

## 素养导向 自主建构 技术赋能

### ——利用网络画板的反演变换功能辅助命制试题<sup>\*</sup>

冯伟 (江苏省苏州市景范中学校 江苏省冯伟网络名师工作室 215003)

丁银杰 (江苏省苏州市草桥中学校 江苏省丁银杰网络名师工作室 215031)

**摘要** 反演变换功能是网络画板软件特有的功能,笔者利用这项功能在某次市级期末联考中命制了一道立意深远、影响较大且具有较高区分度的新定义综合题。本文介绍了该题的命制过程。

**关键词** 网络画板软件;反演变换;新定义;命制试题

**文章编号** 1004-1176(2024)06-0062-02

《义务教育数学课程标准(2022年版)》指出,应合理利用现代信息技术,提供丰富的学习资源,设计生动的教学活动。网络画板软件是基于动态几何技术、智能推理技术、符号运算和网络交互技术开发的国内第一款互联网环境下的专业理科教学工具,正日益受到中小学数学教师的青睐,使用越来越广泛。去年期末,笔者有机会为某一设区市级市九年级学生期末测试命制试题,在倒数第二题的命制中,充分利用网络画板软件的反演变化功能,命制了一道立意深远、影响较大且具有较高区分度的新定义综合题。现结合命制过程,求教于同行专家。

#### 1 反演概念及网络画板软件反演变换功能

平面上的反演变换,即给定一个以  $O$  为圆心、 $r$  为半径的定圆,设  $P$  为不同于  $O$  的一点,则  $P$  的反演点定义为射线  $OP$  上的一点  $P'$  且  $OP \cdot OP' = r^2$ 。圆心  $O$  称为反演中心,  $r$  称为反演半径,圆  $O$  称为反演圆(图 1)<sup>[1]</sup>。

网络画板软件作为一款新型动态图形软件,和老牌图形软件几何画板相比,具有更强的功能和更人性化的操作。特别是在几何变换功能中,除了常见的轴对称变换、平移变换和旋转变换外,网络画板还增添了反演变换功能。在点击反演菜单后,再点击点  $P$  和  $\odot O$ ,点  $P$  的反演点  $P'$  就会自动产生,拖动点  $P$ ,点  $P'$  也会随之移动,并且时刻

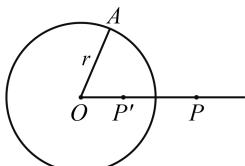


图 1

满足等式  $OP \cdot OP' = r^2$ 。

#### 2 命题准备

##### 2.1 命题方向

根据命题双向细目表,本张试卷一共需要命制 28 道题,其中第 27 题(倒数第二题)计划命制一道将圆与相似或三角函数应用结合的综合题。经过命题组内讨论,有别于前几年的传统命题方式,决定将新定义问题作为载体来考查学生对圆及相似或三角函数应用相关的知识的掌握程度。

##### 2.2 新定义试题概念的界定

经过查阅相关资料,命题组成员讨论后对于新定义试题概念的界定取得了一致:新定义试题按照其定义,就是指遵循一定的数学规则,在试题中展示学生以往学习过程中没有见过的新运算、新符号、新图形、新变换、新函数或新方法等内容,要求学生通过阅读命题者所提供的材料将上述新知和以往所学的知识进行联系建构,并在新的定义或规则下解决相关问题。新定义试题一般分为两个部分:第一部分展示新的定义,第二部分呈现相关问题要求学生解决。

##### 2.3 确定命题内容

本题考查的内容是圆的相关知识。命题组经讨论决定引入反演变换的相关概念作为试题新定义的主要载体。定义如下:

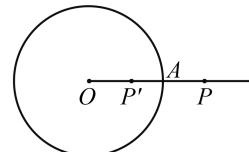


图 2

**定义** 如图 2,  $\odot O$  的半径为  $r$ ,若点  $P'$  在射线  $OP$  上,且  $OP \cdot OP' = r^2$ ,则称点  $P'$  是点  $P$  关于  $\odot O$  的“反演点”。

<sup>\*</sup> 本文系江苏省教育科学“十三五”规划 2020 年度重点资助课题“条理与想象:‘几何画板’提升数学思维能力的实践研究”(B-a/2020/02/38)、江苏省中小学教学研究第十四期课题“基于信息技术的初中数学图形图像类试题编制研究”(2021JY14-L48)以及江苏省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题“初中数学实验教学的校本资源开发与实践研究”(D-a/2021/02/764)的阶段性研究成果。

### 3 命题过程

#### 3.1 新定义框架下的探索

命题组确定了新定义框架后,笔者使用网络画板软件绘制了如图1所示图形,而后使用软件拖动点P进行了一系列的探索.从定义上看,满足反演变换的三条线段的长度在代数形式上是一组等积式,圆的半径r是其比例中项.根据其代数形式,命题组马上联想到的主要是相似,特别是黄金分割、相似三角形对应边成比例的呈现形式和这个等积式是一致的.

#### 3.2 黄金分割——熟悉的陌生人

根据课程标准,对于黄金分割相关概念的要求在了解层级.部分教师在教授这个概念的时候并不重视,对于其内在的数形结构没有进行更深入的揭示和强化,这也导致了黄金分割的相关概念对于学生来讲一直是“熟悉的陌生人”.课余笔者曾经询问过一定数量的学生什么是黄金分割,许多学生脱口而出是0.618,还有学生讲到了黄金三角形和黄金矩形,但很少有学生能清楚地复述出黄金分割的正确定义.命题组认为很有必要把对这个概念的考查在题目中体现出来.因此,题目的第一小题命制如下:

如图2,设射线OP与 $\odot O$ 交于点A,若点 $P'$ 是点P关于 $\odot O$ 的“反演点”,且 $OP' = PA$ ,求证:点 $P'$ 为线段OP的一个黄金分割点.

#### 3.3 由作图探索确定第二小题

笔者在利用网络画板软件进行作图探索时发现,因为点P和点 $P'$ 是关于 $\odot O$ 的反演点,所以线段OP和线段 $OP'$ 的乘积为定值且等于圆半径r的平方,过点 $P'$ 作线段OP的垂线交 $\odot O$ 于点B,作出半径OB,则有一个等式 $OB^2 = OP \cdot OP'$ 恒成立,进而可以通过证明三角形相似得到PB垂直OB于点B,即PB是 $\odot O$ 的切线(图3).据此第二小题命制如下:

如图3,若点 $P'$ 是点P关于 $\odot O$ 的“反演点”,过点 $P'$ 作 $P'B$ 垂直OP于点 $P'$ ,交 $\odot O$ 于点B,连接PB,求证:PB为 $\odot O$ 的切线.

#### 3.4 第三小题的艰难取舍

在确定前面两个小题后,命题组讨论计划在第三小题中引入坐标和函数,将整个图形放在平面直角坐标系内进行观察,通过将点P固定在某一函数图象上移动来观察其反演点 $P'$ 的运动规律.

笔者利用网络画板软件在平面直角坐标系中

绘制两条直角边分别为6和8的直角三角形CDE,作以CE为直径的 $\odot O$ ,在斜边DC上取点P,连接OP,利用网络画板软件的反演变换功能,作出点P关于 $\odot O$ 的反演点 $P'$ .

当笔者用鼠标在线段DC上拖动点P,利用软件追踪点 $P'$ 时,

命题组发现点 $P'$ 的轨迹是一段圆弧(图4),而有关圆弧与解析几何结合的内容不是初中学段所要掌握的,因此必须要对图4所涉及的内容进行取舍.

笔者继续利用网络画板软件拖动点P在平面内任意移动时发现,其反演点 $P'$ 也随之移动,线段 $OP'$ 的长度由线段OP唯一确定( $\odot O$ 半径r长度不变),而OP的长度因为点P在线段CD上的限制有最大值和最小值,其中最大值在点P运动到点D处时取得,最小值在点P运动到OP和CD垂直时的垂足处时取得.由此可以推导出线段 $OP'$ 的长度也有最大和最小值,而求相关最值和平面直角坐标系中的计算相关性不大.因此,经过讨论命题组最终决定把整个图形的背景从坐标系内“取出”,并且为了减少考生的书写量,第三小题用填空题的形式呈现.第三小题最终命制如下:

如图5,在 $Rt\triangle CDE$ 中, $\angle E = 90^\circ$ , $CE = 6$ , $DE = 8$ ,以CE为直径作 $\odot O$ ,若点P为CD边上一动点,点 $P'$ 是点P关于 $\odot O$ 的“反演点”,则在点P移动的过程中,线段 $OP'$ 长度的取值范围是\_\_\_\_\_.

#### 4 考试结果分析和评价

本题是本地区最近几年期末考试中很少见的“图形新定义”型试题.按照“情景能力立意,核心素养导向”的命题原则,要求考生按照“学习新定义,探索新问题,利用新性质解决新问题”的步骤即时学习、当场解题,充分要求考生在深刻理解新定义的基础上,结合黄金分割、相似三角形的相关性质等知识储备,形成新的能力,解决新的问题.

本题实际测试难度为0.32,作为一道压轴题,起到了很好的评价诊断的效果.在考试后很多教师评价认为本题起点低、入口宽,立意深远,区分明显,充分考查到了学生即时学习和当场利用新知识的能力,是一道不可多得的新颖试题.

(下转第65页)

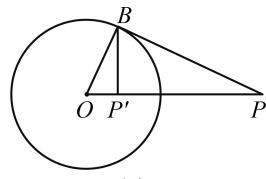


图3

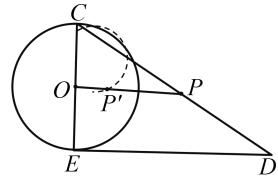


图4

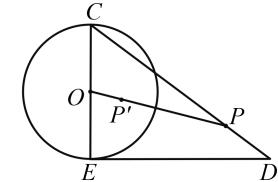


图5

性,犯了循环论证的错误.

**证法1**  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2$ , 则  
 $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$ . 又  
 $x_1 < x_2, \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$ , 所以  $f(x_1) < f(x_2)$ ,  
故  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

**剖析** 证法1通过分子有理化,在判别  $f(x_1)$  与  $f(x_2)$  差的正负性的过程中,只利用了  $x_1 < x_2$  的初始条件和正数的算术平方根为正的基本事实,故没有犯循环论证的错误.

**证法2**  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2$ , 则  
 $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ . 假设  $f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \geq 0$ , 则  $\sqrt{x_1} \geq \sqrt{x_2}$ , 从而  
 $x_1 = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_1} \geq \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_2} = x_2$ , 与已知矛盾,故  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

**剖析** 证法2运用反证法,结合教材中不等式的基本性质6(若  $a > b > 0, c > d > 0$ , 则  $ac > bd$ ),与已知条件产生矛盾,从而间接证明了  $f(x) = \sqrt{x}$  的单调性,这是符合教材知识链的,故没有犯循环论证的错误.

**错证2**  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2$ , 则  
 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ . 又  $x_1 < x_2$ , 则有  $\frac{x_1}{x_2} < 1$ ,

(上接第63页)

## 5 三点思考

### 5.1 新定义问题对于维护考试公平优势明显

新定义问题一般都是原创为主,原创试题可以有效防止学生通过机械训练、疯狂刷题和教师猜题押题等教学投机行为给评价带来的负面影响,让全体考生站在同一条起跑线上,从而保证考试的公平性、严谨性和有效性,有助于选拔出真正有能力的学生.

### 5.2 命题要重视考试的诊断作用

和中考、高考等纯粹的评价性考试不同,对于期中、期末这一类过程性评价测试,命题者在命题中更要重视所命制题目的诊断作用.以本题第一小题为例,命题者在命制过程中注意到了黄金分割这一教师教学上的“盲点”,将这个概念和新定义情景巧妙结合,通过考试“倒逼”教师和学生重视此类相关概念,促使学生去真正理解,有效防止在今后的教学和学习中出现教而不会、学而不懂的“滑过”现象.

于是  $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 故  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

**剖析** 错证2运用作商法来证明单调性,在通过  $\frac{x_1}{x_2} < 1$  得到  $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} < 1$  的过程中,同样用到了  $f(x) = \sqrt{x}$  的单调性,犯了循环论证的谬误.可类比证法1或证法2进行修正,不再赘述.

数学知识、问题的发现与论证教学是培养学生求理意识与能力的重要契机.教师在探究示范教学时,一方面要重视教学内容的节序与法理,引导学生细致审查推理过程的模糊与可疑环节,努力克服轻慢与疏忽等心理弱点,做到周密有序、步步有据;另一方面也要认识到教学内容的阶段性、未竟性,了解学生成久的学习轨迹,做到线索清晰、情理兼具,在已有知识无法对新结论进行论证时,应如教材运用GeoGebra等信息技术,以直观方式进行演示说明、辅助论证.

## 参考文献

- [1] 张网军,苗长青.两个“尴尬”的证明引发的思考[J].中学数学月刊,2023(1):63.
- [2] 华东师范大学数学系.数学分析(上册)[M].4版.北京:高等教育出版社,2010:18.

### 5.3 网络画板软件是提升命题质量的重要保障

网络画板软件作为命题辅助工具,其作用不仅局限于验证命题的真伪和绘制精准的图形.笔者在平时的命题实践中发现:相比网络画板软件,几何画板更适合于绘图制卷;而网络画板软件的作用更多体现在外显命题者的数学思维,在动态探究中,能够帮助命题者更好地把握数与形的内在联系,从而命制出高质量的试题.回顾本题的命制过程,因为题目要用到反演变换,而反演变换功能正好是网络画板软件特有的功能,利用该软件先后选中定圆和主动点  $P$ ,则和点  $P$  关于这个定圆成反演关系的点  $P'$  就直接绘制出来了,拖动点  $P$ ,点  $P'$  也遵循相应关系运动,这就帮助命题者抓住运动中的不变量及相等或不等关系,为命制高质量试题提供了重要的支撑.

## 参考文献

- [1] 耿少峰.反演变换视角下的阿波罗尼斯圆[J].中学数学杂志,2019(11):21-24.