数学学科核心素养导向下的教育数学实证研究

谭 琳[1, 2]，张永胜[3]，陈如仙[1]，徐章韬[4]，饶永生[1]

（1．广州大学 计算科技研究院，广东 广州 510006；2．广州城市职业学院 信息工程学院，广东 广州 510405；
3．邛崃市教研培训中心，四川 成都 611530；4．华中师范大学 数学与统计学学院，湖北 武汉 430070）

摘要：教育数学实验是中国教育改革的重要组成部分，学生的数学学科核心素养发展状况是其改革实验效果的重要衡量指标之一．研究选取初中数学核心素养评价框架，对邛崃市教育数学实验进行评价研究，分析该实验对学生数学核心素养发展的影响．基于所选框架对该市 2017 级初三第二次诊断试卷考查的数学核心素养进行分类．根据学生核心素养的得分，对比分析该市 3 672 名初三学生与 93 名教育数学实验班学生数学核心素养的发展状况．研究发现：该市初三学生的整体数学核心素养发展不平衡，特别是在数学建模、逻辑推理素养上不合格比例较高；教育数学体系下的实验组核心素养发展情况普遍优于该市整体水平，且其发展更为均衡．结论说明教育数学可促进学生数学核心素养的普遍均衡发展，实验风险可控，适合大规模普及．

关键词：数学学科核心素养；教育数学；教学改革；评价研究

中图分类号：G623.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1004–9894（2024）01–0021–07

引用格式：谭琳，张永胜，陈如仙，等．数学学科核心素养导向下的教育数学实证研究[J]．数学教育学报，2024，33（1）：21–27.

1 问题提出

1989 年，张景中正式提出教育数学，旨在把数学本身变得更容易，改造数学使之更适合教育[1]．张奠宙指出，教育数学是数学的教育形态[2]．“重建三角”新体系[3–5]是教育数学的主要成果之一，该体系下放三角，重构了初高中阶段的知识点，一线串通几何、三角与代数[6]．新体系首先在广东省广州市海珠区实验中学为期 3 年的规模实验中取得了令人瞩目的成绩[7–8]．研究显示，学生认为新体系的知识点简单且易于理解，77%的学生喜欢学习新体系的知识，教师和大部分学生对初等数学新体系的整合教学给予肯定[8]．教育数学的理念是在吃透了数学的精神本质，又经过实践检验之后产生的，其“自下而上，由点到面，规模实践，行动反思”的教学改革技术路线具有较强的可操作性[9]，为国家课程改革提供了一个新方法和新思路[10]．

教育数学的成果走进课堂，推动了数学教育的发展．此后，全国各地多所中学相继开展了教育数学实践．四川省邛崃市宝林中学在对新体系中相关内容进行多次试点实验后，发现新方法受到师生普遍欢迎．随后，宝林中学启动了为期 3 年（2017 年 9 月—2020 年 6 月）的教育数学规模实验．

目前，数学教育改革的重点是学科核心素养的落实[11]，教育数学实验作为中国教育改革的重要组成部分，学生的数学学科核心素养发展状况是其改革实验效果的重要衡量指标之一．因此，研究选取初中数学核心素养评价框架，对邛崃市教育数学实验进行评价研究．主要研究以下两个问题：邛崃市学生数学核心素养发展情况如何？教育数学实验对学生核心素养发展产生了什么样的影响？

2 相关研究

2.1 数学学科核心素养

教育部于 2018 年 1 月发文[12]，凝练并提出高中数学学科的 6 大核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析．2020 年 6 月，教育部发布《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》[11]，将落实数学学科核心素养作为修订部分的重中之重，还围绕核心素养的落实开展一系列活动，如精选并重组课程内容、明确内容要求指导教学设计、提出考试评价与教材编写建议等．

可以看出，学科核心素养的提出不仅是对课程方案和课程标准的修订，也是中国全面深化教育改革的顶层设计．无论是从中国的教育方针还是国际教育改革的趋势来看，培养学生的学科核心素养已经成为教育改革的新指向[13]．基于此，数学学科核心素养的应用不应仅在高中阶段，而应切实渗透到义务教育的各个阶段中去．

2.2 初中数学核心素养评价

初中阶段是人的认知迅速发展的阶段．在有关初中数学核心素养的研究中，对试卷题目的定性分析较多，且以中考试题的测评为主[14–19]．定量分析模型认可度较高的是董林伟与喻平构建的初中数学核心素养评价指标体系[20]，该体系将《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中的初中数学“10 个核心概念”[21]与高中数学学科 6 大核心素养的概念与内涵作对比分析，形成初中数学核心概念与高中数学核心素养的对应关系．殷容仪[22]、周雪兵[23]、李贺[24]、徐德同[25]、杭毅[26]、张爱平[27]等人在此评价指标体系指导下，对江苏省初中学生的数学核心素养展开了质量检测．质检结果表

收稿日期：2023–09–04

基金项目：中国高等教育学会“2022 年度高等教育科学研究规划课题”——教育数学教学评价研究与实践（22SX0301）；教育部人文社科规划项目——“双减”政策落地的教师教学知识研究（22YJA880068）；2020 年度广州大学全日制研究生“基础创新”项目（2020GDJC-M26）；四川省教育信息技术研究“十三五”规划 2020 年度课题——区域推广网络画板提升教师信息技术能力实践研究（川教馆[2020]60031）

作者简介：谭琳（1997—），女，湖南衡阳人，硕士生，主要从事教育数学、教育技术研究．饶永生为本文通讯作者．

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

明：数学核心素养水平不存在性别差异，但不同区域、不同类型学校的学生核心素养水平发展不平衡. 该模型从多个方面分析了学生的数学核心素养发展情况，结果较为客观，能有效地评价学生的数学核心素养状况.

评价研究目的在于利用评价结果指导教学，学生核心素养发展的关键在于学校教学实践活动的开展. 陈蓓[28]在利用知识图谱可视化分析国内数学核心素养发展状况一文中也指出：国内数学核心素养的研究，正在向纵深发展，并侧重数学核心素养在课堂教学渗透. 宁锐等将数学学科 6 大核心素养分为 3 组建立结构模型[29]：数学思维素养（包括直观想象和数学抽象）、数学方法素养（包括数学运算和逻辑推理）、数学工具素养（包括数据分析和数学建模），反映了从数学知识学习到数学应用的数学素养发展过程.

针对教育数学体系下学生核心素养的评价不仅要契合教育数学自身的特点，并且要将评价结果导向教学. 教育数学实验践行的“重建三角”新体系是有关三角、代数、几何等初、高中知识点的重构体系，因此，直接采用原有的、单一的初中数学核心概念指标对其进行评价是不合适的. 基于此，研究将喻平等构建的初中数学核心素养评价指标体系与宁锐等建立的核心素养结构模型相结合，形成针对教育数学体系下学生的核心素养评价框架（见图 1）. 评价框架中的指标融合了初中数学核心概念与高中数学核心素养，将融合后的指标与数学核心素养发展的 3 个层面建立连接，在此评价框架下进行数据分析可直接对应不同层面核心素养发展的焦点，框架内容架构合理且可操作性较强，有利于将核心素养渗透进教育数学体系下的教学实验中.

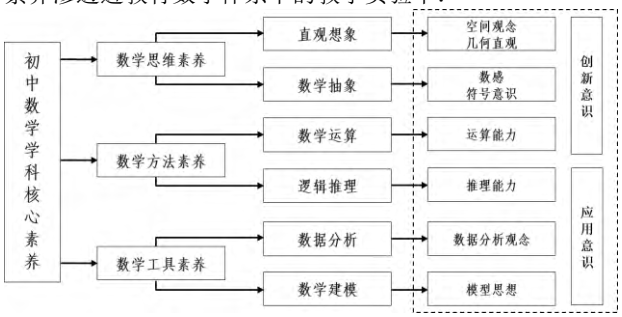

图 1 初中数学学科核心素养评价框架

3 研究方法

3.1 研究对象

研究选择邛崃市宝林中学 2017 级的初中学生作为样本，该实验组共 93 人，在 2020 年 6 月完成了一轮七至九年级完整教育数学实验. 邛崃市宝林中学地处农村地区，其生源大多来自周边村镇，学生数学成绩参差不齐，师资力量有限. 邛崃市整体有 28 所中学，2017 级有 90 个班（除实验组外 88 个班），共 3 765 人（除实验组外 3 672 人）. 教育数学实验在七年级下学期开始实施，因此，收集 2017 级七年级上学期期末邛崃市整体、宝林中学实验组的成绩数据作为实验的初始值，具体情况如表 1. 使用 SPSS26.0 对实验数据进行独立样本 t 检验，数据对比分析结果显示 P 值为 0.745，远大于 0.05，表明实验组与邛崃市整体，前测无显著差异.

表 1 实验前测数据

类别	人数	AB 卷		A 卷		*Sig* 值
		平均分	全市排名	平均分	全市排名	
邛崃市	3 672	96.11	–	75.74	–	0.745
实验组	93	95.63	35	76.24	38	

3.2 实验内容与过程

2017 年 9 月，邛崃市正式开始教育数学实验. 实验组数学授课教师为刘蓉，女，1971 年生人，教龄 26 年，职称为中学高级教师. 实验前，授课教师研读了张景中院士相关著作，与四川省成都市青白江区、广安市的实验教师建立沟通，并未特别对其进行特殊培训.

实验过程中，邛崃市整体采用北京师范大学出版社出版的初中数学教材，宝林中学实验组教学则以《一线串通初等数学》[6]一书为主要参照. 教育数学理念的实践路径是“重建三角”，即以低起点的面积法为引，重新定义正弦、导入正弦，推导正弦定理、余弦定理等，改造三角并重构初中阶段的知识点，一线串通三角、代数与几何，构建了一个整体性强、结构关联度高的知识体系.

此前，教育数学体系的实践内容已在广州市海珠实验中学[7–8]、成都市青白江区祥福中学[30]等多所学校开展的规模化教学实验中取得了较好成效，实验相关数据与分析表明了教育数学体系改造的合理性，改造后的体系所需预备知识少，可接受程度高，受到学生与授课教师的欢迎.

借鉴上述实践经验并结合邛崃市整体与实验组的实际情况，教学实践方案确定为：在基本不大动教材与教学任务前提下，通过面积法重新定义正弦，引入正弦定理、余弦定理等内容，将其适时、适度“植入”七、八年级教学过程，施行边实践边学习策略. 重构课程主要安排如下.

七年级下学期：第一章整式的乘除；第二章正弦和正弦定理：用面积法引入正弦，重新定义正弦，补充单位菱形与三角形正弦面积公式，由三角形正弦面积公式导出正弦定理，将“相交线与平行线”与“正弦和正弦定理”整合为一章，主要课时有“单位菱形与三角形正弦面积公式”“由三角形正弦面积公式导出正弦定理”“等腰三角形与正弦定理”“正弦定理的应用”等；第三章三角形：补充等腰三角形与正弦定理，正弦定理的应用；第四章变量之间的关系；第五章生活中的轴对称；第六章概率初步.

八年级上学期：第一章实数（前置）；第二章余弦和余弦定理：将勾股定理、余弦和余弦定理相结合为一章，补充锐角的余弦定义，求锐角的三角函数值，特殊锐角的三角函数值，射影定理，主要内容有“锐角的余弦定义”“锐角的正切定义”“求锐角的三角函数值”“射影定理与勾股定理”“特殊锐角 30º、45º、60º的三角函数值”“特殊角与解直角三角形”等；第三章位置与坐标；第四章一次函数与正切：在“一次函数”后加入“正切”相关内容，将其合并为一章，补充锐角的正切定义，斜率及直线位置关系，特殊角与解直角三角形；第五章二元一次方程组；第六章数据的分析；第七章平行线的证明.

八年级下学期：第一章三角形的证明；第二章一元一次不等式与一元一次不等式组；第三章图形的变换与正、余弦

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理的应用：将“图形的平移与旋转”与正、余弦定理的应用整合为一章，图形的平移与旋转这部分内容相对难度较低，在此章节整合正、余弦定理的应用可以综合难度，巩固应用；第四章因式分解；第五章分式与分式方程；第六章平行四边形：利用正弦三角形面积公式可以推知正弦和角公式，利用余弦定理推出相似的判定，这样相似的问题就可以通过三角法来解决.

九年级调整主要集中在下学期，由于直角三角形的边角关系已在八年级学完，故删去原教材第一章“直角三角形的边角关系”，改为：第一章二次函数；第二章圆．后续为正常教学、测试和中考复习，与邛崃市整体进度基本保持一致.

3 年实践，在实际教学过程中实验组所用的教材页数与北师大版教材相同，主体内容教学所用学时为 315 课时（未包含综合实践、测试、中考复习课时），与邛崃市整体教学所用课时相同，并未增加教学学时．实验组相关习题量与对照组基本一致，未额外增加习题量．教育数学体系中各知识点的导入方法起点低，环环相扣，基础薄弱的学生也能跟上进度，因此实验组的教学进度基本与邛崃市整体保持一致.

3.3　测评工具分析

研究试卷采用邛崃市 2017 级初三第二次诊断性测试题．考试时间为 2020 年 6 月，是最接近中考的一次全市联考，具有代表性．试卷分 A、B 卷，A 卷满分 100 分，B 卷满分 50 分，考试时间为 120 分钟，其中，A 卷侧重基础性，主要检验学生是否具备毕业水平；B 卷为拓展性，具有选拔作用．试卷总体情况为：难度 0.47，区分度 0.42，信度 0.89，试卷难度适中，区分度较好，且具较高可信度.

基于已有评价框架，首先对试卷题目核心素养内涵进行分析，深入挖掘每道题目考查的知识点，并根据题目特性将其归纳到最贴合的核心素养中．分类时遵循以下两个原则.

（1）关于一个测试题涉及几个核心素养的情况，遵循“从重”原则．首先析出此题覆盖的知识点，再根据知识点的特征与其解题路径，划分其所属的素养．一般存在这种情况时，考查素养的程度不同，再根据题目本身的侧重点，将其归入最重点考查的核心素养类中.

（2）整张测试卷中，每项核心素养考查分值的权重应遵循“统筹分布、内外一致”原则，即每项核心素养考查分值所占权重应与其内在关系和处在整体中的地位一致[31]．例如，数学运算素养是数学基础性素养和基本技能，几乎每个测试题都会涉及，毋庸置疑数学运算素养考查的分值权重较大，但并不能笼统地将测试题都归类到这一素养中，而是需要根据题目本身的侧重和教育数学思想体系下各素养的主次关系统筹协调，最终符合初中阶段课程知识点的分布与学生认知发展的规律.

经过多次修订，最终确定试题核心素养双向细目表如表 2 所示．题目编号第一位字母代表题目所在卷号，第二、三位是题号，例如 A 卷中的第 19 题号被标记为“A19”，B 卷中的第 28 题被标记为“B28”.

表 2　试题核心素养双向细目表

核心素养	题号	题型	分值	考查内容	核心概念
数学抽象	A01	选择	3	生活数学中的负数大小比较	符号意识
	A03	选择	3	用科学计数法表示中国高铁里程	数感
	A18	解答	8	平均数和非特殊角的三角函数的应用	应用意识
	B26	解答	8	用分式方程和二次函数的解决生活中的数学	应用意识
逻辑推理	A14	填空	4	尺规作图解决同圆中弦、弧、圆心角之间关系	推理能力
	A20	解答	10	圆中的三角形相似和线段、三角函数值求解	推理能力
	B25	填空	4	勾股定理、射影定理的综合运用	推理能力
	B27	解答	10	三角形、四边形的综合运用	推理能力
数学建模	A19	解答	10	一次函数和反比例函数的小综合应用	模型思想
	B24	填空	4	特殊条件下反比例函数 k 的几何求法	模型思想
直观想象	A02	选择	3	小正方体组成的几何体的三视图	几何直观
	A04	选择	3	平行线和三角形的性质考查	几何直观
	A06	选择	3	坐标系中平移变换及其问题求解	空间观念
	A09	选择	3	圆中扇形的面积	几何直观
	A10	选择	3	二次函数的性质和最值	几何直观
	A12	填空	4	正多边形内角和	应用意识
	A13	填空	4	利用图象解一次函数与反比例函数值的比较	几何直观
	B22	填空	4	黄金分割点的几何画法	几何直观
数学运算	A05	选择	3	整式的相关运算	运算能力
	A08	选择	3	一元二次方程实数根的判别	运算能力
	A11	填空	4	相反数和绝对值	运算能力
	A15	计算	12	实数的简单运算；一元二次方程的解	运算能力
	A16	计算	6	分式的化简求值	运算能力
	B21	填空	4	无理数的大小比较	运算能力
	B23	填空	4	分式方程和不等式组含参的整数解	运算能力
	B28	解答	12	求二次函数的解析式和最值	运算能力
数据分析	A07	选择	3	生活中的众数和中位数	应用意识
	A17	解答	8	生活数学中的统计图并求概率	数据分析

测试题共 28 题，系统分类后各核心素养考查的题目数以及考查分数情况如表 3 所示．从统计结果可以看到，研究

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所选测试题考查的范围比较全面，各个核心素养均有涉及．其中，考查分值占比从高到低依次排序为数学运算、逻辑推理、直观想象、数学抽象、数学建模、数据分析．各素养考查题目分值占比与题目数量符合教材中各知识点的分布，且试题中考查的知识点不包含教育数学体系中重新定义的“正弦定理”“余弦定理”等相关知识点，试题的命制符合规范，不影响实验整体的信度．

表 3　各核心素养考查的题目数以及分值

核心素养	考查分值	考查分值占比	题目数
数学运算	48	32.00	8
逻辑推理	28	18.67	4
直观想象	27	18.00	8
数学抽象	22	14.67	4
数学建模	14	9.33	2
数据分析	11	7.33	2
总计	150	100.00	28

3.4　评分标准及数据处理

测试卷评分时采用计算机阅卷，联考后设立阅卷专家组，评卷开始前对阅卷老师进行培训与讲解，评判过程与评分标准统一严格按照中考标准执行．

数据处理部分，研究受董林伟与喻平采用 Angoff 法[32]得出“边界组考生”标准值的启发，对 4 个水平的划分进行细化．首先参考凯利（T. L. Kelley）提出的区分度指数，即在正态分布中，兼顾高分组与低分组两者的最佳百分数是 27%[33]．基于此，将核心素养按比例划分为如表 4 所示的 4 个等级．其中，前 27%为优秀，后 27%为不合格．

再根据以上标准，对各素养分别进行计算统计．例如，数学抽象素养考查了 22 分，则学生需要在考查数学抽象素养的题目上共拿到考查分值的 73%即 16.06 分及以上，即可以视为达到数学抽象素养的 A 水平．

表 4　核心素养等级水平划分

等级	区间	水平
A	[73, 100]	优秀
B	[50, 73)	良好
C	[27, 50)	合格
D	[0, 27)	不合格

4　数据分析

4.1　总体分析

首先，使用 SPSS26.0 对实验数据中的总分进行独立样本 *t* 检验，数据对比分析结果显示 *P* 值小于 0.05，表明实验组与邛崃市整体存在显著差异．实验组均值高于邛崃市约 5 分且标准差较小，由此可知，从整体来看，教育数学体系下的学生成绩更优且相对均衡集中，具体情况如表 5．

表 5　整体 *t* 检验对比情况

类别	个案数	平均值	标准差	*Sig* 值
邛崃市	3 672	71.54	27.88	0.037*
实验组	93	76.54	22.18	

根据试卷核心素养分类，分层对实验数据进行独立样本 *t* 检验，检验结果如表 6 所示．数据显示：实验组在 3 个核心素养层面上的平均值高于邛崃市整体，表明教育数学体系下的学生相较于传统教材体系下的学生在各个核心素养层面上的发展情况更好．在方法素养中，*P* 值为 0.013，远小于 0.05，实验组与邛崃市整体表现出显著差异，即教育数学体系下的学生方法素养发展明显优于邛崃市整体水平．

表 6　各素养层面 *t* 检验对比情况

维度	类别	平均值	标准差	*Sig* 值
思维素养	邛崃市	28.68	12.37	0.118
	实验组	30.50	10.83	
方法素养	邛崃市	31.00	11.62	0.013*
	实验组	33.39	8.82	
工具素养	邛崃市	11.86	5.88	0.195
	实验组	12.66	5.13	

将邛崃市整体与实验组的各素养平均得分率进行比较（见图 2），可以更直观地发现教育数学体系下的实验组在 6 个核心素养上的整体表现优于邛崃市整体，在数学抽象、直观想象、数学运算、数据分析 4 个核心素养上平均得分率超过 60%，其中，数据分析素养得分率约 80%．在普遍表现不佳的逻辑推理和数学建模 2 个核心素养上平均得分率也能略超邛崃市整体水平．可以说，实验组的核心素养发展情况普遍优于该市整体水平．

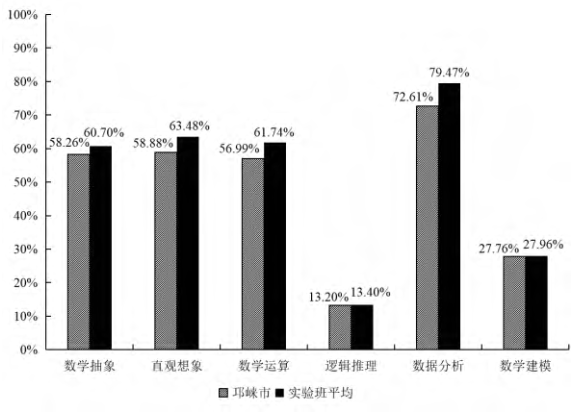

图 2　平均得分率情况

4.2　各素养层面分析

在实验组整体与邛崃市整体存在显著差异的情况下，根据表 4 核心素养等级水平划分标准，对邛崃市整体与实验组数据进行 4 级划分，用以具体分析各素养层面学生的表现．

4.2.1　思维素养

思维素养层面包括直观想象和数学抽象．由表 7 数据可见：（1）直观想象素养中，实验组的 A 水平比例高出邛崃市 4.52 个百分点，D 水平比例低 11.45 个百分点，实验组约 97%的学生在直观想象素养上都能达到合格水平，其中优秀比例约 41%；（2）数学抽象素养中，实验组与邛崃市 A、D 水平比例相近，但实验组的 A、B 比例之和为 67.74%，高于邛崃市 8.61 个百分点，总体表现出优良比例略高．

表 7　思维素养实验班与邛崃市等级分布情况

素养层面	核心素养	类别	A 比例	B 比例	C 比例	D 比例
思维素养	直观想象	邛崃市	36.34	20.58	28.41	14.68
		实验组	40.86	20.43	35.48	3.23
	数学抽象	邛崃市	34.36	24.77	34.15	6.72
		实验组	33.33	34.41	25.81	6.45

4.2.2　方法素养

方法素养层面包括数学运算和逻辑推理．由表 8 数据可见：（1）数学运算素养中，实验组的 A 水平比例略低于邛

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

峡市，但 A、B 比例之和为 80.65%，高于邛峡市 7.14 个百分点，即实验组学生 80%以上能在数学运算素养上达到优良水平；实验组 D 比例水平低于邛峡市 8.30 个百分点，实验组学生约 99%都能在数学运算素养上达到合格水平；(2)逻辑推理素养中，邛峡市整体与实验组各水平比例情况相近. 从数据可以看出，邛峡市整体包括实验班的逻辑推理素养发展情况不佳，不合格率均在 80%以上，实验组不合格率略低于邛峡市.

表 8　方法素养实验班与邛峡市等级分布情况

素养层面	核心素养	类别	A 比例	B 比例	C 比例	D 比例
方法素养	数学运算	邛峡市	9.93	63.58	17.10	9.38
		实验组	7.53	73.12	18.28	1.08
	逻辑推理	邛峡市	0.13	1.84	12.52	85.51
		实验组	0.00	1.08	13.98	84.95

4.2.3　工具素养

工具素养层面包括数据分析和数学建模. 由表 9 数据可见：(1) 数据分析素养中，实验组 A 水平比例高于邛峡市 15.59 个百分点，且 D 比例水平低于邛峡市 3.17 个百分点，实验组学生在数据分析素养上优良比例高达约 97%；(2)数学建模素养中，实验组与邛峡市各水平比例相近，实验组的合格比例略高邛峡市约 2 个百分点.

表 9　工具素养实验班与邛峡市等级分布情况

素养层面	核心素养	类别	A 比例	B 比例	C 比例	D 比例
工具素养	数据分析	邛峡市	62.90	25.40	6.38	5.32
		实验组	78.49	18.28	1.08	2.15
	数学建模	邛峡市	5.24	22.19	12.38	60.18
		实验组	4.30	18.28	19.35	58.06

5　讨论

在不同的素养层面，教育数学体系下的实验组表现出不同的特点.

在数学思维素养层面中，实验组呈现特点可以概括为：在直观想象素养中不合格的人数比例较低，在数学抽象素养中优良人数比例之和较高，这与教育数学体系中三角与几何的贯穿密切相关. 在教育数学知识体系中，由低起点且直观的面积法引入正弦，利用三角的方法推导几何，在这个过程中，学生的几何直观与空间感知能力可以得到最大限度地激发. “直观想象是实现数学抽象的思维基础”[34]，有了直观想象素养的基础，学生在解决问题时能更好地感知和理解数学概念，抽象出数学问题的实质，在计算与推理等认知活动中聚焦学生的数学思维素养发展.

低起点的方法对学生认知负荷要求较低，让基础薄弱的学生不会望而生畏，从而建立起对数学学习的兴趣和信心，成绩提高则是水到渠成. 对于基础良好的学生，直观连贯的推演过程能激发学生思考，在分析解决问题的过程中，教育数学系统化、紧密性强的知识体系又能很好地帮助基础良好的学生把握知识间的联系，从而融会贯通，有所进益.

在方法素养层面中，实验组在数学运算素养中的优势显而易见：在为期 3 年的教育数学实践之后，约 99%的学生都能在考查数学运算素养的题目中达到合格及以上水平. 实验组学生数学运算素养的表现源于：在教育数学体系中，代数是处处有用的，运算能力甚至无需刻意训练，在潜移默化的计算与推理中就能得到巩固. 基础薄弱的学生在实验后计算能力基本都能达到合格及以上水平，基础相对较好的则体现在优良率的提升上.

在逻辑推理素养中，邛峡市整体包括实验组的发展情况不佳. 这一研究结果与已有的研究存在共性：严卿和喻平编制“初中逻辑推理测验”对中国初中生的逻辑推理能力展开调查，分析发现学生在这类任务上的困难具有普遍性，重点中学学生逻辑推理能力优于普通中学学生[35]. 实验组的学生大都来自农村地区，且实验初始水平处于全市中等水平，在发展情况普遍不佳的逻辑推理素养中，得分率与合格比例均略高于邛峡市整体水平，表明教育数学体系对农村地区学生的逻辑推理素养培养有一定的促进作用.

在工具素养层面中，实验组在数据分析素养中 A 水平比例远高于邛峡市整体水平，A、B 比例之和达 95%以上，优良比例较高；在数学建模素养中，实验组得分率与整体合格率略高于邛峡市. 在工具素养中，数据分析为基础，数学建模相对来说有更高的要求，也更容易出现两极分化现象：李贺与张卫明利用数学学业质量检测对初中学生数学建模发展状况进行调查，发现江苏地区初中学生数学建模水平发展不平衡，两极分化现象较为突出[24]. 在更高的要求下，教育数学体系能夯实学生基础，提升合格比例：引入正弦后，三角形面积可表示为：$S_{\triangle ABC}=\frac{bc\sin A}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{ab\sin C}{2}$，这几个等式的变换体现了方程的思想，由此可以推导得到如正弦定理等一系列公式，这相当于引入了方程、函数的数学思想，学生能在综合的情境中，运用数学思想进行分析，建立数学模型解决问题，切实体会到数学知识与现实情境之间的关系，例如：勾股法与三角法，以及全等法、相似法相互联系，各有其用，各有其妙. 勾股法主要通过直角三角形的性质来研究任意三角形的性质，这离不开添辅助线，添辅助线是学生的短板，在教育数学体系中，正弦三角形面积公式、正弦定理、余弦定理是可以直接沟通任意三角形的边角关系，是解复杂题的通性通法. 工具素养也是学生的数学应用与创新意识的体现. 教育数学知识体系夯实了工具素养的基础数据分析，在对能力水平要求较高的数学建模素养中也能让更多的学生达到合格及以上水平.

将实验组 2017 年七年级上学期前测与 2020 年九年级下学期数据作对比分析，主要收集了平均分、及格率与优生率 3 个重要指标，实验组在全市 90 个班中的排名情况如表 10.

表 10　实验组各指标全市排名情况

类别	AB 卷			A 卷		
	平均分	及格率	优生率	平均分	及格率	优生率
七上	35	37	31	38	41	34
九下	26	26	21	27	28	26
提升位次	9	11	10	11	13	8

从全市排名情况来看，实验组均有不同程度的进步. 其中，A 卷的及格率提高最大，其次是 AB 卷的及格率与 A 卷的平均分，平均分与及格率排名的提升表明：教育数学体系下的实验组学生基础学业水平得到较大提升；AB 卷的优生率提升程度高于 A 卷，表明在一定程度上，教育数学提升了实验组学生在 B 卷的得分率，在考试中处理难度较高

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的试题时也能拿到较多的分数.

上述从 3 个素养层面具体分析了实验组数学核心素养的发展情况以及形成原因，结合实验组在全市的排名情况，教育数学体系对学生的影响主要表现在：实验组均分由前测低于邛崃市整体变为高于邛崃市整体，说明实验组学生成绩有明显进步且优于邛崃市整体，教育数学体系在一定程度上提升学生在各核心素养上的优秀率，并降低不合格比例.

6 结论

（1）邛崃市 2017 级学生的核心素养发展不平衡，其中，在数学抽象、直观想象、数学运算、数据分析 4 个核心素养上达到较高水平，但在数学建模、逻辑推理素养上表现不佳，不合格比例过高.

（2）教育数学体系下的实验组，与邛崃市整体存在显著差异，并且在 6 个核心素养上的平均分与得分率高于邛崃市整体水平，实验组的核心素养发展情况普遍优于邛崃市整体水平，在方法素养中的数学运算素养上显著优于邛崃市.

（3）实验组平均分、及格率、优生率等指标排名显著提升，表明教育数学思想体系下的知识组织形式对学生的认知负荷要求较低，做到了把数学本身变得容易. 对于基础薄弱的学生，能在一定程度上提升其在各素养中的合格率，对于学优生而言，在维持其优秀的同时提升了其综合解决问题的能力. 综合表明教育数学体系对各水平的农村学生数学核心素养的培养有一定的促进作用，实验风险可控，适合大规模普及.

［参 考 文 献］

[1] 井中，沛生. 从数学教育到教育数学[M]. 成都：四川教育出版社，1989：12–36.
[2] 张奠宙. 教育数学是具有教育形态的数学[J]. 数学教育学报，2005，14（3）：1–4.
[3] 张景中. 重建三角，全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个建议[J]. 数学教学，2006（10）：封二，1–4，20.
[4] 张景中. 三角下放全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个方案[J]. 数学通报，2007，46（1）：1–5.
[5] 张景中. 三角下放全局皆活（续）——初中数学课程结构性改革的一个方案[J]. 数学通报，2007，46（2）：4–8.
[6] 张景中. 一线串通的初等数学[M]. 北京：科学出版社，2009：4–119.
[7] 俞健，朱华伟，张东方. “重建三角”初等数学新体系的由来及其教学实验分析[J]. 开封教育学院学报，2016，36（9）：219–220.
[8] 李苹芳，朱华伟. 初等数学新体系的教学实验调查与分析[J]. 数学教育学报，2015，24（2）：26–29.
[9] 朱华伟，徐章韬. 教育数学的行动：寻找初中数学课程的焦点[J]. 课程·教材·教法，2016，36（9）：58–62.
[10] 张传军，饶永生. 教育数学与中小学课程专题研讨会——初中阶段三角数学课程建设的可行性研究会议纪要[J]. 数学教育学报，2018，27（2）：96–98.
[11] 中华人民共和国教育部. 教育部关于印发普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017 年版 2020 年修订）的通知[J]. 中华人民共和国教育部公报，2020（6）：5–6，92–279.
[12] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2018：4–106.
[13] 朱立明. 中国学生数学学科核心素养研究述评[J]. 数学教育学报，2020，29（2）：84–88.
[14] 张惠英，王瑞霖. 基于核心素养的数学测评研究——以河北省 2017 年中考数学试题为例[J]. 数学教育学报，2017，26（5）：31–35.
[15] 喻平. 数学核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报，2017，26（2）：19–23.
[16] 朱先东，吴增生. 核心素养视角下对数学测评的研究——以 2017 年浙江省中考试题为例[J]. 数学教育学报，2017，26（5）：36–43.
[17] 严卿，黄友初，罗玉华，等. 初中生逻辑推理的测验研究[J]. 数学教育学报，2018，27（5）：25–32.
[18] 张斌，苟斌娥. 基于核心概念的数学测评解析与教学建议——以重庆市 2018 年中考数学试题（A 卷）为例[J]. 数学教育学报，2019，28（4）：61–65.
[19] 连王伟，杨泽恒，王彭德，等. 云南中考和 PISA 关于图形与几何试题的比较研究——以云南省两所中学为例[J]. 数学教育学报，2020，29（5）：85–90.
[20] 董林伟，喻平. 基于学业水平质量监测的初中生数学核心素养发展状况调查[J]. 数学教育学报，2017，26（1）：7–13.
[21] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011 年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012：16–20.
[22] 殷容仪，赵维坤. 基于质量监测的初中学生数学抽象发展状况的调查研究[J]. 数学教育学报，2017，26（1）：14–15，63.
[23] 周雪兵. 基于质量监测的初中学生逻辑推理发展状况的调查研究[J]. 数学教育学报，2017，26（1）：16–18.
[24] 李贺，张卫明. 基于质量检测的初中学生数学建模发展状况的调查研究[J]. 数学教育学报，2017，26（1）：19–21，

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

87.
[25] 徐德同，钱云祥．基于质量监测的初中学生直观想象发展状况的调查研究[J]．数学教育学报，2017，26（1）：22–24.
[26] 杭毅，侯正永．基于质量监测的初中学生数学运算发展状况的调查研究[J]．数学教育学报，2017，26（1）：25–27.
[27] 张爱平，马敏．基于质量监测的初中学生数据分析发展状况的调查研究[J]．数学教育学报，2017，26（1）：28–31.
[28] 陈蓓．知识图谱可视化分析下的数学核心素养研究[J]．数学教育学报，2019，28（6）：87–91.
[29] 宁锐，李昌勇，罗宗绪．数学学科核心素养的结构及其教学意义[J]．数学教育学报，2019，28（2）：24–29.
[30] 张龙军，熊莉莉，张景中，等．教育数学在农村初中首轮实验的探索与思考——“重建三角”在成都市青白江区祥福中学实验分析[J]．数学教育学报，2021，30（5）：33–38，65.
[31] 李爽，杨泽恒，王彭德．核心素养视角下云南高中学业水平考试和高考数学试卷分析[J]．数学教育学报，2020，29（6）：25–31，91.
[32] 余嘉元．Angoff 方法有效性的检验研究[J]．教育研究与实验，2008（1）：54–57.
[33] 竺培梁．心理测量[M]．合肥：中国科学技术大学出版社，2008：74–80.
[34] 史宁中．高中数学课程标准修订中的关键问题[J]．数学教育学报，2018，27（1）：8–10.
[35] 严卿，喻平．初中生逻辑推理能力的现状调查[J]．数学教育学报，2021，30（1）：49–53.

Empirical Study on Educational Mathematics under the Guidance of Mathematical Key Competencies

TAN Lin[1, 2], ZHANG Yong-sheng[3], CHEN Ru-xian[1], XU Zhang-tao[4], RAO Yong-sheng[1]

(1. Institute of Computing Science and Technology, Guangzhou University, Guangdong Guangzhou 510006, China;
2. College of Information Engineering, Guangzhou City Polytechnic, Guangdong Guangzhou 510405, China;
3. Qionglai Education Research and Training Center, Sichuan Chengdu 611530, China;
4. School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Hubei Wuhan 430070, China)

Abstract: Educational Mathematics experiments play an important role in the educational reform of China, and the development of students' mathematical key competencies is regarded as one of the significant indicators of the effectiveness of the reform experiments. In this paper, an evaluation framework of mathematical key competencies for middle school students is selected to evaluate the Educational Mathematics experiment conducted in Qionglai City, and the impact of the experiment on the development of students' mathematical key competencies is analyzed. First, the mathematical key competencies involved in the paper of the second diagnostic test paper for students of Grade 3 (i.e., students enrolled in 2017) are classified according to the selected evaluation framework. Second, based on scores of students' mathematical key competencies, a comparative analysis was conducted on the development of mathematics key competencies among 3 672 junior high school students and 93 students in educational mathematics experimental classes in the city. The results show that: city's overall key mathematics competencies development among junior high school students is unbalanced, especially on aspects of mathematical modeling competency and logical reasoning competency; however, the development of the mathematical key competencies of the students from the experimental class is more balanced, and generally better than the overall level of the city. In conclusion, Educational Mathematics can promote a balanced development of students' mathematical key competencies, the experimental risks are controllable, and the Educational Mathematics is suitable for large-scale popularization.

Key words: mathematical key competencies; Educational Mathematics; teaching reform; evaluation study

[责任编校：张楠、陈汉君]

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net