

# 把数学变容易

——张景中院士访谈录<sup>①</sup>

张景中 赵维坤

摘要:教育数学关注的是教材中数学内容的优化问题,就是要把数学变容易,从而真正减轻学生的学习负担。基于“熟悉了,简单了,想通了,直观了,就容易”的想法。把数学变容易的做法有:改变概念定义的表述;建立更简易、更有力的方法,提供解题的“中巧”。教育数学40多年的研究在五个方面有重要进展:在初等几何领域发展了面积法,进而发展出消点法;发现了三角函数在小学知识基础上的生长点;针对高中向量部分的学习,发展了向量回路方法;解决了有关微积分如何变容易的问题;探索如何将信息技术用于数学教学,开发了更智能化的动态数学软件——网络画板,使得数学教学更为生动有趣。

关键词:教育数学;解题教学;机器证明;网络画板

## 一、从数学教育到教育数学

赵维坤:张院士,您好!非常感谢您接受我的采访。作为数学家,您在科研之外,为什么关注和推动数学教育?

张景中:我感到,关注和推动数学教育不是科研之外的事情。研究数学教育会遇到长期以来没有解决甚至被认为不能解决的问题,需要长时间地研究思考。如几何解题简便的通用算法、不用极限讲微积分,都是前辈

大数学家思考过而没有解决的问题。关注和推动数学教育是难度很大的科研活动。做这

<sup>①</sup> 我国著名数学家、计算机科学家、数学科普作家,中国科学院院士张景中长期关注数学教育(将其作为数学科普工作的重要组成部分),提出了教育数学的思想,并付诸了大量的实践研究。近期,赵维坤老师对张景中院士进行了访谈,请他就有关话题发表看法。本次访谈得到了张景中团队尧刚老师、陈如灿老师、李静老师等的支持,在此谨表谢意。

样的研究,往往几十年才能前进一步,但这一步就很有意义。由于无法预期其进展,所以我没有将其作为项目或课题提出,而是将其作为自己选定的长期研究目标。

**赵维坤:**在数学教育方面,您最重要的贡献是提出了教育数学的思想,并付诸了大量的实践研究。您致力于改造数学,提出更适宜于教学和学习的新概念、新方法、新思路。那么,您提出教育数学的思想,是针对数学教学中存在的哪些问题呢?希望起到什么样的作用呢?

**张景中:**数学教育中,“教什么”往往比“怎么教”更重要。如果内容不当,怎么教都不行。教育数学关注的是长期以来被数学教育研究忽视的重要问题,即教材中数学内容的优化问题,亦即张奠宙先生指出的“去数学化”问题。1989年,我在15年思考探索和教学经验的基础上,提出了教育数学的概念。所谓“教育数学”,就是为教育的数学。改造数学,使之更适宜于教学和学习,是教育数学为自己提出的任务。简单而通俗地说,就是要把数学变容易。如果教学内容得到优化了,概念变得容易理解了,解题方法改进得更好用了,再加上生动直观的信息技术的动态演示,各种教学方法都会有更好的效果。

**赵维坤:**确实,很多学生学习数学时,都有过痛苦的经历,都觉得数学很难,尤其是在做不出一些题目之后。把数学变容易,这真的可能是数学教育中最重要的问题了,那么,基本的想法是什么?

**张景中:**数学家阿蒂亚在1976年就任伦敦数学会主席时的演说中说:“如果我们积累起来的经验要一代一代传下去,就必须不断努力把它们简化和统一。”“过去曾经使成年人困惑的问题,在以后的年代里,连孩子们都

能容易地理解。”

把数学变容易,基本的想法是:熟悉了就容易,尽可能把要学的新知识和学生已经熟悉的东西串通起来,旧瓶新酒,推陈出新;简单了就容易,要寻求更简单的表述方式,更通用、更有力的解题方法,为大量问题提供有章可循的解决途径;想通了就容易,尽量把前后左右的知识串通起来,把道理说清楚;直观了就容易,数形结合,动静结合,充分利用教育信息技术提供的工具和环境,在数学实验中变抽象为具体,体验数学之美。

为此,就要做切实的基础数学研究。这包括提出新定义新概念,建立新方法新体系,发掘新问题新技巧,寻求新思路新趣味。凡此种种,无不是为教育而做数学。基础教育中的数学,讲的是最普适的数学事实。大道至简,最一般的道理应当是易于表达和理解的。因此,有可能让“过去曾经使成年人困惑的问题,在以后的年代里,连孩子们都能容易地理解”。

**赵维坤:**说到基础教育中的数学,很多人都觉得它已经十分成熟了,很难再变得更容易。现在我国的数学课程改革,乃至世界各地的数学课程改革,似乎都是通过删减内容、降低要求来使其变容易,这一点在初中的平面几何中表现得特别明显。但您却说:“把数学变容易大有可为。”那么,您是怎样做的呢?

**张景中:**说到对数学的改造,其实要回到一个源头性的话题,也就是数学的起源。数学最初的研究并不是为了孩子、为了教育,而是为了解决工程、技术、科学等方面的问题。所以,数学不会自然地适用于教学。而要让数学更适合孩子学习,就必须对数学进行加工和改造,让它变得更容易理解和掌握。这包括改变概念定义的表述,以及建立更简易、

更有力的方法。

定义是知识学习的门槛,定义如果很难、很烦琐,学生继续学下去就会感到吃力。比如三角函数,学生普遍觉得难学。因为传统的教材中,“三角函数”部分的内容一下子就出现了  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\cot$  四个概念和有关公式。这些内容因为涉及相似三角形的知识,到九年级才引进;学了之后还没有得到足够的应用巩固,初中课程就结束了。如果改变定义,在七年级甚至小学就能教三角函数。也就是说,这些关于三角函数的定义一开始就把门槛定得较高,需要较多的准备知识,这样学起来就难了。20 世纪 70 年代,我在新疆教中学数学时,用小学的面积知识引进正弦概念,学生在七、八年级就能学;之后把余角的正弦叫余弦,把三角、代数、几何相结合,学生学起来容易多了。

另外,就是简化方法。几何的难点可以通过创新的方法进行转化。例如基于小学知识总结出的“三共定理”:共高定理、共角定理、共边定理。这些定理易学好用,使大量几何题变容易了——比传统的欧式几何特别重视的全等三角形这一工具易学好用。其中,前两个是人们熟知的古老命题,但没有得到重视,共边定理则是新的发现。一些复杂的几何题运用共边定理就能迎刃而解。但为何共边定理如此好用,我到 1992 年才理解其中的奥妙。那年,应周咸青博士邀请到美国合作研究几何定理的机器证明,我提出用面积法。他问:如何把面积法转化为计算机可执行的算法呢?夜里,我想了一个例子,即用面积法机械地证明平行四边形对角线相互平分,并由此认识到,原来共边定理的作用在于消去直线的交点。几何解题的传统思路是作辅助图形,作不出来就设法添加东西,现在反

其道而行,从图中减少一些东西,使之简化;最后不能再简化了,就水落石出。这样,数学教育和人工智能就密切联系起来了。在 2021 年第 13 届几何自动推理国际会议上,沃尔夫勒姆公司的一个报告详细介绍了他们实现面积消点法的情形,说明这个领域中国人 30 年前的工作,仍然处于前沿。

**赵维坤:**您对教育数学的具体研究和教学实践已历经 40 余年,这么多年的研究肯定有很多重要进展,您能不能简要介绍一下这方面的进展?

**张景中:**回顾 40 多年的研究,教育数学主要在五个方面有了重要进展。

一是在初等几何领域发展了面积法,这一基于小学知识得出的方法,把大量几何题变容易了。而且,基于我国几位学者的共同努力,面积法已发展成为几何定理机器证明的消点法,成为国内外奥数培训的内容,还被编入一些高校师范类专业的教材。

二是发现了三角函数在小学知识基础上的生长点,提出了用面积关系来定义正弦,实现了国际著名数学教育家弗赖登塔尔在 40 多年前提出而国外未能实现的“提前两年学正弦”,让学生能够在义务教育阶段掌握三角形的作图推理与计算。这项研究始于 1974 年,成果发表于 1980 年,并在 2012 年正式进入全班级、全学段教学实践。广州市海珠实验中学的两个实验班中考数学优秀率达到百分之百,学生学得轻松有趣,负担减轻,成绩上升,入学时数学成绩中下的学生毕业时也达到了优秀。

三是针对高中向量部分的学习,发展了向量回路方法,消解了师生关于向量解几何题不如传统方法简便的困难。由此联系到数学与哲学大师莱布尼兹曾提出的“点如何相

加”的问题,我提出了点几何的纲要,用点的代数关系直接表达几何性质,用代数运算表达几何推理。我和华中师范大学彭翥成博士合著的《点几何解题》一书,引起不少师生的兴趣。点几何有助于串联坐标、向量和复数,目前有待进入教学实践。

四是解决了有关微积分如何变容易的问题。我曾经教过微积分,做过把极限概念和实数理论变容易的努力,提出了较容易理解的定义极限的方法,发现了能简化实数理论的连续归纳法。后来有几种教材采用了这样的表达方法,并且有成功的教学实践案例。近几年,我在林群院士的带动激励下,在这个方向开展合作研究,获得了新的进展。我们发现,可以严谨地先引入微积分再讲极限,而且可以在学习微积分之前系统而简捷地解决通常认为用微积分才能解决的许多问题。我和林群院士合作出版了《减肥微积分》一书,所提出的新的微积分逻辑体系已经通过了Coq 机器检验,使得今后开展这方面的工作更有信心。目前也有待进一步开展教学实践。

五是探索如何将信息技术用于数学教学,使数学教学更为生动有趣。我们学习了美国的动态几何软件——几何画板,经过几年努力,推出了更为智能化的动态数学软件——超级画板,具有“写画测算编演推算”多种功能。2015 年以来,我组建专业的团队,将超级画板进一步发展成为基于互联网的网络画板,帮助师生更轻松地进行数学教学和数学实验。目前,网络画板注册用户已超过200 万,其中主要是数学教师。网络画板支持多种终端,无须安装,支持其他教学系统共享,支持资源共建共享,2020 年获四川省年度科技进步奖二等奖。

**赵维坤:**感谢您这么系统地梳理和总结,让我们对话题做一点发散和联系。您说过“数学能够让人感觉到解放”,指的是“数学里面无禁区”,但是,多数人可能感受不深。结合您的教育数学思想,我觉得“解放”也可从减轻学生负担的角度理解。那么,广大的一线教师应该如何从中受到启发,真正寻求到更有效的减负路径?

**张景中:**减轻负担是教育的一个重要议题。对数学教育来说,减轻负担最有效、最根本的一个方法,就是把数学本身变得更容易学。本来要花很多时间才能学会的内容,现在花很少时间就能学会。这就真正减轻学习负担了。

长期以来,我们在减负方面都存在一个误区,认为减负就是删繁就简。我认为,这不是真正的减负。繁难的知识可能也非常重要,不能简单删掉或死记硬背下来。在教育数学中,我提出化繁为简的理念,具体来说,就是提出更简洁的概念表述方式和解决问题的方法。

我们开展教育数学实验有十多年了,发现教育数学本身是可以减轻学生学习负担的。比如,一道中学数学题让学生学(解)起来比较难,因为怕加重学生的负担,就被列入“负面清单”了。可是,如果研究出新的方法,用小学的数学知识就可以轻松解决,那就不仅减轻了负担,而且能提高能力。也就是说,教育数学使学生本来不会的内容现在会了,本来要花很多时间才能学会的内容现在花很少时间就能学会。这就真正减轻了学生的学习负担。回顾40 多年教育数学走过的路,这也是在对数学本身进行加工、改造和研究,即改造数学知识体系,研究更优的解决方法,从数学里寻求更有效的减负增效的途径。

**赵维坤:**我想到,吴文俊先生说过“数学是笨人学的”,陈省身先生也表达过类似的意思。这是不是说数学学习无捷径?和您的教育数学思想有矛盾吗?这句话应该如何理解呢?

**张景中:**我来说说我对这句话的理解。一方面,正如吴文俊先生所说:“做研究不要自以为聪明,总是想些怪招,要实事求是,踏踏实实。功夫不到,哪里会有什么灵感?”这是指学数学需要缜密的思维和严谨的推理等看起来“不太活络”的能力,而且,不畏困难的执着精神有时也会给人比较“笨”的感觉。另一方面,有些领域要求某种天赋,例如歌唱、运动,数学则不然。有人问陈省身先生:为什么选择研究数学?他说:我动手能力差,做物理、化学实验都不行,只好做数学了。被誉为“数学王子”的高斯说:任何一个正常人,只要像我这样持续地思考,都能得出同样的结论。我理解的吴先生的意思和陈先生、高斯的说法是一致的。

同时,数学可以变简单。最经典、最重要的事往往是最简单的。“数学本身确实太难了”,关键不是教学方法的问题,而是从改造数学本身入手。研究如何把数学变简单,需要老老实实地做、脚踏实地地做。当然,也需要一些方法、路径,或者说,更重要的是一些原则、方向。那就是,观点高一些,往问题的本质上想;思想解放一些,不要被成见、套路束缚住;尤其不要把简单的问题复杂化,而要反其道而行。这是打开数学大门的钥匙。对数学家的已有成果,进行数学上的再创造,使之有更平易近人的数学概念、更简单的逻辑结构、更高效的解题方法,使之成为新的“经典”的教程,使之更适宜于教与学,其实就是教育数学在做的事。

**赵维坤:**您的思考对我很有启发,非常感谢!另外,我在学习您的教育数学思想时感觉到,“把数学变容易”最终指向“把数学解题变容易”。我想,这不难理解:数学解题难是数学学习难最直接、最根本的体现。对于数学解题,您在《走进教育数学》丛书的总序中提出过“中巧说”。也就是说,把数学问题分门别类,一类一类地寻求可以机械执行的方法,即算法。这一想法给我一种“恰到好处”的感觉:观点较高,看透问题本质,但不是大而无当,而是针对具体问题。您能再解释解释这一想法,以给一线教师的数学教学,尤其是解题教学更多的启示吗?

**张景中:**学数学当然要解题。而数学难学,特别是几何难学,主要也是学了知识之后仍不会解题。年复一年的考试不断产生花样翻新的题目,使学生接触到越来越多的自己不会的题目。如何教会学生解题呢?

一种方法是收集大量问题,分成类型,传授巧法和妙招,以备套用。我国近年出版的大量数学读物,属于此类。这样做教师省心,应付考试也有短期效果,所以颇受欢迎,流行不衰。

一种方法是强调基本知识和技能,关注一般的解题思考原则。这是数学家 G. 波利亚在他的一系列著作中所提倡的,也是许多数学家所赞成的。可惜曲高和寡,多数教师和学生难以掌握,实效不大。

我曾在新加坡和项武义教授讨论过这个问题。他把前一种方法叫作小巧,后一种方法叫作大巧。他主张教学生大巧,提倡灵活,“运用之妙,存乎一心”。但我以为,小巧一题一法,固不应提倡;大巧法无定法,也确实太难。吴文俊先生也指出过:“不能用数学家的要求来指导中小学数学教学。”要求学生掌握

大巧,是想让他们学会数学家的思维方法。这对绝大多数学生而言,不是几年内能做到的。而事实上,即使是数学家,在自己的专长领域之外,也未必敢说掌握了大巧。

我想,出路在于提倡“中巧”。所谓中巧,就是能有效地解决一类问题的算法或模式。它不像小巧那么呆板琐碎,又不像大巧那么法无定法。代数里的解方程、列方程解方程,分析里的求导数、用导数研究函数的增减凸凹,还有数学归纳法,均属中巧。长期以来,几何难学是因为几何里只有小巧、大巧,而没有中巧。我们则用面积法和消点法创造了几何解题的一类中巧,使初等几何方法从“四则运算杂题”的水平提高到代数方程的水平。

中巧要靠数学家研究创造出来,才能编入教材,教给学生。学生主要是学,而不是创,最多是在教师的指导下创(也就是弗赖登塔尔所说的“有指导的再创造”)。在学习过程中,体验数学的思想方法,锻炼逻辑推理的能力,或能部分地掌握大巧——至于小巧,学一点也好,但不足为法。小巧是零食,大巧是养生之道,中巧才是主食正餐。教育数学要研究有效而易学的解题方法,要提供中巧。

## 二、从计算机解几何题,到信息技术应用于数学教学

**赵维坤:**最后这个比喻非常生动贴切!我想,当下一线教师,尤其是中学数学教师,面对应试的压力以及核心素养的导向,尤其需要中巧这样的指导思想。现在,让我们专门来谈一谈您教育数学思想有关信息技术的方面,这也是您同时作为计算机科学家研究的重要方向。您把多年来在教育数学研究中发展的几何新方法用于机器证明,并提出了

消点思想,创建了几何定理可读证明自动生成的原理和方法。请您简单介绍一下几何定理的机器证明。

**张景中:**简单地说,机器证明就是用计算机来机械化地判定数学命题的真假,判定命题为真就是给出了证明。其实,机械化的思想早就蕴含在中国古代数学的应用中了。几何问题变化多,法无定法,技巧性强,如何找到机械化处理方法是一个具有挑战性的问题。吴文俊先生创造性地提出“吴方法”,将几何证明问题转换为多项式方程组的代数问题,对一大类等式型问题找到了高效率的判定算法。“吴方法”的成功让这个领域活跃起来,极大地推动了几何自动推理的研究。但是,代数法也有缺点,那就是计算过程比较复杂,人工很难检验其正确性并理解其几何意义。能不能让计算机生成较为直观、简单而容易理解、检验的解题过程,即所谓“可读的”解答?当时,国内外研究这个领域的专家认为是不可能的。

后来,我们将面积法改造成机械化算法消点法,并进一步发展成“几何不变量”方法,对相当大的一类几何问题可以用机器生成“可读的”解答。该方法可以推广拓展至非欧几何,获得了许多新定理,被国际同行誉为突破性的成果。

近年来,我们提出了“点几何”,这是一种以“点”为基本运算对象的新的几何理论体系,很多常见的几何命题用点几何表达,往往能得到仅有一两行长度的简单证明。彭翥成博士基于此发展了点几何恒等式机械化算法,取得了良好的效果。

**赵维坤:**那么,机器证明会给中小学数学教育带来哪些改变呢?

**张景中:**这方面的工作仅是开始,需要

更多的研究和教学实践。初步能想到的是,把机器证明的成果用于教育信息化,有助于减轻教师的负担,提高学生的兴趣。例如,用超级画板或网络画板,在屏幕上画一个任意三角形和三条高线,让计算机推一推这个图形里有什么几何性质。几秒钟后,计算机会显示出图中有几百条几何性质,例如四条线段的比例式就能列出上百条。分析讨论一下这些比例式是如何推出来的,可以分成几类,涉及哪些几何知识,就是很有趣的教学活动。如果没有自动推理软件,要组织这样的教学活动,教师要花的时间和精力要多得多。基于自动推理,还可以为研究者、教师和数学爱好者提供智能性几何解题电子词典,对两千多年来的初等几何做一个相对完美的总结。这一工作工程浩大,但如果做得好,将是对科学文化事业的重要贡献。在不久的将来,机器推理可以使数学教学场景更加智能化,如辅助教师出题、批改作业试卷等,将教师从耗时费力的机械性工作中解脱出来,从而可以更好地关注并引导学生学习。

**赵维坤:**您的介绍让我们看到了一个更加美好、值得期待的未来!现在是信息技术时代,信息技术的应用不断地渗透到各个领域。新课改以来,各版本的数学课程标准都专门提到了信息技术在数学教学中的应用。最新的《义务教育数学课程标准(2022年版)》又指出:“重视大数据、人工智能等对数学教学改革的推动作用,改进教学方式,促进学生学习方式转变。”这就要求教师充分利用信息技术丰富教学场景,激发学生学习数学的兴趣和探究新知的欲望。您能不能就这个话题给予一些指导?

**张景中:**教师应当利用信息技术深度挖

掘课程内容的精神实质,课程内容中蕴含的思想方法、探究性素材,课程内容间的内在联系等;利用信息技术对文本、图像、声音、动画等进行综合处理;注重信息技术与教学过程的深度融合,如组织好活动、落实好评价等。最终,达到丰富教学场景、激发学生学习兴趣和探究欲望的目的。

**赵维坤:**“利用数学专用软件等教学工具开展数学实验,将抽象的数学知识直观化,促进学生对数学概念的理解和数学知识的建构”,这是新课标的新要求。而网络画板是您创立的可广泛应用于数学教学的数学专用软件。请您谈谈中小学教师应该如何利用网络画板开展数学实验。

**张景中:**中小学教师在教学实践中用几次网络画板,就会亲身体验到这类动态数学软件在数学实验教学中的价值。动态几何图形有两个基本特点:图中的某些对象可以用鼠标拖动或用参数的变化直接驱动;其他没有被拖动或直接驱动的对象会自动调整其位置,以保持图形原来设定的几何性质。学生可以利用其动态作图、动态计算、动态测量以及编程功能来帮助自己理解概念,启迪思路,探索疑问,检验答案,用直观的动态图像表现抽象的定理公式。例如,自己定义函数并让计算机执行,有助于理解函数概念;通过作图测量、观察差商趋于微商(导数)的极限过程;等等。有些历史上著名的实验,例如蒲丰投针实验,做起来很花时间,可以用计算机模拟;有些数学事实,例如正弦级数收敛于矩形波,很难想象,可以作出动态图像来观察。基于动态几何的平台,能画、能算、能测、能动、能变,是实验探索得心应手的环境。除此之外,这样的平台,还可以用来模拟探索物理过程和其他有趣的自然现象,例如单摆、布朗运

动、多普勒效应、混沌与分形等。

网络画板的特点是:(1) 上网就能用,无须下载安装;(2) 适应于 Windows、苹果、安卓多种系统和手机、平板、电脑各种终端;(3) 支持多种资源形态,可无缝嵌入 Microsoft Office、WPS,离线断网也能用;(4) 支持丰富的教学模式,适应多样化的教学环境;(5) 是开放性的平台,可以与多种教学系统有机整合,目前已经融入希沃、科大讯飞、天喻信息、腾讯教育、联想、立思辰、华渔、欧帝等多家教育服务产品;(6) 汇聚丰富资源,共建共享统一管理,按教学需求组织,用起来很方便。几年来,不少老师用网络画板创作了大量教学资源,供选择使用。例如,进入网络画板网站可以看到,一位老师的原创作品已有 6000 多条,100 条以上的有 400 多位老师,50 条以上的有 1186 位老师,等等。这些作品还可以按区域、学校分类查阅,对于了解各地各校数学教学情形,相互交流,很有参考价值。

**赵维坤:**感谢您这么详细的介绍!最后,想问两个比较大的问题。作为数学家,同时也是计算机科学家,在您看来,数学在增强国家科技创新能力方面有着怎样的作用?

**张景中:**增强国家数学实力,要重视数学的基础研究,重视数学教育和科学普及。数学作为一门基础学科,是学习其他学科的重要前提。学好数学对于培养探索精神、思维的严密性、求真的执着精神等都有重要意义。科技创新和数学的关系非常密切。科技创新研究的方法主要表现为逻辑推理、实验观察

和计算,而这三种方法都需要数学做基础。逻辑以推理和演绎为特征,需要严谨的数学知识做支撑;实验以观察和总结自然规律为特征,涉及数据的记录和分析,也不能没有数学知识;至于计算,更是数学的领地。简而言之,数学为科学探究提供了简洁的语言、分析的方法与计算的工具。没有良好的数学基础,想要拥有良好的科学素养和科学精神是不可能的。

**赵维坤:**在数学人才培养方面,您有什么建言?

**张景中:**我想,思想要再解放一些,教学方法和教材要更多地鼓励创新和多样化;要关注不同能力层次的孩子,鼓励课外阅读、数学编程,为基础不同的学生提供多样化的学习机会。中小学数学教学需要完善和加强的方面,最重要的是教材的提炼提升,以及教育信息技术的普及深入,这也是教育数学努力的方向。

(**张景中**,广州大学计算科技研究院名誉院长。中国科学院院士,全国优秀教师。主要从事机器证明、距离几何、动力系统及教育数学方面的研究。2021年,被中国计算机学会(CCF)奖励委员会授予“CCF终身成就奖”。**赵维坤**,江苏省盐城市毓龙路实验学校,特级教师,正高级教师。中国教育学会中学数学专业委员会理事、学术委员。苏科版初中数学教材核心编写人员。曾获国家教学成果奖二等奖,江苏省教学成果奖特等奖。)