能够迁移应用、解决新情境中的问题、发展高阶思维能力等几个方面。除此之外，也有少部分研究者认为深度学习必须要提供有挑战性的任务，还有学者从情感方面强调了学习是学习者积极主动的行为，从学习的主动性、积极性、终身性等角度来对待深度学习。综合来看，深度学习重视学生的迁移运用能力、问题解决能力以及创新能力、终身学习能力的发展，当然，深度学习也不排斥浅层学习。

本文将深度学习的特征归纳为：深度学习强调情境的创设；深度学习突出内容的有机整合；深度学习注重知识的批判理解；深度学习着意过程的联系与建构；深度学习重视学习的迁移应用和问题解决。

2.2.2 深度学习的过程模型

从人类对学习的研究来看，学习不仅仅关注“学习是什么”，更要关注“学习是如何发生的”。深度学习作为一种重要的学习类型，在明晰深度学习的内涵与特征的基础上，同样要研究“深度学习是如何发生的”，理解深度学习的发生机制及实现过程，以构建深度学习的过程模型。

目前国外研究者已经提出不少关于深度学习的过程模型。如 Biggs 的 3P 模式。Biggs 为了明晰学习学习结果与过程间的关系，提出了深度学习的“预测-过程-结果”模式，简称 3P 模式，它指出学生的学习结果受到两个关键因素的影响：一个是学生自身因素，另一个是教学情境因素^[25]；Jensen 和 Nickelsen 的深度学习路线。在《深度学习的 7 种有力策略》中提出“深度学习路线”的过程模式，简称 DELC 模式，该模型以深度学习为目标，阐述学生需要具备哪些必要的知识与技能，为学习新知识做准备，教师需要采用深度学习的教学策略，将新知识与已有知识经验建立联系，以及在此基础上对知识的深层次加工，形成认知结构，最后阶段是评价与反馈^[14]。

国内有关深度学习的过程模型也层出不穷，例如吴秀娟的深度学习的过程模型，吴秀娟根据深度学习内涵特征，将深度学习的实现过程归为导入、主体和评价这三个主要阶段，并细分为九个环节^[26]；张立国的深度学习过程模型，模型以问题解决为前提，从学习最开始的注意与接受、回忆所学知识两个过程，到学习过程的联系新知识、批判性建构知识，最后能进行迁移运用和问题解决，并且评价与反思环节贯穿始终^[27]。此外，余明芳提出了深度学习在数学学科的过程模型，该模型首先以学习能力为前提、专心致志为条件、学习兴趣为关键因素，从而使学习者进入深度学习的起始阶段；其次，在学习过程中，通过建立知识纵横交错的关系，形成的网状认知结构，将知识融会贯通、自成体系；最后，数学学习的目标定位在数学思想与精神为核心的数学文化素养层面，可对接关键能力与必备品格^[28]。

综合国内外的深度学习过程模型，能够发现国内外促进深度学习的方式主要是从学生学习依赖的外部条件入手，创设有效的学习环境促进深度学习的发生。而网络画板可以创设各种各样的数学原型，首先从直观上吸引学生的注意力，激发学生的学习

兴趣，学生通过对课堂情境的感知，产生学习动机，逐步进入沉浸式学习状态；网络画板强大的智能推理技术、符号运算功能能协助学生展开进一步探究验证，加深对知识的深度理解，进入联系与构建的深度学习状态。

2.2.3 深度学习的评价体系

在深度学习的评价研究中，布鲁姆在认知领域的教育目标分类理论有很重要的参考价值，比格斯的 SOLO 分类理论应用也非常广泛。此外，由 WFHF 和 NRC 融合而成的深度学习能力框架也具有重要意义。本节主要针对这些评价框架展开述评。

(1) 布鲁姆的教育目标分类理论

布鲁姆根据学习者所达到的不同的思维水平和认知层次，将认知目标进行了六个水平的划分，由低到高分别是识记、理解、应用、分析、综合、评价，这六个层次的认知目标与浅层学习、深度学习之间的对应关系如表 2.3 所示。

表 2.3 深度学习认知目标与布鲁姆认知目标分类对照

学习类型	目标层次	内涵
浅层学习	识记	指记忆知识，对学过的知识或材料能够识别和再现
	理解	指对知识的掌握，能抓住事物的实质，把握材料的意义和中心思想
深度学习	应用	在新情境中应用所学知识技能
	分析	能将知识分解，找出组成的要素，明确各要素间的关系及原理
	综合	将各要素或部分整合成新的整体
	评价	依据一定的标准对事物做出价值判断

该认知目标分类方法能够指导对学习结果的测量与评价，在后来的发展过程中，安德森等人对上述目标重新进行了修订，由低到高分记忆、理解、应用、分析、评价、创造六个水平^[29]。黎加厚、安富海等学者将布鲁姆认知目标划分为浅层学习和深度学习，从表中可以看出，浅层学习对应记忆、理解两个目标层次，而深度学习对应应用、分析、评价、创造四个目标层次。

（2）比格斯的学习过程分类理论

比格斯团队采用问卷测量法对学习过程进行研究，在 1987 年发布了 SPQ（Study Process Questionnaire）学习过程问卷。该问卷包括表层、深层、成就动机及其相应的策略共六个因素，42 题项，主要用来评价学生的学习动机和学习策略。之后比格斯将原来的三种学习过程简化为两种，分别是深度学习和浅层学习，形成了 R-SPQ-2F 简化量表，共 20 个题目^[30]。但由于该方法无法揭示深度学习的发生过程。比格斯等人又提出了 SOLO 学习结果分类理论。从学习的质量水平与理解层次来看，SOLO 分类法与浅层学习和深度学习之间的关系如图 2.9 所示。

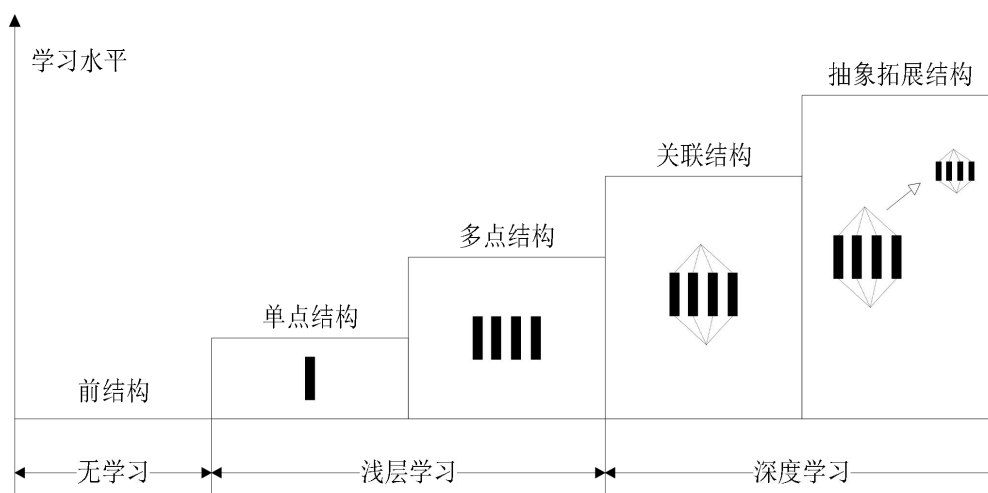


图 2.9 SOLO 学习结果分类与深度学习的关系

前结构层次中，学习者由于没有理解问题从而回避回答问题，或者同义反复，实际上处于“无学习”状态；单点结构和多点结构属于浅层学习；而关联结构和抽象扩展结构属于深度学习状态^[31]。因此，在实际教学过程中，教师可以通过把学生作答结果划分到相应的 SOLO 水平，进而评估学生是否达到深度学习。

（3）威廉和弗洛拉·休利特基金会（WFHF）的学习能力理论

美国研究委员会将深度学习能力分为认知领域、人际领域和内省领域三个维度^[15]。休利特基金会提出了深度学习素养的基本框架，在认知、人际、内省三个领域的基础上分为六项核心能力，详见表 2.4。

表 2.4 深度学习能力框架^[32]

三个维度	六项核心能力
认知领域	掌握核心学术内容 批判性地思考并解决复杂问题
人际领域	协同工作 有效沟通
内在领域	学会学习 发展学术思维

综上所述，布鲁姆的教育目标分类理论更多是从认知层面对深度学习进行评价，根据布鲁姆目标分类学，可以将教学目标进行不同层次的划分，以此来评价学生是处于浅层学习水平还是深度学习水平。比格斯的学习过程分类理论可以揭示学习的发生过程，能够关注到学习者对问题做出反应时，表现出的思维过程和认知水平，从而判断深度学习是否发生。而 WFHF 的学习能力理论，可以从认知、人际、内省领域全方位对深度学习进行评价。

因此，本研究在进行高中数学深度学习现状调查时，将结合 WFHF 的学习能力理论，从认知、人际、内省三个不同的领域进行设计问卷，从而全面地了解学生的数学深度学习水平。

2.3 理论基础

从计算机辅助教学的发展来看，先后经历了行为主义学习理论的初级阶段，认知主义学习理论的发展阶段，建构主义理论的成熟阶段^[33]。除此之外，还有许多教育理论都对网络画板助力数学深度学习有指导作用，比如加涅的信息加工理论、皮亚杰的认知发展学说、范·希尔夫妇的几何思维发展理论等，但元认知理论、多元表征理论、情境认知理论对本研究所起的作用更为重要。深度学习以理解、建构、迁移、反思为着力点，关于深度学习的发生环境，本文将从以下学习理论进行具体探析。

2.3.1 元认知理论

元认知的概念最早来源于弗莱威尔，弗莱威尔认为元认知是认知主体对自身心理状态、能力、任务目标、认知策略等方面的知识，同时也是认知主体对自身各种认知活动的计划、监控和调节^[34]。国内学者认为元认知的结构除了元认知知识、元认知体验外，还包括元认知监控。元认知与思维品质之间有密不可分的联系，元认知对学习者的记忆、理解、问题解决方面有重要作用，通俗来讲，元认知能够促进个体思维的发展，并且可以对学习过程进行监控和调节。

实际上，元认知本质上是对认知本身的认知，它代表了个体对于其自身的学习、思维等方面认知活动的自我觉察、自我监控和自我调节，这是自我意识高度发展的结果。基于元认知理论，我们理解学生能够有力的掌控他们的学习进程及思维活动，这有助于他们更好地学习。在评价时，我们要注重元将认知能力和其他认知能力相结合。深度学习的核心是高阶思维能力，而元认知是对认知的认知，也是一种高阶能力。深度学习和元认知之间是相互促进的，它们之间存在一定的联系，详见表 2.5。

表 2.5 元认知发展在深度学习中的体现^[22]

	元认知	深度学习
元认知知识	个体关于自己或他人的认识活动、过程、结果以及与之相关的知识	要求学习者不仅掌握知识，还要了解知识产生的过程
元认知体验	元认知体验，即伴随着认知活动而产生的认知体验或情感体验	要求学习者能够批判地检查论据的逻辑性，要求学习者评价新的想法，并且能将这些想法与结论联系起来
元认知监控	个体在认知活动进行的过程中，对自己的认知活动积极进行监控，并相应地对其进行调节，以达到预定的目标	要求学习者对其理解及学习过程进行反思

根据元认知理论，通过回顾反思等元认知能力对学习过程进行监控调节，有助于促进深度学习，而深度学习能力的发展又可以促进元认知的发展。

2.3.2 多元表征理论

对于多元表征，通俗地讲就是通过提供多元的信息呈现方式，对某一对象进行更清晰的刻画。通常情况下，在心理学相关研究范畴内，研究者眼中的多元表征泛指将一个学习对象用叙述性表征、描绘性表征等多种形式显示出来。在数学教育中，数学多元表征的含义主要来自英国数学教育家 Dienes 提出的多元具体化原则，这一原则是指通过呈现某一数学课题的实物模型或具体情境，来帮助学生从具体到抽象地理解数学知识^[35]。国内学者认为，数学多元表征是指同一个数学学习对象用叙述性（言语化表征）和描绘性（视觉化表征）两类本质不同的表征的多种形式所表征^[36]。数学多元表征表现在三个方面，包括感官途径可以是触觉的、视觉的、听觉的；展现形式可以是文字语言、符号语言、图形语言等；呈现状态包括静态和动态两种呈现方式。例如两角和余弦公式，符号表征为 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ，文字语言表征为两角和的余弦值为两角的余弦之积减去两角的正弦之积。

在实际教学中，数学往往因其高度抽象，而难以被感官直接感知，由于表征手段的制约，学生不知数学如何意会，教师不知数学如何言传。在人工智能时代，多元表征视域下的信息技术与数学课堂融合的策略有很多，网络画板可以在“数”与“形”之间自由转换，建立“抽象形式”与“直观形式”之间的联系。通过网络画板的直观性，可以直观表征数学概念或者数学问题，调动学习者多感官的认知因素，激发学习者的学习兴趣，并且对知识结构可以做到一目了然，进而展开理性思考；借助网络画板的动态性，可以扩充学习者的思维，不同的表征形式是为了对概念或问题进行不同角度进行视觉化或体验化的阐释，使学生深入理解数学的本质，增强逻辑思维能力；利用网络画板创设特定情境，将多元表征渗透到数学课堂教学中，合理运用情境的表征推动学生理解概念，能够解决复杂问题。不同的表征形式之间相互补充、相互完善，从而内化学习对象在认知结构中的心理表征，完成图式的建构，实现对数学对象的深刻理解，提高问题解决能力。

2.3.3 情境认知理论

情境认知是继行为主义“刺激-反应”学习理论与认知心理学的“信息加工”学习理论后的又一个重要的研究取向，其学习思想可追溯到杜威的“做中学”和维果斯基的社会文化观。情境认知理论认为学习的发生不可能脱离具体的学习情境，学习情境是贯穿整个学习过程的最重要、最有意义的组成部分，情境不同，产生的学习效果也不同^[37]。因此，在教学过程中，采用传统的教学方式和信息化的教学方式，实际上会产生不同的学习情境，学生因为受到学习环境的影响，也会产生不同的学习动机，从而极大的影响学生的学习态度和积极性，导致学习效果存在差异。学生因为情境不同导致的知识理解不同，因而出现浅层学习与深度学习之分。

根据情境认知理论，学习的过程就是将自我置于特定的知识产生环境中，通过积极地参与具体的情境，以获取知识、构建意义并解决问题。这与数学深度学习的内在特征几乎吻合，作为一种建构性学习，数学深度学习要求学习者能够理解与批判、联系与建构，并灵活地运用知识到各种具体情境中来解决实际问题。基于情境认知理论的关键特征，我们可以借助网络画板，创设能够促进深度学习的真实的、有意义的学习情境，学习者通过合法的边缘性参与、共同体的建构与支持，理解数学知识，形成知识体系，最终可以解决真实情境中的复杂问题。

第3章 高中数学课堂深度学习的现状调查及分析

为了解现阶段高中生数学深度学习的水平，发现课堂教学存在的不足，本研究以广东省某中学高一学生为研究对象，从认知领域、人际领域、内省领域等维度对高一学生进行了问卷调查，为网络画板助力数学深度学习的教学模式设计提供参考。

3.1 调查问卷的设计

本研究的调查问卷主要参照 NESS-China 深度学习子量表、陈世亨等人开发的“初中生数学深度学习能力评价指标”，后者的深度学习能力评价指标以布鲁姆的教育目标分类理论、比格斯的学习过程分类理论、威廉和弗洛拉·休利特基金会（WFHF）的学习能力理论为基础，依据上述评价体系设计了《高中数学深度学习能力调查问卷》。具体如表 3.1 所示。

表 3.1 问卷维度分析

一级维度	二级维度
认知领域	知识建构
	问题解决
	批判性思维
	信息技术使用
人际领域	迁移应用
	有效沟通交流
	协作能力
内在领域	反思能力
	自主学习
	学习动机

本问卷设置了 3 个一级评价维度，在每个一级评价维度下面分别设置二级维度，共 10 个二级评价维度，用 33 道题目对当前数学课堂的深度学习现状进行调查。问卷采用李克特五级量表法评分，得分越高说明学生在此维度的能力就越好。

在完成调查问卷的初稿后，征询导师及实验学校教师的意见，对一些维度进行修改后形成正式问卷，详见附录 1。

3.2 问卷的测试

3.2.1 问卷的发放

本次问卷调查是在广州某中学展开的，该校学生的水平在广州市具有一定的代表性，能够反映出高中学生在数学学习方面的普遍情况，具有普适性。本次抽取的发放问卷的班级为高一年级（3）班、（4）班、（5）班、（6）班，四个班级为平行班，班与班之间的学习起始能力基本相当。

此次调查发放纸质版问卷，共发放问卷 160 份，回收问卷 150 份，回收率为 93.8%，经审核有效问卷 131 份，有效率为 87.3%。

3.2.2 问卷信度、效度分析

（1）信度分析

信度是指对量表可靠性及一致性程度的度量，是检验量表是否科学的指标之一^[39]。本研究主要采用应用比较广泛的克隆巴赫信度系数（ α 系数）来对量表的内部一致性程度进行检验。

表 3.2 问卷信度分析

量表维度	项目数	Cronbach α 系数
认知领域	17	0.817
人际领域	6	0.700
内省领域	10	0.852
总量表	33	0.890

本问卷 Cronbach α 综合系数为 0.890，大于 0.8，可知该问卷信度良好，可以用于进一步调查分析。

(2) 效度分析

效度分析主要是指对量表的有效性进行检测，本研究采用比较常用的结构效度分析法，通过 KMO 和 Bartlett 检验结果来衡量问卷各变量之间的相关性，相关性越强，问卷的结构效度越高^[39]。当 KMO 值大于 0.6 时说明问卷结构效度合理。本问卷效度检验 KMO 值为 0.802，大于 0.6，Bartlett 球形度检验 p 值小于 0.05，说明该问卷的效度较好。

表 3.3 问卷效度分析

KMO 取样适切性量数		0.802
巴特利特球形度检验	近似卡方	1760.445
	自由度显著性	528
	显著性	<0.01

3.3 研究结果

3.3.1 受调查者的情况分析

(1) “认知领域”对应数据统计及分析

认知领域包括知识建构、问题解决、批判性思维、信息技术使用和迁移应用等五个方面，其描述性统计的结果如表 3.4 所示。其中知识建构有三道题目，批判性思维有两道题目，问题解决、信息技术使用和迁移应用各有四道题目。从统计情况来看，在问题解决方面的均值最低为 2.75，在信息技术使用方面均值最高为 3.14，说明在信息技术飞速发展的今天，信息技术在教育领域逐渐普及，有相当一部分教师会借助希沃白板、几何画板等多媒体工具进行教学，同时学生也具备一定的信息技术使用能力以及信息检索能力和信息整合能力；但是也能够发现学生在解决问题方面的能力却不容乐观，提高解决问题的能力是教学的难点和痛点。从整体来看，认知领域均值在 2.75 到 3.14 之间，各个维度差别并不是很大，学生的认知领域水平基本处于“不确定”状态，说明学生对深度学习的认知方面把握比较模糊。

表 3.4 认知领域描述性统计表

	N	最小值	最大值	均值	标准差
知识建构	391	1	5	2.78	1.141
问题解决	519	1	5	2.75	1.169
批判性思维	262	1	5	2.85	1.095
信息技术使用	521	1	5	3.14	1.067
迁移应用	524	1	5	3.03	1.040

(2) “人际领域”对应数据统计及分析

人际领域包括有效沟通交流和协作能力两个部分，其描述性统计的结果如表 3.5 所示。其中有效沟通交流方面包括三道题目，协作能力方面包括三道题目。从统计情况来看，有效沟通交流均值为 3.66，协作能力均值为 3.68，表明学生的有效沟通能力和协作能力相当，并且能基本处于“比较符合”水平，也说明学生在深度学习的人际领域方面把握的比较好。

表 3.5 人际领域描述性统计表

	N	最小值	最大值	均值	标准差
有效沟通交流	392	1	5	3.66	1.054
协作能力	393	1	5	3.68	1.021

(3) “内省领域”对应数据统计及分析

内省领域包括反思能力、自主学习和学习动机三个部分，其描述性统计的结果如表 3.6 所示。其中反思能力方面包括三道题目，自主学习方面包括五道题目，学习动机方面包括两道题目。从统计情况来看，学生在内省领域均值方面差别较大，均值在 2.88 到 3.68 之间，其中反思能力均值为 3.68，表明学生能够具备一定的反思总结能力，但是学习动机均值仅有 2.88，显然学生的学习动机不足。学习动机对应的两道题目是 32 题“我是因为对数学知识感兴趣而进行学习的”以及 33 题“我对数学知识和数学学习抱有强烈的好奇心、求知欲和探究欲”表现相对较差，这表明高中学生在数学学习上的主动性不强，缺乏学习兴趣，这也是也高中生数学深度学习能力的水平不高的重要因素之一。

表 3.6 内省领域描述性统计表

	N	最小值	最大值	均值	标准差
反思能力	393	1	5	3.68	0.930
自主学习	649	1	5	3.19	1.109
学习动机	260	1	5	2.88	1.386

(4) 高中生深度学习能力个性化差异分析

通过对调查问卷进行分析，可以全面了解高中生在深度学习的整体水平，此外，还可以分析个别学生的深度学习水平，通过统计图表，可以直观呈现不同学生的个性化差异。图 3.1 是成绩相近的两位高一学生的深度学习能力雷达图。从图中可以看出，两位学生的数学深度学习水平在各个维度方面有所不同。其中 31 号学生在知识建构、批判性思维、迁移应用、反思能力和学习动机方面的表现优于 86 号学生，而在问题解决、信息技术使用、有效沟通交流、协作能力、自主学习方面 86 号同学更具优势，因此，两位同学在深度学习能力的培养方面也应有所侧重。

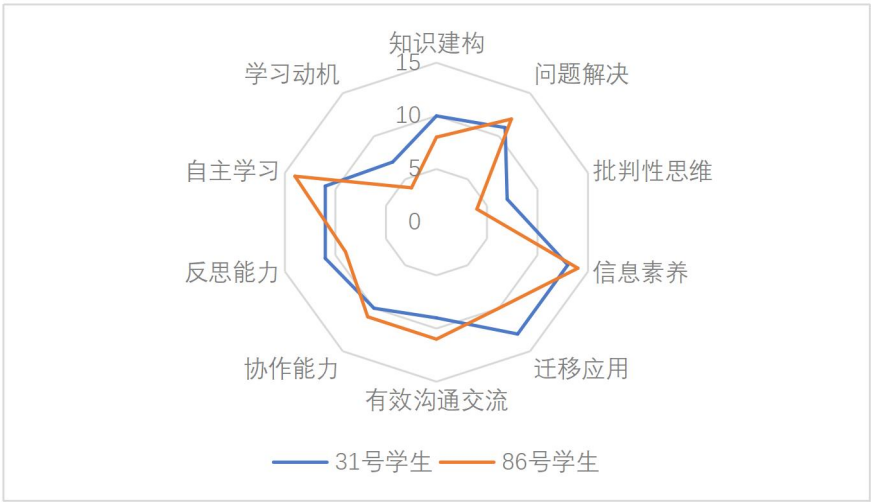


图 3.1 31 号和 86 号学生深度学习能力雷达图

教师通过深度学习能力测评可以了解学生的整体学习表现，也可以有针对性的了解个别学生在某方面的欠缺。从雷达图中我们可以看出，对 31 号同学来说，应着重培养该生的人际领域，提高他们的有效沟通交流和协作能力；而对 86 号同学来说，应该侧重提升批判思维能力，激发他们的学习兴趣，提高他们的学习动机。

3.3.2 主要存在的问题分析

通过对调查问卷进行分析，能够发现高中生在深度学习方面存在不足，主要概括为以下几个方面。

（1）数学学习动机不足

深度学习要求学习者能够对学习内容有浓厚兴趣和积极性。良好的学习动机是深度学习的前提，而良好的学习情境能够激发学生的学习兴趣，强化学习动机。但在当下的数学课堂中，兴趣的培养和学习动机的激发常常被淡忘，提高解题能力往往成为唯一的目标。调查结果显示，高中生的数学学习动机严重不足，很少有学生学习数学是因为对数学知识有强烈的好奇心、求知欲和探究欲，学生也不知道数学有何实际应用价值。爱因斯坦曾说过“兴趣是最好的老师”，兴趣是学习的原动力，缺少兴趣会导致数学学习动机不足。面对考试带来的压力，在现有的课堂教学模式下，教师不注重教学情境的创设，往往忽视了对学生数学学习兴趣的培养。

（2）知识建构能力有限

联系与建构是深度学习的重要特征。数学深度学习体现在学习者对数学概念、知识、问题、方法和思想之间联系的把握上，体现在数学知识间的结构体系上。高中学生对于数学概念或者数学性质的学习往往不是理解性记忆的，而是通过对知识不断地复述和记忆，以达到熟练记忆的目的。在这种情况下，如果忘记具体内容，不知道其来龙去脉，自己就无法推导出来。根据建构主义理论，学生在学习新知识时，如果不能联想到以前学习的内容进行意义建构，那么对知识的理解就会比较“模糊”，不能够利用思维导图或其他方式来整理归纳学过的数学知识，相应地，学生的知识建构能力自然就会较弱。

（3）问题解决能力较差

深度学习要求学习者能够将已有知识迁移到新的情境中，并解决问题。波利亚在《怎样解题》中表明，解题应遵循系统原则，把问题放在与之关联的问题情境中，与已有经验建立联系，从整体考察问题，拟出最佳方案。因此，知识关系建构是问题解决的基础。高中生在面对数学问题时，不能够很好地区分数学题目中的有效条件和干

扰信息。因此学生解答数学问题的能力较弱。另外在面对一题多解问题时，学生往往只尝试一种方法解除题目后就结束了，不会考虑多种方法求解，也就不能够选择出一种最优解。在学习数学知识时，往往不会把思考这些数学知识能够解决哪些生活问题。在生活中，学生也不能够将数学和现实生活建立联系，不能够从数学的角度发现问题，提出问题。学生的数学核心素养有待提高，缺少用数学的眼光观察世界、用数学的思维方式思考世界、用数学的语言表达世界的能力。

（4）缺乏批判性思维

深度学习意味着理解与批判。数学学习的基础是理解，只有进行批判性的思考，才能将知识内化，融入自己的知识体系。批判性思维是一种能够质疑设问、理性求证的思维。问卷发现，当高中生的观点和老师的观点出现不一致时，学生一般不会坚持自己的观点，究其原因主要是对数学知识掌握不扎实，不够自信导致。学生也很少对已有的信息和观点进行批判性地思考，很少质疑老师讲授的知识，也很少对一节课的内容提出相关问题。这表明学生缺少深入的思考，习惯被动接受知识，不善于表达或者不敢表达自己的观点，以至于缺少独立思考能力。

第4章 网络画板助力学生深度学习的教学模式

结合前文的问卷调查结果，本章在现代教学理论思想的指导下，考虑到网络画板的性能特点，提出了网络画板助力数学深度学习的具体教学原则及实施流程，并提供了《平面向量基本定理》的教学样例。

4.1 网络画板助力学生深度学习的教学原则

借助网络画板进行教学通常涉及可视化的教学内容，已有研究指出其包含的教学原则有直观性原则、兴趣性原则、形象与抽象相结合原则等，本研究认为以下教学原则更具指导意义。

4.1.1 科学性教学原则

科学性教学原则实际上就是要根据具体的教学内容、教学条件以及学生的身心特点实事求是的进行教学。网络画板助力数学深度学习的教学原则，需要考虑到网络画板的性能特征，另外也要考虑到学生学习心理特点、思维规律以及实际的教学内容。在初中，学生的思维从形象抽象思维向经验型的抽象思维发展；在高中，是由经验型抽象逻辑思维向理论型抽象逻辑思维转化。因此，要合理使用网络画板，辅助学生在图形语言、文字语言、符号语言之间灵活转换，帮助学生从具体形象思维到抽象逻辑思维的过渡和发展。同时我们也要避免一味使用网络画板软件，让学生产生视觉依赖，阻碍了学生的抽象思维发展。比如立体几何的一些证明题，其目的就是为了发展学生的空间想象能力、逻辑思维能力等，如果直接用网络画板呈现出图形反而降低了难度，达不到想要的效果，错失了提升学生数学核心素养的机会。网络画板要科学使用才能促进深度学习。有学者认为数学软件对以下内容比较合适^[33]：常量到变量的过渡；静态到动态的变迁；平面图形向空间图形的转化；逻辑思维与形象思维的结合；教学资料的汇总和呈现；研究性和开放型问题的探索等。

4.1.2 学习者为中心原则

建构主义认为学习是学习者在本身已有经验结构的基础上，主动地对知识经验进行综合、重组和改造，从而用以解释新信息，并最终建构属于个人意义的知识内容。建构主义把教师看成是学生学习的帮助者、合作者，引导学生从原有的知识经验中“生长”出新知识^[40]。就网络画板在促进数学深度学习方面而言，学生要能够充分发挥自己的主观能动性，积极主动地参与其中，真正作为学习的主体，这主要是通过开展数学实验。数学实验提供了以学生为主体的师生互动课堂，为学生“做数学”提供了必要的工具和手段，使学生体会从具体到抽象、从粗糙到精确的数学发现过程，学生积极地参与教师创设的学习情境中，进行有意义地自主建构知识。因此，从建构主义角度讲，使用网络画板助力深度学习，教师应该创造生动有趣以及多层次的情境目标，学生在这些情境中尽情地自主学习，相互合作和交流，并进行自主评价。通过网络画板这一认知工具，学生能够自主建构知识，亲自去猜想、探索发现数学知识，将数学课堂发展为生成的课堂、研究的课题以及创新的课堂。

4.1.3 逐层抽象原则

数学是高度抽象的一门科学。张奠宙教授曾说，“数学的对象是抽象的、形式化的思想材料”^[3]。数学抽象是从数量间关系、图形间关系中抽象出数学概念间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并用数学语言予以表征^[2]。从数学的发展史来看，学习数学实际上就是学习“数学化”的过程，皮瑞-基伦的“洋葱”模型也从学习理论的角度给我们有益的启示。使用网络画板能够将知识逐步抽象的过程呈现在学习者眼前，学生在经历数学知识发生的过程中，实现思维由低阶到高阶，内容由易到难、由浅入深的提升。此外，网络画板辅助数学教学的主要形式是几何图形、图象、动画、动态演示等，借助网络画板能将抽象的数学知识直观化、具体化、形象化。但应注意在教学时应避免学生停留在直观形象层面，而应该把网络画板中的数学对象，逐层抽象到形式化层面上来，实现经验性数学到形式化数学的转变。

4.2 网络画板助力学生深度学习的教学模式构建

教学模式是在某些教育理论和教育思想观念指导下构建的具有稳定性和广泛性的教学设计框架和程序^[41]。教学模式可以帮助教师宏观掌握教学活动整体与要素间的关系，创设教与学的系统“过程”。教学过程是师生交往的动态过程、教学过程是教师指导下学生的特殊认识过程、教学过程是一个促进学生身心发展的过程、教学过程是教书育人紧密结合的过程^[42]，在这些对教学本质理解的前提下，教学过程指向深度学习的教学形式。

本文参考余明芳提出的深度学习流程框架^[28]，综合深度学习的内涵和理论基础，在网络画板助力深度学习教学原则的基础上，构建了网络画板助力深度学习的教学模式，如图4.1所示。

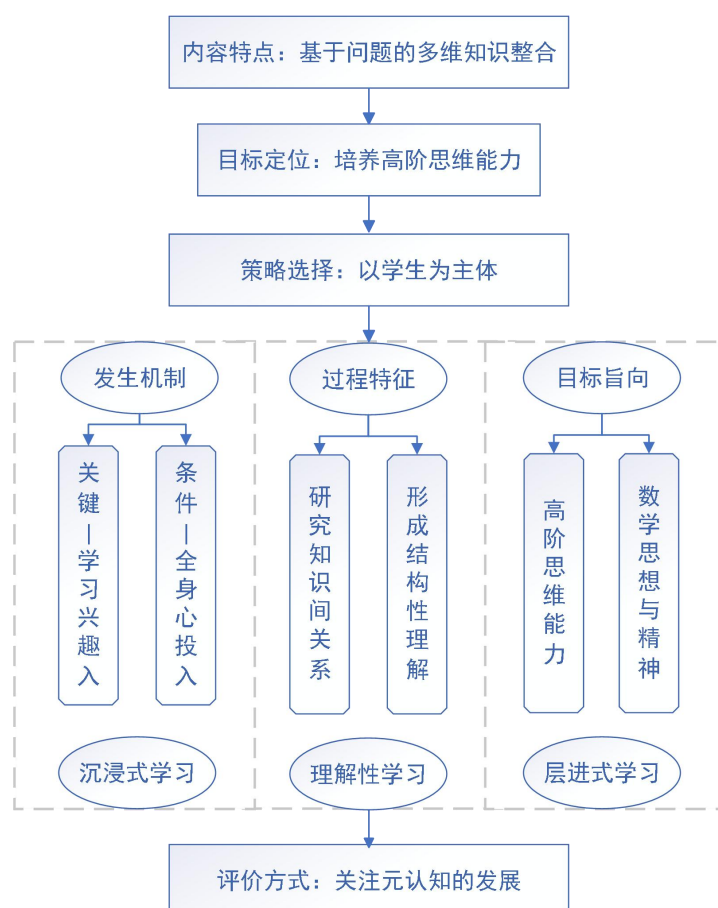


图 4.1 网络画板助力深度学习的教学模式

本研究认为数学深度学习的教学过程应立足于学情和教材内容，以高阶思维发展为目标，利用网络画板创设直观情境，强化内在学习动机，促进知识关系建构，渗透思想与精神，最后对学生评价，关注学生元认知的发展。其中在教学策略方面，结合网络画板的功能特点对教学流程作了具体的设计，教学活动从发生机制、行为进程、目标旨向三个环节出发，根据相应的沉浸式学习、理解性学习、层进式学习三个学习状态，整体把握数学深度学习的发生。

以下将对教学模式中的内容整合、目标定位、策略选择、评价方式四个环节进行具体解释。

4.2.1 内容整合

深度学习实质上是结构性与非结构性知识意义的建构过程，也是复杂的信息加工过程^[14]。浅层学习的学习者往往只能孤立记忆知识和被动接受知识，而深度学习的学习者则能够有机整合知识、主动建构知识。数学学科知识复杂的内在结构未必契合学生的认知水平，但中小学课堂上学习的内容是教师基于课程标准和教材、对学科知识进行多维度解读而确定的，具有结构化的特点。根据数学学科抽象性的特点，可以采用多元表征，将教材内容可视化，直观化、情境化，合理地选择、重组、改造和活化知识才能实现知识的有机整合。

教学内容不是一个简单的信息组合，而是多维度的知识整合。内容整合首先包括对知识本身的整合，包括新知识与先前知识的联系以及跨学科知识的联系等，通过将内容进行整合，建立知识网络，以便更好的存储；内容整合也包括对学习过程的整合，通过将知识建立纵横关系，深化认知结构，保持长时记忆，以便提取和应用。在实际教学过程中，对教学内容整合时，需要全面分析课程标准和教材、深入挖掘教材、灵活整合教材。例如对《平面向量基本定理》单元内容分析时，结合课程标准中对本单元的要求，基于整个平面向量及其应用章节来宏观把握教材内容，建立平面向量基本定理与平面向量共线定理的联系，实现“一维”到“二维”的过渡，此外，还可以与物理学科建立联系，把握知识的纵向和横向联系，实现系统的学习。

4.2.2 目标定位

指向深度学习的教学，就是把教学目标定位于发展学生的高阶思维能力，提升数学核心素养。从布鲁姆的教育目标分类来看，当前中小学生的学习很大一部分停留在“记忆、理解和简单应用”的层面，学习者只知道“是什么”，不知道“为什么”。很多学生只能模仿老师解题，记忆一些固有的套路，不能举一反三，因此，在指向深度学习的教学中，教师应该将“分析、评价和创造”作为教学目标的重点关注对象。深度学习教学设计成功与否，要看学习者高水平思维有没有获得发展。

普通高中数学课程标准把培养和促进学习者的高阶思维能力作为重要的发展方向，因此，教师需要深刻领会课程标准，从发展学习者高阶思维能力和提升数学核心素养的角度来确定教学目标。新课程改革以来，“二维”教学目标逐渐被“三维”教学目标代替，取得了诸多成效，但也存在逐渐僵化等问题。基于数学核心素养的教学目标，能够满足数学深度学习的内在要求，可以良好地反应学习是否达到了目标要求。因此，在进行目标定位时，应结合普通高中数学课程标准，立足于数学核心素养，基于学生的“过去”与“现在”的分析，明晰学生“未来”可能的发展。例如对《平面向量基本定理》教学目标进行定位时，可以从情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思、数学品格与价值观五个维度，从体现平面向量基本定理主要核心素养的数学抽象、逻辑推理、直观想象不同的水平设定教学目标。

4.2.3 策略选择

学习科学认为教育软件是学习科学的中心，因为计算机的可视化功能和处理能力可以支持深度学习^[43]。网络画板作为动态数学教育软件之一，其助力深度学习的学习策略必须是以学习者为中心的，教师更多地承担引导着、咨询者、专家等角色。以学习者为中心的学习策略有很多，如支架策略、反思策略、元认知策略等，应依据具体情况来选择。深度学习是有目标旨向的进阶过程，本文从数学深度学习的发生机制出发，提出了网络画板助力深度学习的策略，分别对应数学深度学习的三个状态，具体流程如下。

(1) 强化内在学习动机，引导学生进入沉浸式学习状态

从数学深度学习的发生机制来看，学习兴趣是进入深度学习状态的关键因素，全身心投入是深度学习的重要条件。因此，在教学过程中，要以兴趣为始点，将学生的注意力集中于课堂，使学生的思维尽可能活跃，为知识关系建构奠定基础。然而，兴趣的多样性和兴趣形成的复杂性决定了多方面兴趣的培养不是一件容易的事情^[44]。网络画板作为学习者重要的认知工具之一，可从如下途径激发学习兴趣，强化内在学习动机。

第一，创设情境，增强直观。数学源于对现实世界的抽象，多以符号运算、形式推理表达概念命题，使学习者感到抽象、枯燥，因而缺少学习兴趣。数学之所以高冷，多由于它难以被感官感知。网络画板能够以直观的方式呈现原型，用网络画板创设直观情境，既可以增加课堂趣味，又可以通过情境辅助学生思维过渡。此外，建构主义认为“情境”、“协作”、“会话”、“意义建构”是学习的四大要素，“情境创设”是更好地“意义建构”的基础，就深度学习的情境属性而言，通过网络画板创设更加“真实的”课堂环境，学生才有兴趣积极地参与课堂活动，最终才能够强化学习动机，进入全身心投入的学习状态。

第二，渗透美学，增加趣味。在实际教学中，渗透数学美育，是发展数学情感，培养数学兴趣的重要途径。通过网络画板制作的课件，可以集色彩、图象、动画、声音于一体，融趣味性、诗意性、数学美于一身，如黄金分割、斐波那契数列、杨辉三角等，能够极大的激发学生学习的兴趣和求知欲。此外，通过网络画板还可以制作数学之心、沙漏正弦、魔方等中学生感兴趣的课件，不仅可以活跃课堂气氛，还可以传授数学知识，增强学习动力，保持沉浸式学习状态的持久性。

例如，在《平面向量基本定理》单元的教学开篇，教师可以借助网络画板给出不同方向、不同大小的向量 $\mathbf{a}$ 及向量 $\mathbf{e}_1$ ，请同学们用学过的知识用 $\mathbf{e}_1$ 表示给出的向量。通过这一特定的情境，学生发现平面内还存在只用一个向量表示不了的其他向量，从而产生认知冲突，激发好奇心和求知欲。教师也通过特定的情境，辅助学生思维过渡，使学生的思维进入活跃状态，从而达到强化学习动机的目的。

(2) 注重知识关系建构, 引导学生进入理解性学习状态

从数学深度学习的过程特征来看, 以理解为核心, 研究知识的关系建构, 构建深度学习的知识网络, 才能从沉浸式学习状态进入理解性深度学习状态。知识关系建构是有意义学习、建构主义学习理论和教育心理学关注的问题, 如有意义学习理论认为学习者应该有将新旧知识进行联系的心向; 建构主义学习理论认为学习者要构建新旧经验之间的联系, 生成知识经验结构; 认知心理学认为学习者要将同类事物联系起来并对知识结构有通式理解^[46]。理解与批判、联系与建构是深度学习的重要特征, 在促进学生理解方面, 具体方法如下。

第一, 将内容直观化、形象化。数学是高度抽象化、形式化、符号化的一门科学, 因为缺乏具体直观, 所以难以理解。网络画板等数学动态教育软件可以轻松地展示圆锥曲线、极坐标的画法以及立体几何、解析几何中参数方程的大部分内容, 直观形象地帮助学生更好地理解。将抽象问题直观化、简单化, 让抽象的数学思维依附于直观想象, 实际上就是在进行知识建构, 寻找知识间的关系。通过示范教学开展精彩的数学活动, 可以唤起学习者内在的探究欲望, 长时间沉浸于数学思考中, 从而深化对知识的理解。

第二, 开展探究, 深化认知。传统数学教学, 往往重演绎轻归纳, 学生缺少提出猜想、发现结论的过程, 而网络画板可以为学生建构前后一致、逻辑连贯的学习过程, 学生能够在丰富的问题情境中, 通过观察、画图、尝试、归纳、类比等活动发现数学规律, 经历合情推理发现结论的过程, 从而顺利地建构知识。此外, 通过网络画板展开数学探究活动, 辅助学生在探究协作中产生思维碰撞, 学生主动类比归纳, 发现结构、形成结构, 并进行多维度探讨, 在知识纵横关系和“簇知识”的基础上, 形成结构性理解, 把握深度学习的本质。

第三, 拓展迁移、解决问题。以归纳、拓展、迁移的方式, 协助学生解决数学问题, 获得数学结论, 可以夯实基础概念学习, 加深对数学概念的学习印象, 帮助学生形成完整的数学知识网络。此外, 可以引导学生用已有的数学知识解决生活实际问题, 通过拓展问题的深度和广度, 完善数学知识体系, 感悟知识的整体性, 从而实现理解性深度学习。

例如，在《平面向量基本定理》的教学过程中，教师通过网络画板给出任一向量 a 和向量 e_1 、 e_2 ，引导学生猜测向量 a 是否能用 e_1 、 e_2 来表示及如何表示，从而发展学生的合情推理能力。教师引导学生类比向量共线定理概括出结论，发现数学知识之间的前后联系；在平面向量基本定理的生成过程中，引导学生从熟悉的物理背景出发，将向量分解为两个不共线的分向量，建立数学与物理学科之间的联系，促进知识关系建构。通过网络画板继续开展探究，给出不同的向量 a 用 e_1 、 e_2 进行代数表示。随后教师借助网络画板进行动态演示，改变向量 a 的大小和方向，发现向量 a 总能表示成 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式，而且这种表示是唯一的，教师引导学生进行证明获得结论，最后通过解决实际问题，深化对知识的理解。

（3）启悟思想涵育精神，引导学生进入层进式学习状态。

从数学深度学习的目标旨向来看，发展数学思维素养与数学精神素养，才能从理解性学习状态最终进入层进式学习状态。高阶思维能力是深度学习的核心特征，在布鲁姆认知目标分类里面，对应“应用、分析、综合、评价”层次。在情感方面，数学思想、理性精神、思维品质等作为数学文化素养的主要部分，要在长期坚持中渗透，在潜移默化中实现。具体方法如下。

第一，学习者动态的知识建构是高阶思维产生的催化剂，通过“创设情境，促进理解；开展实验，促进探究；迁移应用，促进反思”这一系列过程，通过对知识的分析、类比、归纳、演绎等高阶学习活动，用元认知、反思、总结等高阶认知策略建构认知，发展良好的数学表达、数学推理和自我监控的能力，从机械获取知识表层含义的低阶思维向深入理解知识的高阶思维发展。

第二，促进学生数学精神素养的发展的途径有，帮助学生领悟数学方法与思想的概念，如配方、换元、消元等方法以及转化与化归、数形结合、类比推理等数学思想；引领学生感受数学思想的统摄性，使教学内容在思想的统领下，高屋建瓴地理解把握知识与方法；引导学生凝练思想过程同步涵育数学精神，致力于在广泛应用中推动科学社会发展；引导学生分析数学精神地内涵要义，从理解数学求真的方式促进学习动机^[28]，进而促进深度学习。

4.2.4 评价方式

在深度学习的评价环节中,要注重发展学生的元认知能力。深度学习的评价主要是评价学生在学习过程中是否有深度思考、是否应用批判性思维、是否在充分理解的基础上做出决定和判断,可以采用观察、调查、谈话评价、同伴评价等评价方式。因此,教师在评价的过程中要重点关注学生元认知的发展,只有元认知发展,才能强化学生学习的动机,将学习引入更高层次。此外,深度学习还要求教师重视形成性评价在学生在学习中的价值,关注学生的学习状态并及时给予反馈,这可以帮助学生深入理解学习内容,改进学习策略。

良好的评价反馈能够真正将教学信息转变为学习信息。在实际教学中,教师要对学生的任务完成结果及其行为表现,进行评价反馈;对学习过程的评价反馈,关注学生使用的方法以及对内容是否有深层理解;关注学生自我的调节,协助学生积极进行自我评价,使之成为深度学习的一部分,并在评价中继续促进深度学习。

4.3 网络画板助力深度学习的教学样例

本节主要选取典型的数学教学案例进行设计研究。针对网络画板等多媒体信息技术的应用,许多数学课程已经有比较成熟的案例,例如基本初等函数、三角函数图象和性质的案例、立体几何部分涉及的案例以及圆锥曲线部分的案例。鉴于此,笔者根据网络画板的功能特点,选取了《平面向量基本定理》进行案例设计研究。

4.3.1 《平面向量基本定理》教学设计

一、内容分析

1、教材分析

本节课选用人教A版《普通高中教科书·数学》必修二第六章第三节第一课时的内容。课程标准把向量分为“平面向量及其应用”和“空间向量与立体几何”两个部分,本节课属于前一部分,课程标准对本节课的要求是理解平面向量基本定理及其意

义。本节课是平面向量中的核心内容，学生对定理的理解关系到对整个平面向量内容的把握。

纵观整个向量体系，向量有着丰富的物理背景，向量的概念、运算、定理等无不是通过物理学科中力或位移来引出，在教学中应该渗透知识在跨学科之间的联系。向量是几何和代数共同研究的对象，是沟通几何与代数的桥梁，在解决实际问题有重要作用，要注重发展学生的数学应用能力。平面向量在平面几何、平面解析几何、三角函数中均有广泛应用，平面向量也是空间向量的基础，教师要引导学生把握向量跨章节、跨学科的纵横联系。

平面向量基本定理能够加深前面学习的向量的概念、运算体系等的认识。平面向量基本定理说明了同一平面内任一向量都可以表示为 $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 不共线)，体现了平面向量的“二维性”，这是对平面向量的一个基础性认识。另外，平面向量基本定理也是向量坐标表示的基础，可以建立平面向量与有序数对的对应，由平面向量基本定理知，选定一组基底 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ，则任一向量可表示为 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ，在此基础上，向量运算转化为数量运算。在本节课的教学中，要突出平面向量基本定理的重点，突破平面向量基本定理唯一性证明的难点。学生对平面向量内容的学习，也为后面空间向量的学习奠定了基础。

2、学情分析

在知识方面，学生在学习本节课之前已经掌握了平面向量的概念、向量的加减法运算、数乘运算、数量积运算以及向量共线的定理等知识，这些内容都为学习本节课的知识做了铺垫。在能力方面，高二的学生已经具备一定的自主探究和抽象概括能力，也为本节课的探究活动奠定了基础。

但是学生在学习这部分知识时也会出现障碍：一方面，从向量概念来看，它存在大小和方向两种属性，类比物理知识容易理解，但对该定理所蕴含的数学思想方法难以把握，应用时很容易出错；另一方面，平面向量基本定理的表述高度抽象化和形式化，学生往往抓不住定理的本质，对这部分知识的认识处于静态，难以进行知识的整合与建构，也谈不上应用。

二、目标定位

表 4.1 平面向量基本定理的教学目标

	数学抽象	逻辑推理	直观想象
	水平 2	水平 2	水平 1
情境与问题	能够在关联的现实情境中发现问题并抽象为有关向量的数学问题	能够在问题的探究中，理解解类比是发现和提出数学命题的重要途径：能将一维的向量共线定理推广到二维的平面向量基本定理	能够在熟悉的情境中，发现平行四边形法则关系；了解平面向量基本定理的物理背景
知识与技能	能够运用向量的运算法则解释对应的向量之间的关系；能够理解平面向量基本定理及其意义	能够理解平面向量基本定理的条件与结论；通过分析向量共线定理的条件与结论，借助向量的线性运算，能够证明基本定理的“存在性”以及表示的“唯一性”；能够应用定理解决有关向量的问题	能够作出平行四边形，从而探究定理生成的过程，借助向量大小和方向的任意变化，发现数学规律，从几何的角度理解定理
思维与表达	能够用数学语言表达平面内任一向量与基底之间的关系；能够领悟其中转化与化归的数学思想，初步建立向量共线定理与向量基本定理的网状知识结构	能够理解并用数学语言表达严格的演绎推理过程，在综合运用基本定理分析和解决问题的过程中，形成严谨的理性思维	能够数形结合，运用数学语言表述平面向量基本定理的证明过程；能够借助平面向量基本定理启迪学生解决平面几何问题的思路
交流与反思	在交流的过程中，能够用平面向量基本定理解释具体的数学问题	在师生互动中，能够始终围绕平面向量基本定理展开，观点清晰明确，论述有理有据	在日常交流过程中，能够利用图形直观进行沟通交流
数学品格与价值观	在类比推理、直观感知、严谨论证中提高发现问题、分析问题、解决问题的能力；在自主学习、合作探究中，感受类比、转化与化归、数形结合等数学思想，逐渐形成严谨求实的思维品质与理性精神		

教学重点：探索发现和理解平面向量基本定理。

教学难点：平面向量基本定理的探究和证明。

三、策略选择

（一）创设情境、提出问题

问题 1：由共线向量定理可知，若给定一个向量 e_1 ，则所有与 e_1 共线的向量 a 都可以用 e_1 唯一表示，这使向量的表示更简化，运算更简捷。对于下图 4.2、图 4.3 和图 4.4，你能用向量 e_1 表示其中的向量 a 吗？

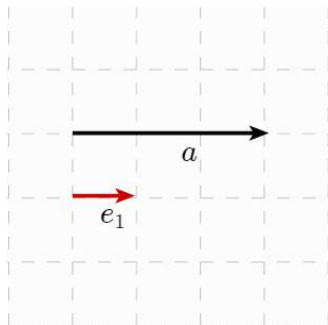


图 4.2

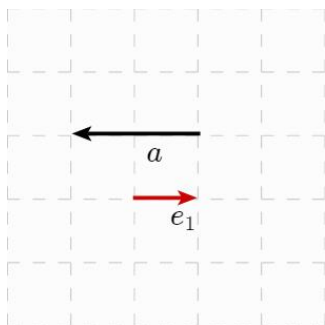


图 4.3

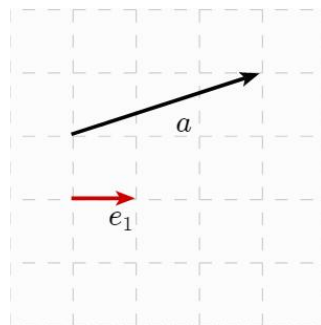


图 4.4

问题 2：平面中还存在着许多像图 4.4 一样与 e_1 不共线的向量，既然只用 e_1 无法表示它们，那么对于 a 至少需要几个向量来唯一表示？如何表示？

设计意图：从学生的“最近发展区”出发，学生借助已有的知识经验，通过向量共线定理，在向量 a 与实数 λ 之间建立对应，成功表示图 4.2 和图 4.3 中的向量。借助图 4.4 引发学生的认知冲突，教师可以利用网络画板演示更多不同方向或大小的向量请同学们表示，创设直观情境，激发学生的思考，辅助学生思维过渡，使学生的思维尽可能活跃，从而进入沉浸式学习状态。

（二）直觉猜测、合情推理

师生活动：学生在已有向量知识的基础上，能够猜想到至少需要两个向量来表示向量 a 。此时教师任意给出一个与 e_1 不共线的向量 e_2 ，如图 4.5，请同学们用 e_1 ， e_2 来表示 a 。

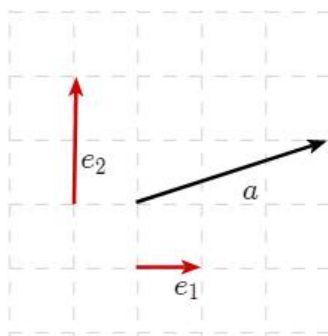


图 4.5

形成猜想：学生联想到物理学中力的合成与分解，通过类比，将向量 a 沿着 e_1 、 e_2 两个方向进行分解，那么对于向量 a ，能够表示成 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式，这里的向量 a 具有任意性。

设计意图：类比向量共线定理概括出结论，并引导学生思考对于平面内任意一个向量是否都能用 e_1 、 e_2 来表示。选择向量 e_1 、 e_2 以及向量 a 具有任意性，学生能够加深对定理的理解，培养抽象概括能力，发展合情推理能力。引导学生运用合情推理发现数学知识之间的生成关系，构建知识的纵向关系。

（三）协作交流、探究验证

问题 3：我们知道在物理中，已知两个力可以求出它们的合力，反过来，一个力可以分解为两个力。如图 4.6 所示，为求放置在斜坡上的木块受到的摩擦力，需要将重力分解。你能将受力分析的结果用向量表示出来吗？你是根据什么法则表示出的呢？

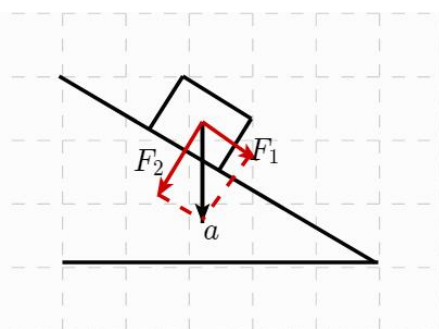


图 4.6

设计意图：学生从熟悉的物理背景出发，利用平行四边形法则，应该可以将向量分解为两个不共线的分向量，从而印证猜想，建立数学与物理学科之间的联系，发展

数学建模的核心素养。通过与物理学科建立联系，进一步了解知识的横向关系，有助于进行知识网状关系建构。

探究一：如图 4.7 和图 4.8， e_1 、 e_2 是同一平面内两个不共线的向量， a 与 e_1 、 e_2 都不共线，你能类比力的分解，将 a 用 e_1 、 e_2 进行代数表示吗？

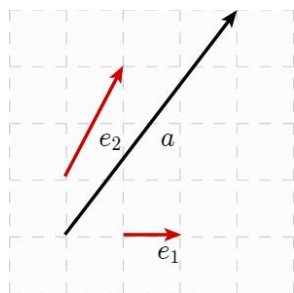


图 4.7

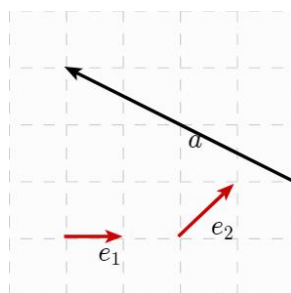


图 4.8

设计意图：通过图 4.1 和图 4.8 具体的练习活动，得出任一向量 a 可以表示成 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式，加深学生对新知识的理解，并且学生发现每个人的表示形式是相同的，即这种表示形式是唯一的。学生能够初步认识平面向量基本定理的图形表示与代数表示，发展数学抽象的核心素养。

探究二：如图 4.9 和图 4.10， e_1 、 e_2 是同一平面内的两个向量， a 是平面内给定的向量，你能类比力的分解，将 a 用 e_1 、 e_2 进行代数表示吗？

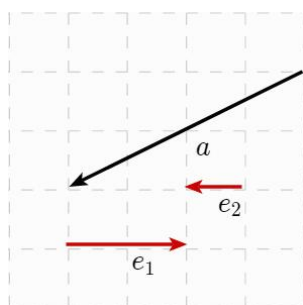


图 4.9

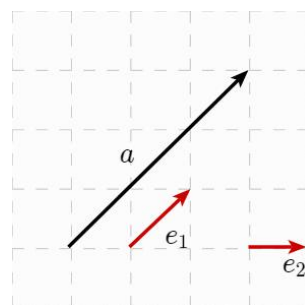


图 4.10

设计意图：通过图 4.9 的探究活动，学生能够更加深入理解 e_1 与 e_2 不共线的作用。通过图 4.10 的探究，学生能够发现当 a 是与 e_1 或 e_2 共线的非零向量时， a 也可以表示成 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式。

问题 4: 若给定两个不共线的向量 e_1 , e_2 , 平面内任意向量 a 是否还能用 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 表示呢?

追问 1: $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 能表示与 e_1 或 e_2 中的某一个向量共线的向量吗? 能表示零向量吗?

探究三: 在学生思考猜想后, 通过网络画板进行动态演示, 改变向量 a 的大小和方向, 总能表示成 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式, 而且这种表示是唯一的。

以下为网络画板演示片段:

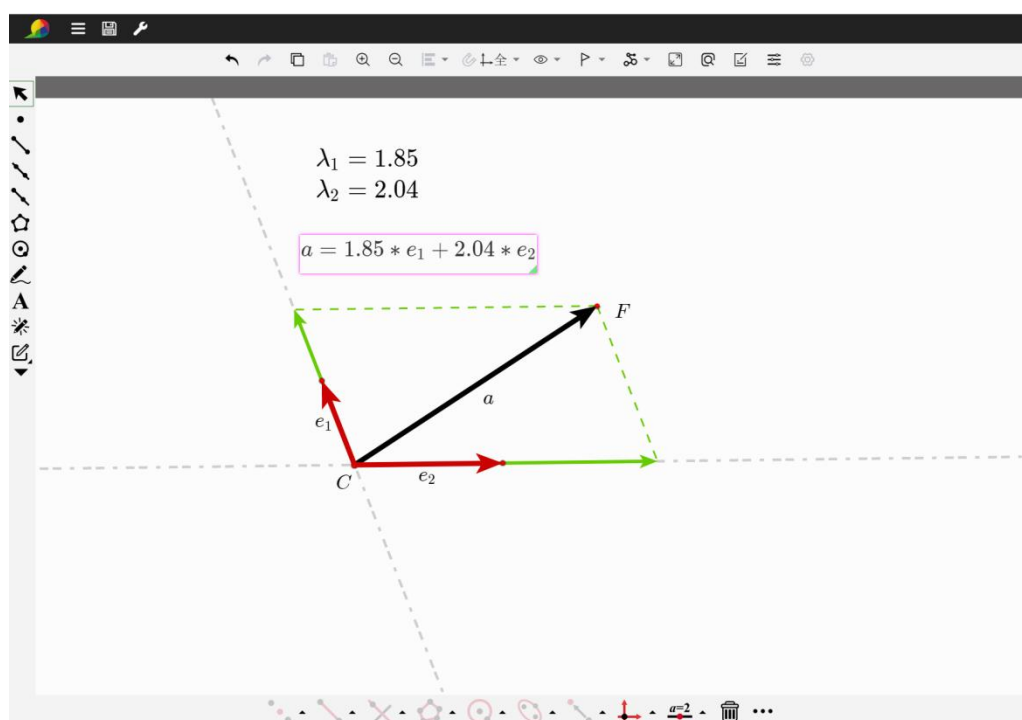


图 4.11

改变向量 a 的大小和方向:

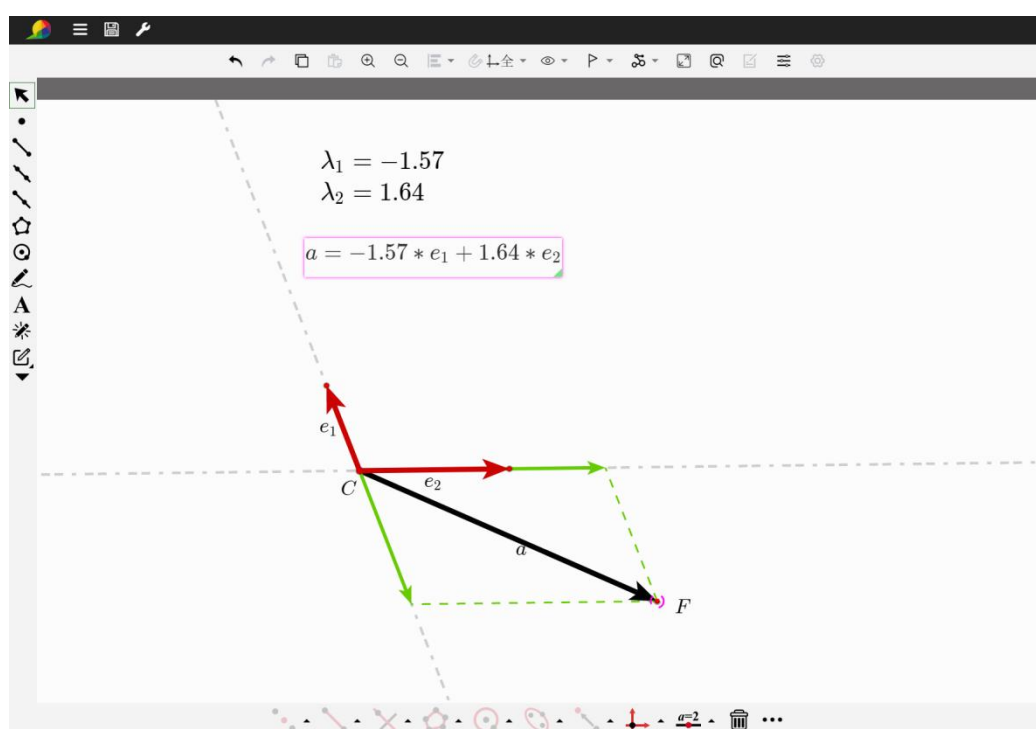


图 4.12

改变基底的大小和方向:

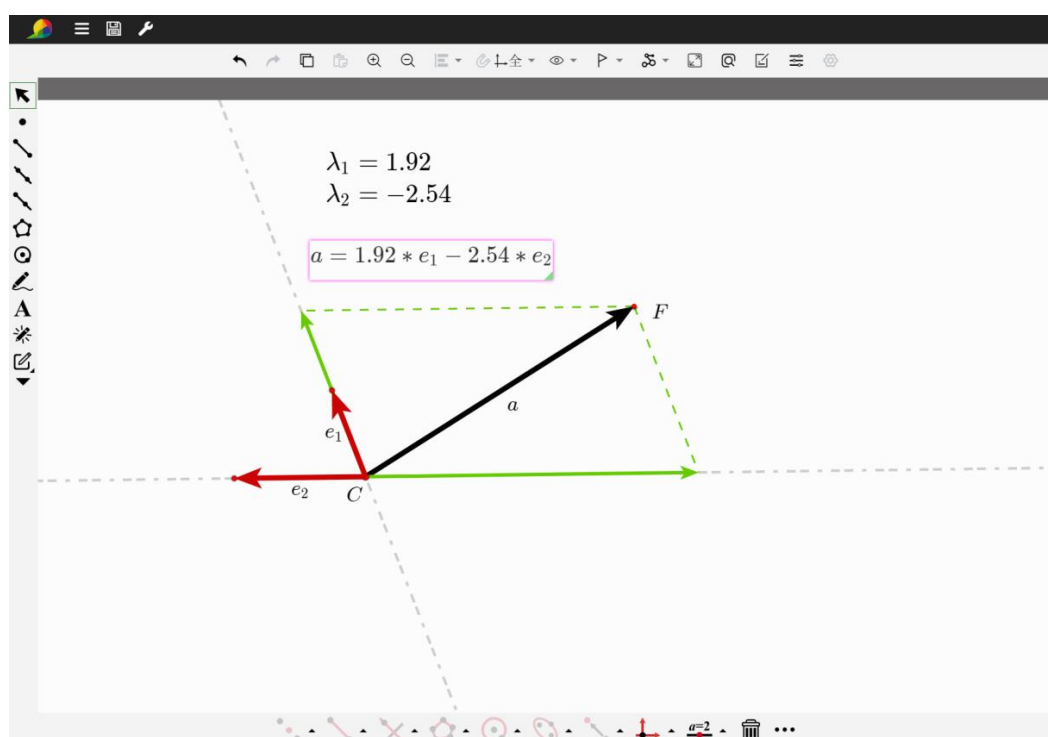


图 4.13

当向量 $\mathbf{a}$ 与基底中的一个向量 $\mathbf{e}_2$ 共线时:

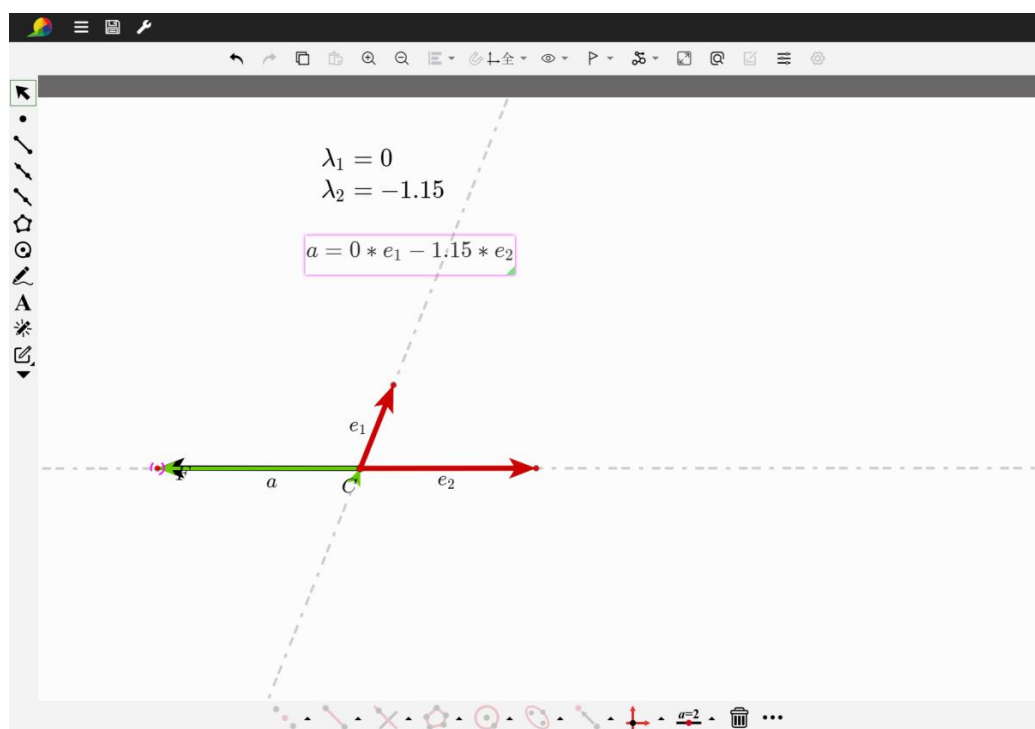


图 4.14

设计意图: 按照从特殊到一般的思路设置问题, 让学生大胆猜想, 利用网络画板的动态表征, 学生通过观察、类比、归纳、思考, 进一步感受平面向量的“任意性”, 使抽象问题形象化, 从图形上突破任意性这个难点, 把握平面向量基本定理的本质, 发展学生直观想象的核心素养。

(四) 归纳证明、拓展迁移

问题 5: 平面内的任一向量 $\mathbf{a}$ 都可以按事先给定的不共线的向量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 分解, 表示成 $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$, 通过网络画板我们能够感知到 λ_1 、 λ_2 的唯一性, 你能进行严格的证明吗?

设计意图: 唯一性的证明有一定的难度, 相对比较抽象, 教师引导学生类比向量共线定理中证明实数 λ 唯一性的反证法进行证明, 学生体会利用旧知解决新问题, 将已有知识迁移到新的情境中, 解决数学问题, 实现知识的迁移应用的过程, 有利于培养思辨能力, 从而达到深度学习的目的。

问题 6: 你能用数学语言概括表达出上述探究结果吗?

师生共同总结, 得到平面向量基本定理。

问题 7: 你对“基底”二字是如何理解的?

设计意图: 学生经历猜想、探究、证明的全过程, 得到平面向量基本定理。对“基底”的深入理解, 能够明晰定理的本质, 实现低阶思维到高阶思维的跨越。阿基米德曾说, 给我一个支点, 我可以撬起整个地球。这里我们可以说, 给我一个基底, 我可以表示出该平面内的任一向量。

(五) 学以致用、深化理解

例 1 如图 4.15, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ ($t \in \mathbb{R}$), 用 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$ 。

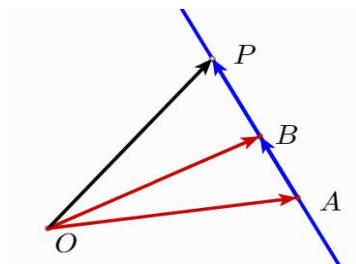


图 4.15

问题 7: 观察 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 前的系数, 你有什么发现?

变式 1 如图 4.16, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ($t \in \mathbb{R}$), 证明 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ 。

师生活动: 学生在教师的引导下, 通过例 1 和变式 1 得出结论。若 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}$ 不共线, 则 A, B, P 三点共线的充要条件是: 存在实数 λ_1, λ_2 , 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB}$ 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 。

设计意图: 通过例题 1, 学生更加深入理解平面向量基本定理, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 是两个不共线的向量, $\overrightarrow{OP}$ 是平面内任一向量, 则可以表示为 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ($t \in \mathbb{R}$)。通过例 1 和变式 1, 学生能够发现用平面向量证明三点共线 (或者点在直线上) 的方法, 拓展知识广度, 增加思维深度。以拓展、迁移的方式, 协助学生解决数学问题, 获得数

学结论，可以夯实基础概念学习，加深对平面向量基本定理的印象，帮助学生形成完整的数学知识网络。

例2 如图4.17， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $CD = \frac{1}{2}AB$ ，用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

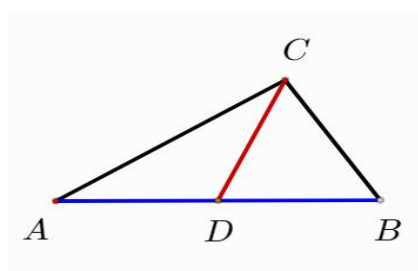


图4.17

问题8：在 $\triangle ABC$ 中，哪个角是直角？如何证明 $CA \perp CB$ ？选择哪两个向量作为基底？

设计意图：通过问题串的形式帮助学生搭建“脚手架”，学生能够选择合适的基底，强化对平面向量基本定理的应用，做到从整体上把握知识，应用知识。此外，引导学生用已有的数学知识解决问题，通过拓展应用，完善数学知识体系，感悟知识的整体性，从而实现理解性深度学习。

（六）回顾反思、完善认知

问题9：平面向量基本定理和共线向量定理有什么联系与区别？

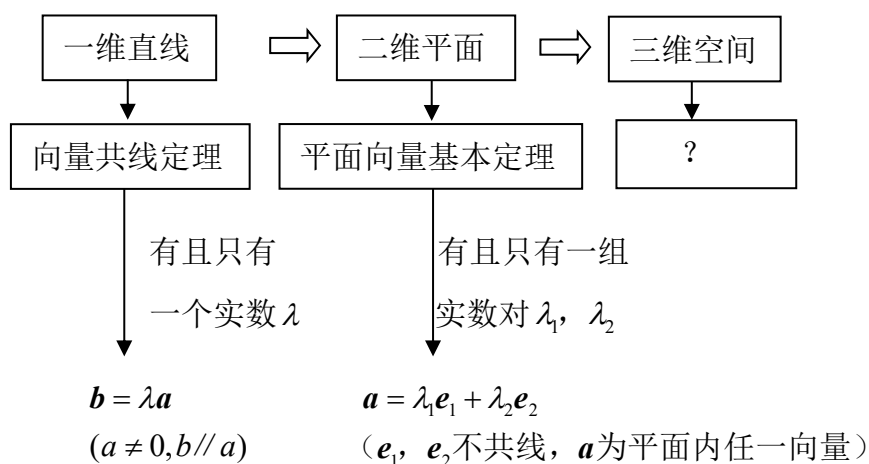


图4.18 平面向量基本定理思维导图

问题 10: 本节课，在猜想、发现、探究、表述、证明平面向量基本定理的过程中，你有哪些收获？掌握了哪些数学思想方法？还有什么困惑？

设计意图: 引导学生从知识内容、思想方法方面进行总结和反思，给学生提供思考空间，进行自主评价，感悟数形结合、转化与化归的思想。用元认知、反思、总结等高阶认知策略建构认知，从机械获取知识表层含义的低阶思维，向深入理解知识的高阶思维发展，发展数学思维素养与数学精神素养，最终进入层进式深度学习状态，实现数学深度学习的目标。

第5章 网络画板助力学生深度学习的教学实验

实验研究是对前期理论研究的检验，为检验网络画板对促进深度学习是否有效，笔者以《平面向量基本定理》进行了相关实验研究，本节主要介绍实验的设计、实验的实施过程以及实验结果收集与分析。

5.1 实验设计与实施

（1）实验目的

本研究已经从理论层面上说明了网络画板助力数学深度学习的教学模式，但是实际应用的效果如何还未可知。本实验的目的就是要根据网络画板助力数学深度学习的教学模式来开展教学实践活动，通过收集到的实验数据进行对比分析，验证该教学设计一般流程的可行性和有效性。

（2）实验对象

为确保实验的有效性，本研究选取了差异不显著的高一（3）班和高一（4）班的同学作为实验对象，这两个班级分班时成绩相近，在全年级属于中等偏上水平，任课老师为同一人。由于两个班除人数外基本情况比较相似，因此随机选定3班为实验班，4班为对照班，其中实验班的人数为42人，对照班的人数为44人。

（3）实验假设

与没有网络画板等信息技术支持的常规化教学相比，基于网络画板的平面向量相关教学更能促进学生对平面向量基本定理的深层理解，提升学习效果。

（4）实验变量

自变量：实验班采用网络画板助力数学深度学习的教学模式，对照班采用传统模式教学。

因变量：在学习完平面向量基本定理之后，两个班级在该部分知识的学习成绩、深度学习的特征表现。

控制变量：实验班和对照班学生的基础无显著差异；同一授课老师的授课态度、授课内容、授课环境；统一的测试卷和评分标准。

（5）实验模式

本实验采取单因素等组的实验模式，实验班采取基于网络画板指向数学深度学习的教学模式，对照班采取传统教学模式，采取统一的评分方式。具体实验模式如表 5.1 所示。

表 5.1 教学实验模式

		前测	处理	后测
实验	实验班	Y_1	网络画板助力深度学习教学	O_1
被试	对照班	Y_2	传统教学	O_2

（6）实验步骤

首先，利用两个班最近一次的考试成绩作为前测数据，以确保两个班级学习无显著差异。其次，由同一名任课教师在实验班采用网络画板助力深度学习的教学模式进行授课，在对照班则采取常规化的方式授课。最后，向实验班和对照班的学生发放测试卷，收集后进行分析评价。

5.2 实验结果与分析

5.2.1 前测数据分析

在实验开始前以两个班最近一次考试成绩作为前测数据，利用 SPSS27.0 对实验班和对照班的成绩进行描述性统计结果分析，具体如表 5.2 所示。

表 5.2 被测样本前测成绩分析

	班级	个案数	平均值	标准差	标准误差平均值
成绩	实验班	42	100.5	16.642	2.6963
	对照班	44	102.82	15.5213	2.5116

由上表可知，两个班级平均值和标准差差异不大。

对前测数据进行了独立样本 T 检验，结果表如 5.3 所示。

表 5.3 前测成绩独立样本 T 检验

	F	显著性	t	自由度	显著性 (双尾)	差值 95%的置信区间 下限 上限
假定等方差	.576	.450	.425	84	.672	-5.3613 8.2737
不假定等方差			.423	80.761	.673	-5.3901 8.3024

由上表可知，实验被测显著性为 $0.450 > 0.05$ ，两组样本的方差无显著性差异，Sig 值分别为 0.672 和 0.673，均大于 0.05，说明两个班级的成绩没有明显的差别，可以进行下一步实验。

5.2.2 后测数据分析

在实际教学之后，针对平面向量基本定理这一章节通过测试卷方式进行了检验。对两个班的成绩进行描述性统计结果分析，具体如表 5.4 所示。

表 5.4 被测样本后测成绩分析

	班级	个案数	平均值	标准差	标准误差平均值
成绩	实验班	42	63.706	17.1016	2.6389
	对照班	44	61.330	14.6458	2.2079

由上表可知，实验班和对照班总体平均值差异并不大，但是实验班后测平均成绩已经超过对照班。

为检验两个班在成绩上是否有显著差异，对后测数据进行了独立样本 T 检验，结果表如 5.5 所示。

表 5.5 后测成绩独立样本 T 检验

	F	显著性	t	自由度	显著性 (双尾)	差值 95%的置信区间 下限 上限
假定等方差	1.576	.258	1.317	87	.041	.8891 10.6212
不假定等方差			1.325	86.817	.040	.9264 10.3043

由上表可知，F 检验结果中的 F 统计量为 1.576，被测显著性 $p=0.258 > 0.05$ ，说明两组样本的方差无显著差异， $\text{Sig}=0.041 < 0.05$ ，说明两个班级后测成绩具有显著性差异，

这表明基于网络画板的平面向量相关教学更能促进学生对平面向量基本定理的深层理解，提升学习效果。

5.2.3 实验结果分析

对学生的测试成绩按题目进行汇总统计，得到如图 5.1 所示的柱状图。从下图中可以看出，实验班学生在第 1 题的得分几乎与对照班的得分相近，略微高于对照班，但是在第 2 题和第 3 题的成绩明显高于对照班，在第三题上差距较大，在第 4 题上两个班级得分差距不大，实验班的成绩略微低于对照班。接下来将对每一道题作答情况进行具体分析。

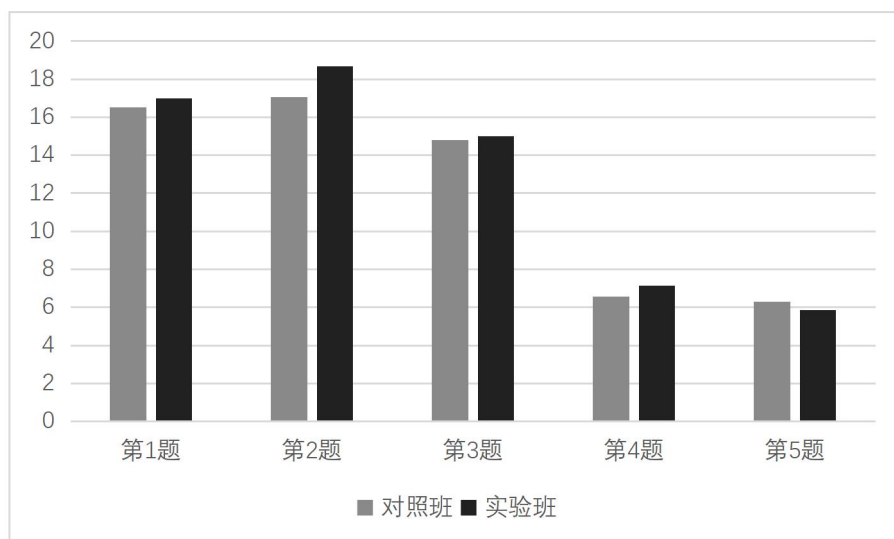


图 5.1 各题分数统计

在平面向量基本定理测试卷中，题目由低到难度逐渐递增，并且可以体现深度学习的几个特征，包括深度学习注重知识的批判理解；深度学习着意过程的联系与建构；深度学习重视学习的迁移应用和问题解决。通过对学生的作答情况进行具体分析，来判断网络画板助力深度学习的教学模式对深度学习特征的促进作用。

第 1 题是关于平面向量基本定理中基底的理解，需要知道何为基底，并能够对基底进行辨析，能够体现“理解”的特征，因此第 1 题只需要理解并能辨析平面向量基本定理中基底的含义即可。从作答情况来看，总共只有 26.5% 的同学选择正确拿到满分，其中实验班满分同学占比略高，有 15.7% 的同学因选错而不得分，其中实验班同

学占比仍然比对照班高,大部分同学只选择了部分选项,其中G选项和H选项漏选较多。说明许多同学对基底的概念还停留在记忆水平,对基底的深入辨析还有些模糊,处于不确定状态。也有同学漏选B选项,通过与个别同学进行交流,发现其对“平面内存在着一对不共线向量可以作为该平面内所有向量的基底”的理解存在偏差,误认为选项的意思是只有一对不同线向量可以作为基底。通过对测试卷进行分析,也看出实验班学生水平差距较大,而对照班的学生反而基础比较平均,成绩相对集中,但是总体来说,实验班对平面向量基底的理解更胜一筹。

第2题涉及的知识点有向量的三角形法则以及利用向量的数量积判断直线的关系。第(1)小问是简单的用基底表示向量,实际上属于“记忆”层次的浅层学习水平,其中向量 $\overrightarrow{EF}$ 的表示,有的学生直接用三角形的中位线定理,得出 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$,有的同学是用向量 $\overrightarrow{EC}$ 、 $\overrightarrow{CF}$,通过三角形法则得出 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$,两种方法都是正确的,实际上第二种做法就是用向量方法证明了三角形中位线定理成立。学生在该问题中能够批判性的选择证明的方法,其中实验班学生直接利用中位线定理来证明的居多,也体现了其在批判性理解方面较好。第(2)小问主要考察向量的数量积为零是判断两条直线垂直的重要方法,有了第(1)问的过渡,难度不算大,该题体现了深度学习中“批判与理解”的特征。从作答情况来看,学生在该题的表现最好,第(1)问两个班级正确率都较高,第(2)问部分同学因为数量积计算错误或者不能根据向量数量积为零来判断出直线的关系,其中实验班得分率明显高于对照班,说明实验班学生对于知识的“批判与理解”更深入。

第3题主要考察平面内三点共线的条件,涉及平面向量的运算,需要理解平面向量基本定理等知识点。其中(1)至(4)小问主要是用基底表示向量,通过第(1)问至第(4)问,我们能够发现第(5)小问这样一个结论,这体现了从特殊到一般的数学思想。该题目前(4)小问比较具体,只要能够作出图象,根据图象将向量用基底表示即可。第(5)小问需要学生能够知道“ P, A, B 三点共线”这个条件实际上等价于 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BA}$,无论 λ, μ 怎么变化,只要满足 $\lambda + \mu = 1$,就有 $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$,体现了变

中有不变，最后通过运算来证明充分性和必要性都成立，这体现了深度学习中“联系与建构”的特征。从作答情况来看，大部分学生都能够答对前4小问，正确率约为78%，而第（5）小问抽象性比较强，部分学生能够通过作图辅助证明结论，其中实验班同学证明的正确率要高于对照班，可以看出实验班同学在深度学习特征当中的“联系与建构”方面表现较好。

第4题的两问分别求比值和最值，涉及利用平面向量基本定理求参数和基本不等式“1”的妙用等知识点。第（1）问需要首先设未知数，利用平面向量共线定理的推理求解，有一定难度；第（2）问抽象性、综合性更强，仍然用到平面向量共线定理的推论，通过 E 、 O 、 F 三点共线得到 $2\lambda + \mu = 3$ ，然后需要结合基本不等式求得最值，需要学生能够有机整合知识，联系与建构知识，系统运用知识，主要考察学生的“问题解决能力”。从作答情况来看，该题整体得分偏低，第（1）问两个班约有13.3%的学生得分，实验班和对照班差别不大，第（2）问有学生能够利用共线定理的推理，但是没能得到正确的结果，再者很难与很久之前的知识点基本不等式建立联系，但实验班得分率略高于对照班，也从一定程度上说明了实验班学生在深度学习特征中的“问题解决”方面相对较好。

第5题属于新定义题型，涉及函数的概念、相等向量等知识点。该问题有三个小问，并且表述方式涉及“特征值”等词语对学生来说比较陌生，有相当一部分同学理解起来会有困难。解决该问题的关键是把问题转化成为两个向量相等，那么这两个向量的横坐标、纵坐标分别相等。该题目难度较大，需要学生能够在新情境中利用已有的知识经验解决问题，涉及深度学习“迁移应用”的特征。从作答情况来看，该题目整体得分较低，第（1）问很少有学生能够将 $|\vec{y}|$ 与 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 建立联系，第（2）问作答情况高于第（1）问，部分学生可以抓住解决问题的关键，而第（3）问估计学生有畏难心理，作答情况不容乐观。整体上看实验班学生得分率略低于对照班，但整体差别不大，说明无论是实验班还是对照班，在深度学习特征中的“迁移应用”方面还是比较难达到。

5.3 实验结论

探究平面向量教学实验研究成果，得到如下结论：

1、网络画板环境下促进深度学习的平面向量基本定理的教学，有利于激发学生的学习兴趣，强化内在学习动机。利用网络画板创设特定的学习情境，以直观形式丰富学生的认知途径，引发学生的求知欲，从而进入沉浸式思考。从实际的课堂表现来看，实验班的学生在网络画板操作环境下，课堂氛围更加活跃，回答问题更加积极，注意力也更加集中。

2、网络画板环境下促进深度学习的平面向量基本定理的教学，有利于促进学生对定理的批判理解。利用网络画板的动态表征，在演示平面向量基本定理的过程中，学生通过观察、类比、归纳、思考，进一步感受平面向量的“任意性”和“唯一性”，使抽象问题形象化，突破难点，把握重点。从答题过程来看，实验班学生在第2题和第3题的作答过程相比对照班来说更完整、书写也更加规范，说明实验班的学生对定理的认识更到位。

3、网络画板环境下促进深度学习的平面向量基本定理的教学，有利于促进学生的知识关系建构。通过类比向量共线定理，与前面的章节建立联系，建立从一维（直线）到二维（平面），甚至三维（空间）的过渡，引导学生运用合情推理发现数学知识之间的生成关系，构建知识的纵向关系，通过与物理学科建立联系，进一步了解知识的横向关系，有助于进行知识网状关系建构。

4、网络画板环境下促进深度学习的平面向量基本定理的教学，有利于提高学生解决问题的能力。在网络画板创设的环境下，学生亲历平面向量基本定理的生成过程，将知识整体地建构起一个有机体系，所获得的知识能够轻而易举地迁移应用和解决问题。实验结果表明实验班学生的成绩高于对照班，说明实验班学生能够将已有知识迁移到新的数学情境中去，学生的分析问题、解决问题的能力也更强。

第6章 总结与思考

6.1 研究结论

在人工智能时代，深度学习尤为重要，如何利用智能化动态操作环境促进深度学习就成为教育者关心的话题。本研究从理论和实践的角度对这一问题进行了尝试，所得成果如下：

在理论方面，通过文献分析梳理了网络画板辅助数学教学的应用价值、深度学习的内涵特征，提出网络画板是促进深度学习的有效手段，并从元认知理论、多元表征理论和情境认知理论的视角分析了网络画板助力深度学习的理论基础；其次，构建了网络画板助力深度学习的教学原则和一般教学模式，并据此设计教学案例。

在实践方面，围绕研究问题一“当前高中生数学深度学习的现状如何？”，通过调查问卷，从认知、人际、内省领域分析了当前高中生的深度学习的现状，发现存在的问题如下：（1）数学学习动机不足；（2）知识建构能力有限；（3）问题解决能力较差；（4）缺乏批判性思维，但学生的沟通交流、协作能力和反思能力普遍表现较好。

围绕研究问题二“网络画板助力深度学习的效果如何？”，通过教学实验证实了网络画板能够促进数学深度学习，也证明了网络画板助力深度学习的教学模式具有可行性。探究教学研究成果，网络画板助力深度学习的结论如下：

1、从发生机制来看，网络画板让学习可见。深度学习需要学习者全身心积极参与，而网络画板集动画、声音、色彩、图象于一体，融诗意性、趣味性、数学美于一身，借助网络画板创设直观化、形象化、具体化的教学情境，极大的激发了学生学习的兴趣和求知欲，强化学生的内在学习动机，学生能够进入专心致志的沉浸式学习状态，为数学深度学习的发生奠定了基础。

2、从行为进程来看，网络画板让思维发生。深度学习需要对知识进行理解与建构，而利用网络画板可以开展实验探究活动，为学生提供了观察、实验、猜想、归纳、推理和验证的途径。学生切实参与其中，通过“做数学”，直接参与知识的建构过程，既

符合建构主义教学理论，又能深化对知识的理解，提高解决问题的能力，学生能够顺利进入融会贯通的理解性学习状态。

3、从目标旨向来看，网络画板让思想渗透。深度学习需要在数学思维、数学思想、数学精神方面有一定的提升，从根本上讲，在使用网络画板制作课件或辅助教学的过程中，也蕴含了一定的数学思想方法，渗透了数学美育，辅助学生从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡，也在潜移默化之中发展了积极的数学情感，学生在质疑、理解、批判中提高迁移应用能力，最终学生能够进入不断进阶的深度学习状态。

6.2 研究局限与展望

6.2.1 研究局限

虽然本研究在网络画板助力数学深度学习的教学方面有了一定的进展，但是由于个人能力、时间有限，加上客观条件的限制，所以仍然存在一些不足之处。

1、本研究在进行实验教学时，只在两个班级中进行，由于样本数量有限，所获得的结论对水平不同的班级或学校参考价值也有限。

2、在进行实验测试时，通过平面向量基本定理测试卷能够分析出学生在认知领域的深度学习水平，但是对于人际领域和内省领域的深度学习水平，还待进一步研究。

3、本研究在进行问卷调查、测试卷调查时，对学生的评价更多是采用总结性评价，其中课堂实施中的过程性评价还待完善。

6.2.2 研究展望

教育研究是一项持续不断的事业，本研究是对“网络画板等智能化动态操作软件助力数学深度学习”这一课题的起步，而非终结。为了将该项研究做得更好，后续还可以在不同层次的班级或学校开展研究。此外，对数学深度学习在非认知因素方面的测评也应该进一步完善。相信未来会有更“智能”的方式促进学生深度学习。

参考文献

- [1] 习近平.高举中国特色社会主义伟大旗帜为全面建设社会主义现代化国家而团结奋斗——在中国共产党第二十次全国代表大会上的报告[N].人民日报,2022-10-26(01).
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] 涂荣豹. 数学教学设计原理的构建: 教学生学会思考[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [4] 曾文婕. 深度学习究竟是什么——来自历史、共时和未来维度的探问[J]. 教育研究, 2023,44(03):52-62.
- [5] 尹洁, 侯小华. 网络画板在高中函数教学中的应用[J]. 中国教育技术装备, 2020(13):36-37.
- [6] 刁露. 浅谈网络画板在小、中、高三阶段数学教学中的应用[J]. 数学学习与研究, 2021(19):64-65.
- [7] 赵小利. 用网络画板开展数学实验,助力小学数学教与学——以六年级教材“圆”为例[J]. 数学学习与研究, 2019(22):102.
- [8] 李赵容. 基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究——以“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象”教学为例[D]. 贵州师范大学学科教学(数学), 2021.
- [9] 杜佳佳, 古丽娜·玉素甫. 网络画板教学应用研究工作现状和趋势分析[J]. 信息与电脑, 2021,33(17):246-250.
- [10] 弗赖登塔耳. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平, 唐瑞芬, 译. 上海: 上海教育出版社, 1995:2-3.
- [11] 胡晋宾. 谈怎样用《几何画板》渗透数学思想方法教学[J]. 数学通报, 2003(01):16-18.
- [12] Marton F, Säljö R. On Qualitative Differences in Learning—I Outcome and Process[J]. British Journal of Educational Psychology, 1976,46(1):4-11.
- [13] Biggs J, Moore P. The Process of Learning[M]. Sydney: Prentice Hall, 1993.
- [14] Jensen Eric, LeAnn Nickelsen. 深度学习的7种有力策略[M]. 温暖, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2010.
- [15] National Research Council Panel. Education for Life and Work:Developing Transferable Knowledge and Skills in the 21st Century[M]. Washington: DC:National Academy Press, 2012.

- [16] William and Flora Hewlett Foundation. Deeper learning competencies[EB/OL]. (2016-04-15)http://www.hewlett.org/uploads/documents/Deeper_Learning_Defined_April_2013.pdf.
- [17] Bransford J, Brown A, Cocking R. How people learn:Brain,mind,experience and school[M]. Washington: DC:National Academey Press, 2000.
- [18] Alliance for Excellent Education. A time for deeper learning:Preparing students for a changing world[R]. Washington: Alliance for Excellent Education, 2011.
- [19] 何玲, 黎加厚. 促进学生深度学习[J]. 现代教学, 2005(05):29-30.
- [20] 安富海. 促进深度学习的课堂教学策略研究[J]. 课程.教材.教法, 2014,34(11):57-62.
- [21] 张浩, 吴秀娟. 深度学习的内涵及认知理论基础探析[J]. 中国电化教育, 2012(10):7-11, 21.
- [22] 杜娟, 李兆君, 郭丽文. 促进深度学习的信息化教学设计的策略研究[J]. 电化教育研究, 2013,34(10):14-20.
- [23] 郭华. 深度学习及其意义[J]. 课程.教材.教法, 2016,36(11):25-32.
- [24] 何克抗. 深度学习:网络时代学习方式的变革[J]. 教育研究, 2018,39(05):111-115.
- [25] Biggs J B. Individual and Group Difference in Study Processes[J]. British Journal of Educational Psychology, 1978,48:266-279.
- [26] 吴秀娟. 深度学习的内涵、特征与过程模型[J]. 今日教育, 2017(06):10-13.
- [27] 张立国, 谢佳睿, 王国华. 基于问题解决的深度学习模型[J]. 中国远程教育, 2017(08):27-33.
- [28] 余明芳. 为促进数学深度学习而教:理念形塑、模式证析与实践示例[J]. 课程.教材.教法, 2023, 43(10):90-96.
- [29] 安德森. 布鲁姆教育目标分类学(修订版)[M]. 北京: 外语教学与研究出版社, 2009.
- [30] J B, D K, Y L D. The revised two-factor Study Process Questionnaire: R-SPQ-2F.[J]. The British journal of educational psychology, 2001,71(Pt 1).
- [31] 张浩, 吴秀娟, 王静. 深度学习的目标与评价体系构建[J]. 中国电化教育, 2014(07):51-55.
- [32] 高东辉, 于洪波. 美国“深度学习”研究40年:回顾与镜鉴[J]. 外国教育研究, 2019,46(01):14-26.
- [33] 胡晋宾. 基于《几何画板》的计算机辅助数学教学[D]. 南京师范大学, 2002.
- [34] 贲爱玲. 元认知理论指导下的反思型教师教育[D]. 南京师范大学, 2004.
- [35] Diénès Z P. An Example of the Passage from the Concrete to the Manipulation of Formal Systems[J].

- Educational Studies in Mathematics, 1971,3.
- [36] 唐剑岚. 数学多元表征学习的认知模型及教学研究[D]. 南京师范大学课程与教学论(数学), 2008.
- [37] 姚梅林. 从认知到情境:学习范式的变革[J]. 教育研究, 2003(02):60-64.
- [38] 高文. 情境学习与情境认知[J]. 教育发展研究, 2001,21(8):30-35.
- [39] 廉串德, 梁栩凌. 心理测量实践教程[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2011.
- [40] 涂荣豹, 喻平. 建构主义观下的数学教学论[J]. 南京师大学报(社会科学版), 2001(2):77-82.
- [41] 乔伊斯, 韦尔. 教学模式[M]. 兰英, 译. 北京: 中国人民大学出版社, 2014.
- [42] 李方. 课程与教学基本理论[M]. 广州: 广东高等教育出版社, 2002.
- [43] R·基思·索耶. 剑桥学习科学手册[M]. 北京: 教育科学出版社, 2010.
- [44] 郭戈. 关于兴趣教学原则的若干思考[J]. 教育研究, 2012,33(03):119-124.
- [45] 王钦敏, 余明芳. 数学深度学习中的知识关系建构问题论析[J]. 课程.教材.教法, 2022,42(7):118-124.
- [46] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 1999.

附录 1 高中数学深度学习能力调查问卷

亲爱的同学：

感谢你参加本次问卷调研！这不是一个考试，只是一份问卷，主要了解大家的深度学习现状。问卷采取匿名方式，绝对保密，答案没有对错之分，请同学们仔细阅读题目，根据自己的实际情况认真作答，感谢同学们的配合！

一、基本信息：请在□中打勾

1、性别：□男 □女

2、年级：□高一 □高二

二、请在右边对应的数字上打勾，每题只选择一个答案，请不要多选或漏选。

认知领域

		完 全 不 符 合	不 太 符 合	不 确 定	比 较 符 合	完 全 符 合
知 识 建 构	1、我对数学概念（例如对数函数的性质）是理解性记忆的，知道其来龙去脉。如果忘记具体内容，可以自己推导出来。	1	2	3	4	5
	2、我会利用概念图或思维导图来整理归纳学过的数学知识。	1	2	3	4	5
	3、在学习新知识时，我能很快地联想到以前学过的内容，并在此基础上学习新知识。	1	2	3	4	5
问 题 解 决	4、我在面对问题时，会尝试利用多种方法求解，并且能够在比较之后，选择出一种最优解。	1	2	3	4	5
	5、在学习和生活中，我能够从数学的角度发现问题，产生怀疑并且提出问题。	1	2	3	4	5
	6、我能区分数学题目中的有效条件和干扰信息。	1	2	3	4	5

	7、我在学习数学知识时，常常会思考这些知识能够解决生活当中的哪些问题。	1	2	3	4	5
批判性思维	8、当我的观点和老师的观点不一致时，我一般会坚持自己的观点。	1	2	3	4	5
	9、我有主动地对已有的信息和观点进行批判性思考的意识，会质疑并认为自己提出的问题有价值。	1	2	3	4	5
信息技术使用	10、老师在数学课堂上，会利用网络画板、交互白板等多媒体信息技术。	1	2	3	4	5
	11、在课堂中运用多媒体信息技术能够提高我对学习数学的兴趣。	1	2	3	4	5
	12、我认为多媒体信息技术的使用有助于我对数学知识的理解。	1	2	3	4	5
	13、我具备一定的信息技术使用能力，在做数学作业时，我会借助信息技术完成老师布置的任务。	1	2	3	4	5
迁移应用	14、当生活中出现与数学相关的问题时，我会想到用自己学习到的数学知识进行探究解决。	1	2	3	4	5
	15、在遇到数学问题时，我能够了解这道数学题目的考察点，并且联系所学知识。	1	2	3	4	5
	16、在数学学习过程中，我能够将所学习的思想方法加以总结形成自己的认知结构。	1	2	3	4	5
	17、在学习新知识时，我能将书本知识与实际生活经历加以联系。	1	2	3	4	5

人际领域

		完全不符	不太符合	不确定	比较符合	完全符合
--	--	------	------	-----	------	------

		合		定		
有效沟通交流	18、在课堂小组讨论中，我能够清楚地表达自己的思考过程和结果。	1	2	3	4	5
	19、我善于倾听别的同学的想法并且尊重他们的观点。	1	2	3	4	5
	20、在学习的过程中，我会在遇到困难时主动请教老师或者同学。	1	2	3	4	5
协作能力	21、我能够主动利用学习资源，与他人形成学习小组并共同确立目标。	1	2	3	4	5
	22、在与他人协作完成任务的过程中，我会考虑去接纳其他成员的观点。	1	2	3	4	5
	23、在团队学习中，我愿意承担责任、重视与尊重每一位团队成员。	1	2	3	4	5

内省领域

		完全不符合	不太符合	不确定	比较符合	完全符合
反思能力	24、在遇到新的数学问题时，我会反思总结这类题型的学习方式。	1	2	3	4	5
	25、在学习数学的过程中，我会反思自己的不足与他人的长处，学习他人的优点，改进自己。	1	2	3	4	5
	26、我能够正视自身存在的不足之处，反思并加以改变。	1	2	3	4	5
自我	27、我能够依据自己设定的学习目标，根据自己	1	2	3	4	5

主 学 习	的学习情况，做出合理的评价。					
	28、我能够合理设置目标并安排时间以完成老师的任务。	1	2	3	4	5
	29、我为自己设定了长远的目标并制定计划表，以此来帮助自己按时完成任务。	1	2	3	4	5
	30、我为了实现目标会寻求各方面的帮助。	1	2	3	4	5
	31、对于复杂概念的学习和较难问题的解决，我会受到挑战，但我相信，我能完成这个挑战。	1	2	3	4	5
学 习 动 机	32、我是因为对数学知识感兴趣而进行学习的。	1	2	3	4	5
	33、我对数学知识和数学学习抱有强烈的好奇心、求知欲和探究欲。	1	2	3	4	5

附录 2 平面向量基本定理测试卷

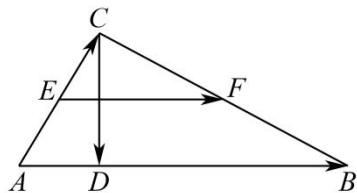
亲爱的同学：

你好！本测试卷是为了探究数学教学的相关问题，共 5 题，每题各 20 分，第 1 题选对部分得 10 分，选错不得分。总共大约需要 60 分钟完成，请大家认真思考作答，力争发挥出最佳水平。

1、下列说法正确的有（ ）

- A. 平面内存在着一对共线向量可以作为该平面内所有向量的基底；
- B. 平面内存在着一对不共线向量可以作为该平面内所有向量的基底；
- C. 平面内只有一对不共线的向量可以作为表示该平面所有向量的基底；
- D. 平面内有无数多对不共线向量可以作为表示该平面所有向量的基底；
- E. 只要是平面内的一对不共线向量，就可以成为该平面内所有向量的基底；
- F. 零向量不可作为平面向量基底中的向量；
- G. 平面向量的任何一组基底都是一对不共线的向量.
- H. 若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是一组基底，且 $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ ，则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD = \frac{1}{4}AB$ ，点 E, F 分别是 AC, BC 的中点. 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.



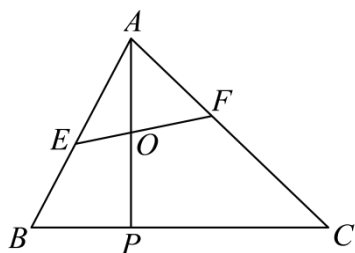
(1) 用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表 $\overrightarrow{CD}$ ， $\overrightarrow{EF}$.

(2) 如果 $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 2AC$ ， CD ， EF 有什么关系？用向量方法证明你的结论.

3、在 $\triangle OAB$ 中，P 为平面内任意一点，

- (1) 若 P 是 AB 的中点，用向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ ；
- (2) 若 P 是 AB 的三等分点，即 $AP:AB = \frac{1}{3}$ ，用向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ ；
- (3) 若 P 是 AB 的外分点，且 $AP:AB = 3$ ，用向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ ；
- (4) 若 P 是 AB 的分点，且 $AP:AB = t$ ，用向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ ；
- (5) 证明：P, A, B 三点共线的充要条件是存在实数 λ, μ 且 $\lambda + \mu = 1$ ，使得
$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}.$$

4、如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{BP}$ ，O 是线段 AP 的中点，过点 O 的直线与边 AB，AC 分别交于点 E, F.



- (1) 若 $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ，求 $\frac{AE}{EB}$ 的值；
- (2) 若 $\overrightarrow{EB} = \lambda \overrightarrow{AE} (\lambda > 0)$ ， $\overrightarrow{FC} = \mu \overrightarrow{AF} (\mu > 0)$ ，求 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu+1}$ 的最小值.

5、将所有平面向量组成的集合记作 R^2 , f 是从 R^2 到 R^2 的映射, 记作 $\vec{y} = f(\vec{x})$ 或 $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$, 其中 $\vec{y} = (y_1, y_2)$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$, x_1, x_2, y_1, y_2 都是实数. 定义映射 f 的模为: 在 $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ 的条件下 $|\vec{y}|$ 的最大值, 记作 $\|f\|$. 若存在非零向量 $\vec{x} \in R^2$, 及实数 λ 使得 $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, 则称 λ 为 f 的一个特征值.

(1) 若 $f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1, x_2\right)$, 求 $\|f\|$;

(2) 若 $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2)$, 计算 f 的特征值并求出相应的 $\vec{x}$; (若符合条件的向量 $\vec{x}$ 有多个, 写出其中一个即可)

(3) 若 $f(x_1, x_2) = (a_1x_1 + a_2x_2, b_1x_1 + b_2x_2)$, 要使 f 有唯一的特征值, 实数 a_1, a_2, b_1, b_2 应满足什么条件? 试找出一个映射 f , 满足以下两个条件:

①有唯一的特征值 λ ; ② $\|f\| = |\lambda|$, 并验证 f 满足这两个条件.