

# 结构化视角下高中数学单元教学设计实践探究

## ——以“基本不等式”的教学为例

东莞市万江中学 王晓聪 523000

**【摘要】** 在近年来的新高考、新教材、新课程的“三新”背景下，课堂教学也必须要契合教育改革的思想。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中强调数学的整体观，凝练学科核心素养，要求“进一步精选学科内容，重视以大概念为核心，使课程内容结构化，以主题为引领，使课程内容情境化，促进学科核心素养的落实”<sup>[1]</sup>。《义务教育数学课程标准(2022 年版)》中强调应设计体现结构化特征的课程内容，强调对内容进行结构化整合，探索发展学生核心素养的路径<sup>[2]</sup>。通过单元教学设计整合课程内容，既实现从点到面的归纳，又达到由面到点的升华，再设计有效的教学评价目标，形成单元与评价相辅相成的前期整合与后测考核体系，从而更好的为实现教学目标做好铺垫。

**【关键词】** 单元教学设计；结构化教学；教学评价；数学核心素养

## 1 引言

2017 年的《普通高中数学课程标准》明确了数学核心素养，并以此为理论依据细化了课程学习目标与能力要求，强调了教学评价与设计的重要性。新课标标准中指出：要在数学教学中融入信息技术，比如利用几何画板、网络画板、希沃系统、excel 制表等辅助教学过程，更形象生动的展示建模的形成。同时也指出了为实现核心素养的教学目标，不仅要整体把握教学内容之间的关联，还要把握教学内容主线与相应核心素养发展之间的关联，通过整体的“大观”进一步深化学习通过结构化视角下的单元设计，有效梳理和整合了学习内容，进一步提升了学生的数学核心素养，培养了学生适应新高考、新教材、新课程的能力。

## 2 概念界定

### 2.1 结构化教学和单元教学设计

结构化教学指教师将某一章节、某个知识模块或某种题型等当作一个整体进行处理，联系学生所学知识，帮助学生建立知识结构，在教学中形成完整的知识框架与整体。数学结构化教学就是从数学知识结构和学生的数学认知结构出发设计和组织教学，以完善和发展学生原有数学认知结构的过程。单元教学设计是根据学生的认知规律，在某一单元（章、模块）学习中，将整体的知识、技能、数学思想方法进行整合渗透，以帮助学生提高运用所学知识解决各类问题的能力，形成优良的知识结构，促进知识系统化，完善自我学习能力，综合提升学科素养的一种课型。

### 2.2 单元教学设计的特点

结构化教学视角下高中数学单元教学设计在我校数学课堂上得到了广泛应用。

在单元教学设计的理念下，能够从整体上把握教学内容的结构化。通过结构化教学视角下高中数学单元教学，以单元思维导图为抓手，以教学评价为后测，使学生形成结构化的学科知识，通过教学结构化设计，逐渐形成核心能力结构化，最终贯彻落实学科核心素养。因此，教师要规划好单元学习目标，整合生成任务主体，根据学生的实际情况制定具体的评价体系与标准，再以此为基础细化设计课堂教学，从而为教学目标的达成提供最直接、最关键的保障。

### 3 单元教学设计案例展示：基本不等式

#### 3.1 案例分析（单元设计）

单元主题		
不等式的性质	基本不等式	几何与代数
在不等式性质的研究中，类比了等式研究的内容和方法，关键是不等式性质的探究过程。通过等式性质证明中的思路与方法，然后通过类比，猜想并证明了不等式的性质。	研究了特殊的不等式——基本不等式，它可以利用不等式性质或者分析法进行证明，同时它又为一些最值问题的求解提供了有效的工具与方法。本单元是通过研究不等式的基本性质及其应用，让学生感受到类比学习的思想方法，也了解如何从生活中的模型抽象出数学公式与方法。	本单元属于几何与代数主题，该主题在高中选择性必修阶段共有 44 课时，本单元占 4 课时。  通过本单元的学习，学生体会了类比学习的数学思想方法，感受到等式与不等式的“同”与“不同”。通过赵爽弦图的生活模型，理解基本不等式，进而使用基本不等式解决数学问题。
单元教学内容		
<p>本单元内容包括：</p> <p>一、等式性质与不等式性质</p> <p>二、基本不等式</p> <p>本单元通过回顾、梳理等式的性质，提炼其中的思想方法和研究路径，类比研究不等式的相关内容，提升学生对数学思想方法的认知，如：类比思想、数形结合、由特殊到一般、分析法等，为高中的数学学习形成内在的思想方法，为后续的数学学习做好铺垫。</p>		
单元教学目标		
一、会从生活模型中的不等关系中抽象出不等式，能运用这个基本事实比较两个代数式的大小，提升学生的数学抽象和数学运算素养。		

<p>二、在梳理等式的基本性质及其本质属性的基础上，在探索不等式的性质时通过类比的思想方法从等式性质中找到共性。从代数的角度感受等式与不等式的关系，通过类比学习感受不等式性质的生成，提高学生对模型的理解转换以及实际问题求解的能力，提升学生逻辑推理素养。</p> <p>三、理解基本不等式 <math>\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}</math> (<math>a &gt; 0, b &gt; 0</math>)，了解基本不等式的几何意义，结合具体实例，能用基本不等式解决两类简单的最值问题，并会将某些生活中的最值问题转化为能用基本不等式解决的两类最值问题，提升数学建模素养。</p>			
单元教学方法		单元学法指导	
采用类比归纳和数形结合的思想，引导学生观察——探究——讨论——抽象——归纳；以学生为主体，以基本不等式为主线，从实际问题出发，让学生探究思索。以现代信息技术多媒体课件、几何画板以及希沃授课助手作为教学辅助手段，加深学生对基本不等式的理解。		在教学过程中，以学生为主体，教师为主导，让学生有自主探究学习的思维升华；再从实际生活出发，通过问题情境创设，让学生经历由实际问题出发，探究基本不等式。使学生能从代数证明和几何证明两方面理解基本不等式。	
单元整体设计			
在本单元中，研究了等式的性质，并且依据两个实数大小关系的基本事实比较两个代数式的大小。再从赵爽弦图这个实际问题所蕴含的不等关系中抽象出不等式，提升学生数学抽象的素养，以及利用不等式的性质或基本不等式证明简单的命题，提升学生的逻辑推理和数学运算素养；用基本不等式解决最值问题的内容，先是给出由基本不等式中的两类基本不等式模型，再在解决实际问题时，引导学生分析简化问题情境，提高了学生的数学核心素养。			
单元课时安排			
第 1 课时 等式性质与不等式性质 (一)	第 2 课时 等式性质与不等式性质 (二)	第 3 课时 基本不等式(一)	第 4 课时 基本不等式 (二)

### 3.2 教学评价（单元评价）

评价目标	评价内容	评价任务	评价方法	目标达成依据
知识目标	理解不等式的性质，理解类比思想方法	操作性任务	课堂提问 小组汇报	1、小组形成案例分析与报告 2、学生的自我评价与反馈表
	理解算数平均数与几何平均数的概念			
	理解掌握基本不等式的推导证明以及分析法	表达性任务	课堂提问	
能力目标	基本不等式的变式题型与应用	表达性任务	课堂实例进行分析	1、小测验、作业情况 2、技能测试：能清晰表达、能运用所学程序性知识解决新问题
	掌握基本不等式求解最值的题型与方法	操作性任务	课堂测试	
	培养学生的数学思维以及动手能力	表达性任务	小组讨论	
素养目标	构建生成数学模型，解决实际问题	操作性任务	课堂练习 小组汇报	1、课堂表现评价表 2、课后拓广探索问题：称量黄金问题和修建休闲场所问题
	理解深化类比推理、数形结合的思想	表达性任务	小组汇报	
情感目标	学习本节课后的收货或学习感悟，单元知识归纳与总结	综合性任务	课后总结	数学笔记

### 3.3 情境引入

下图是在北京召开的第24届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，由此引出问题：

**问题：**设AF长为 $a$ ，BF长为 $b$

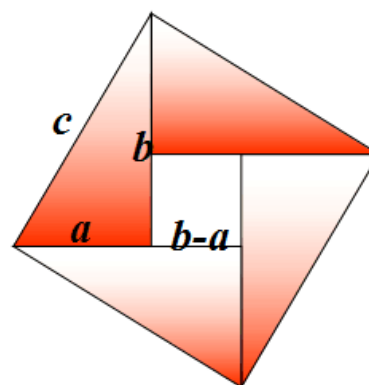
(1)如何能用 $a, b$ 表示大正方形ABCD

的边长和面积 $s$ ?

(2)四个直角三角形的面积之和 $S'$ 是?

(3)大正方形的面积 $S$ 与 $S'$ 的大小关系是?

(4)它们有相等的情况吗?



**【设计意图】** 数学教学往往来源于生活中的“数学现实”，现实情境问题是数学教学的平台，数学教师的任务之一就是帮助学生构造数学模型，并在此基础上发展他们的数学现实. 通过图形抽象出重要不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，在此基础上，引导学生认识基本不等式，也深化了数形结合的思想方法。

### 3.4 抽象归纳

一般地，对于任意实数  $a, b$ ，有  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，当且仅当  $a = b$  时，等号成立。

**问题 1:** 应该如何证明上述不等式成立?(复习回忆作差法)

答:  $\because a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$  所以  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

当且仅当  $a = b$  时，等号成立

**问题 2:** 如果  $a > 0, b > 0$  我们用  $\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{b}$  分别代替不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  中的  $a, b$  会有什么结论?

答: 如果  $a, b$  都是正数，那么  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ，当且仅当  $a = b$  时，等号成立。

我们称此不等式为基本不等式。其中  $\frac{a+b}{2}$  称为  $a, b$  的算术平均数， $\sqrt{ab}$  称为  $a, b$  的

几何平均数。

**【设计意图】** 单元设计中强调了知识的整体性，通过前面所掌握的不等式的基本性质、作差法以及重要不等式，让学生感受到知识的连续性，通过学生自主推导，巩固所学知识，并且对基本不等式的生成有了直观的感受与认识。

### 3.5 探索证明

**问题:** 如何证明基本不等式? (学生尝试独立完成、小组讨论)

方法一: 作差比较

方法二: 由  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$  展开证明。

方法三: 分析法

①作差法: 
$$\because \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$
$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当  $a = b$  时，等号成立;

②综合法: 
$$\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$
$$\therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

当且仅当  $a = b$  时，等号成立;

③分析法（学生上台板书）：

要证  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  ①

只要证  $a+b \geq$  \_\_\_\_\_ ②

要证②, 只要证  $a+b -$  \_\_\_\_\_  $\geq 0$  ③

要证③, 只要证  $(\text{---} - \text{---})^2 \geq 0$  ④

显然, ④是成立的。当且仅当  $a=b$  时, ④中的等号成立。

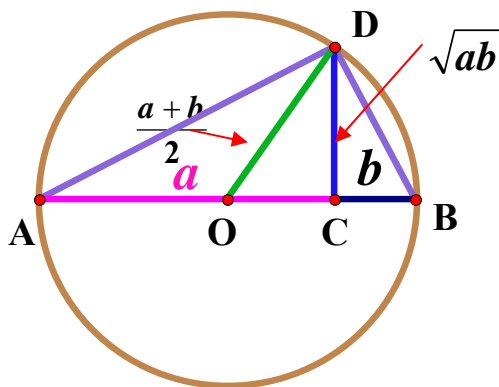
**【设计意图】**通过单元设计内容, 沿用了前面不等式性质中的作差比较大小的方法以及重要不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 让学生类比重要不等式的证明过程自行尝试证明。同时也介绍了数学证明中的一种证明方法: 分析法, 让学生感受到执果索因的思想, 也就是寻找结论的充分条件, 进而把证明的问题进行简化, 通过引导让学生自主完善证明线索。此处的证明由学生独立完成, 相互交流, 并展示不同的证明方法, 这样既能使教师发现学生在学习中遇到的知识层面困难并加以解决, 又能教会学生欣赏同伴身上的闪光点, 发扬合作精神。

### 3.6 探究基本不等式的几何意义

在数学中, 我们称  $\frac{a+b}{2}$  为  $a, b$  的算术平均数, 称  $\sqrt{ab}$  为  $a, b$  的几何平均数. 基本不等式可

叙述为: 两个非负数的算术平均数不小于它们的几何平均数. 刚才从代数角度证明了基本不等式的成立, 从几何图形上能否证明它成立呢? (借助几何画板动态演示)

如图:  $AB$  是圆的直径, 点  $C$  是  $AB$  上一点,  $CD \perp AB$ ,  $AC = a, CB = b$ ,  $CD = \sqrt{ab}$



问题:

- (1) 如何用  $a, b$  表示  $OD, CD$ ?
- (2) 你能从图形中得出  $OD$  和  $CD$  的大小关系吗?
- (3) 你能给出基本不等式的几何解释吗?

几何解释实质可认为是：在同一半圆中，半径不小于半弦（直径是最长的弦）；或者认为是，直角三角形斜边的一半不小于斜边上的高。

**【设计意图】**通过使用单元设计中不等式的性质与分析推导方法。通过探索与思考，提出问题——思考问题——解决问题——改进方法，让学生的数学思维升华。利用网络画板或者几何画板的动态过程帮助学生抽象生成数学内容。一方面，帮助学生建立数形结合的基本思想；另一方面，培养学生从动态变化的角度思考问题、解决问题的能力。

### 3.7 探索归纳

**问题：**下列命题中正确的是

①  $x \in \mathbf{R}, y = x + \frac{1}{x}, \therefore x + \frac{1}{x} \geq 2, \therefore y_{\min} = 2;$

② 当  $x \geq 0$  时，由于  $1 + x^2 \geq 2x$ ，当且仅当  $1 = x^2$  时，即  $x = 1$  时，等号成立。所以函数  $y = 1 + x^2 (x \geq 0)$  的最小值为 2；

③，有  $\sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \geq 2$ ；所以函数  $y = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$  最小值为 2。

以上命题根据基本不等式的使用条件中的难点和关键点设置的，目的是利用学生原有的平面几何知识，进一步领悟到不等式  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  成立的条件  $a > 0, b > 0$ ，以及当且仅当  $a = b$  时，等号成立。

**结论：**

若两正数的乘积为定值，则当且仅当两数相等时，它们的和有最小值；

若两正数的和为定值，则当且仅当两数相等时，它们的乘积有最大值。

简记为：“一正、二定、三相等”。

**【设计意图】**通过三个基础问题，让学生独立思考并感受基本不等式的使用条件，师生归纳总结。通过最后的探究，激发学生更深层次的思考，深化本节课的内容，理解和掌握基本不等式的使用条件，也能通过思考检验学生对数学思想方法的掌握程度，以分析评价学生本节课的学习情况。

### 3.8 实际应用

**例 1、**用篱笆围一个面积为 100 平方米的矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，所用篱笆最短？最短篱笆的长度是多少？

**例 2、**用一段长为 36 米的篱笆围成一个矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，菜园的面积最大？最大面积是多少？

（学生思考分析，列出关系式，展示答题过程。教师板书并强调能取得最小值的原因及等号成立的条件。教师归纳并得到以下两点结论，进一步强调了基本不等式的使用条件以及使用类型）

①基本不等式两种常用形式:

$$(1).a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(2).ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

②基本不等式在函数最值中的应用:

对于  $x > 0, y > 0$ ,

(1)若  $xy = p$  (定值), 则当且仅当  $a = b$  时,  $x+y$  有最小值  $2\sqrt{p}$

(2)若  $x+y = s$  (定值), 则当且仅当  $a = b$  时,  $xy$  有最大值  $\frac{s^2}{4}$

**【设计意图】**通过生活模型对基本不等式的使用有了进一步的认识,一方面,让学生知道可以利用基本不等式求解最值的问题;另一方面,强化学生对基本不等式的理解,特别是等号成立的条件与不同问题下的使用类型。通过学生自主审题、分析问题、列出关系式、形成解答过程、总结归纳,充分发挥学生的主观能动性,让学生对不等式的性质与基本不等式的使用有了更深的认识。

### 3.9 归纳小结

让学生自主归纳基本不等式的推导过程、几何意义、使用条件以及求解最值的类型等,引导学生联系前面所学的不等式与等式的性质的相关内容,通过单元整体的角度进一步深化本节课的学习内容以及数学思想方法。教师按照单元教学评价的设计对学生的不等式单元学习进行后测评价任务布置,根据评价中出现的问题及时查漏补缺,同时也对学生的单元学习情况有比较清晰的了解。

**【设计意图】**由学生总结本节课所研究的问题,在学生自主探究中,生成本节课的知识点,结合不等式的单元整体内容,有承前启后的作用。通过单元教学评价,让教学效果有真实可靠的内容可以参考,进一步提高了教学的成果转化率。实现单元整合学习与单元教学评价双管齐下的共同促进教学质量的效果。

## 4 教学反思

### 4.1 梳理框架,强化整体

单元教学强调的是整体思想,对课堂内容的准备不能只局限于某个课时,要在整理所学内容的同时对单元的知识结构进行理解,在新旧知识之间建立起桥梁,让学生在整体的视域下进行学习。通过对知识框架的分析整理,可以整体把握章节学习的重难点,在课时学习中做到承前启后,增强整体的思想意识。

### 4.2 明确方法,注重评价

单元整体学习不仅是教学中要注意把握的思路,也是学生学习的一种重要方法。在知识的学习中,要有从“宏观”到“微观”的大局观,也要有从“点”到“面”的关联与反思。比如在本节基本不等式的学习中,要联系到前面的不等式的关系,类比函数的研究和学习方法。而教师通过单元整体架构下预设了教学目标与评价体

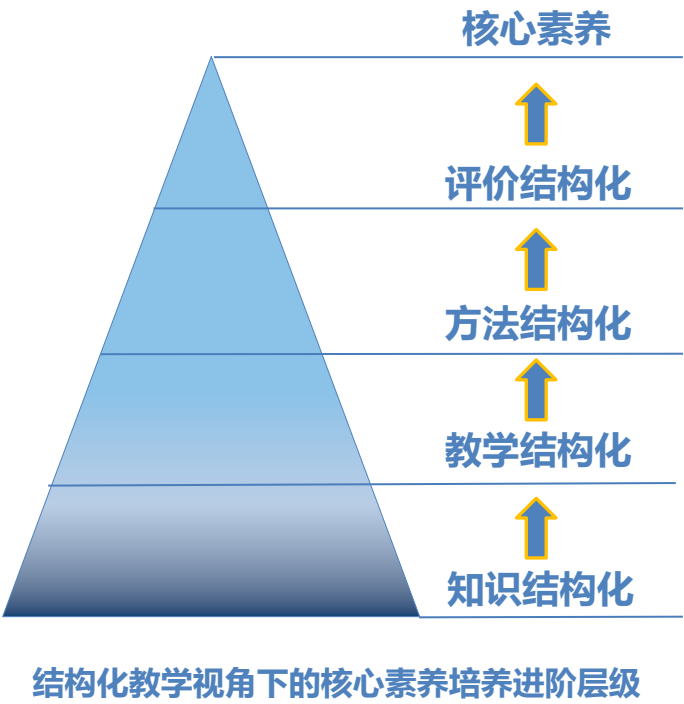


系，能做到后测了解学生的单元整体学习情况，根据学生的学习情况进行测评与查漏补缺。

### 4.3 单元设计，结构教学

从结构化视角开展单元教学，一方面可以有效达成教学目标，另一方面也有助于学生学科素养和数学思维品质的提升。单元结构教学转变侧重碎片化知识和便于记忆的文字符号的教学模式，着重依据学科知识内部结构的特点，从学生认知结构出发，强调学生对知识的系统性掌握，最后回归到完善学生认知结构中。<sup>[3]</sup>同时，通过设计单元教学评价，让学生可以按照单元任务对单元的内容学习有了全方位的回顾与总结，也让教师有了极具参考意义的后测数据，能以此及时调整教学模式或内容，也为后续定向跟踪学生的学习情况提供了依据。

由此生成了如下的结构化进阶层级结构：



#### 【参考文献】

- [1]中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022 年版）[S]. 北京：北京师范大学出版社，2022.
- [2]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京：人民教育出版社，2020.
- [3]郑蕾聪. 初中数学单元结构教学研究[D]. 淮北师范大学 2020.