

张景中：重聚未名湖

(此文系 2004 年张景中院士写于北京大学数学力学系 54 级入学 50 周年聚会之际)

(一) 相逢未名湖

1954 年 9 月，从河南的一个县城汝南，来到未名湖畔。

那一年，北大数学力学系一年级新生 220 多人，从全国各地汇聚于未名湖畔。

当时是 9 个小班，我在 5 班。

五十年代，很重视基础课程。程民德教授讲微积分，江泽涵教授讲解析几何，周培源教授讲过普通物理，由美国归来力学家王仁教授讲理论力学。课程份量很轻，学生有充分时间阅读、思考和讨论。

在学习函数的微分法时，《数学学报》上发表了一个用十进小数构造“处处连续但处处不可微函数”的初等例子。可惜错了。大家试图补救这个例子。我想了用二进制小数构造它的主意，和 4 班杨九高(杨路当时的名字)一起给出论证。程民德教授高兴地安排了一次学生科学报告会，叫我们讲这个例子。例子后来发表在武汉的《数学通讯》杂志上。这是杨和我近半个世纪合作的开端。

想得多但读得还少，是我的弱点。大一时，在解析几何教科书上看到函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的连续解只有 $f(x)=cx$ 。想到一个确定它全部解的方法，写成论文，居然顺利地在《数学进展》刊出。没有高兴多久，编辑部来信了，说读者来函问：关于这结果，前人有哪些工作？并指出：研究者在发表自己的成果之前，应当了解别人已经做出了什么，才是负责的态度。费了九牛二虎之力，终于伤心地发现：早在 1920 年，德国的哈默尔已经做了这个工作。只好复信致歉。后来邵品琮告诉我，这“读者”竟是华罗庚先生。他是《数学进展》的主编，但刊物是他在出版后才看到的。让编辑部给作者写信，用意是促使作者明白科学的研究的入门规矩。邵是华公的弟子，对此事知之甚详。

北大数学系学生课外学术活动当时很活跃。我参加了丁石孙先生所指导的代数课外小组。先是研究矩阵的无穷乘积，后来又对函数的迭代问题产生了很大兴趣。有些结果直到二十年后才发表。年轻人兴趣广泛，爱下象棋，打乒乓球，还参加了北大诗社。

在 1956 年夏，系里试行“免修”制度：自学某门课并在开课前考得优良成绩者可以免修。我免了实变和复变，时间更充裕了。老师们告诉我，不要把时间都用来做题目，要多读书多看文献打下雄厚的基础。回想那时，可真是黄金时代。但是，1957 年到来，一切都变了。

(二) 告别未名湖

许多人说，从 1957 年，中国进入了一个多灾多难的时期。对我也是如此，命运突变。1958 年二月被开除学籍，劳动教养，告别了未名湖。

四十年后，出版了一本由牛汉、邓九平主编的文集《原上草》，主要篇幅是 1957 年北大学生中的“右派”言论。现在回头看看，大多不过是常识的见解而已。

在半步桥收容所经过半月“学习”，被火车运到天津附近的茶淀站，分配到清河农场劳动。这里属于北京市公安系统劳改机构，有许多分场。1958 年新建了几个劳动教养分场。我先到于家岭西村，后来又到了 584 分场、化肥厂、于家岭东村等单位。

大跃进年代，劳教农场里劳动之紧张沉重不难想见。白天劳动，晚上开会。我随身有几本书，其中《数论基础》是最常翻看的。里面有许多好习题，忙里偷闲记个在心里，上下工的路上或开会时就够想一阵子了。有时在路上不想题，边

走边下盲棋，对锻炼记忆力很有好处，也有助于形成不用纸笔想问题的习惯。

在农场里，种过小麦、水稻，在土化肥厂里烧过石灰、做过盐酸。干的最多的是挖泥和抬土。

经历了三年自然灾害的严酷磨练后，于1962年解除了劳动教养，留在农场当“就业人员”。最好的一段时光，是调到了农场的航运队，乘船沿金钟河来往于天津和清河农场之间。从天津运回垃圾当肥料，又把农场生产的葡萄运到天津，比在大田劳动宽松得多。有更多的时间看书、思考，甚至有一些研究成果成文投稿。后来才知道，右派分子的文章是发表不出来的。

杨路还没有解除劳动教养，但也调到了条件较好的北京团河农场。我们常常通信交流心得，这是一种精神上的享受。主要是讨论是几何算法和函数迭代，其中很多和国外做重了，也有不少在二十年后才发表。

关于逐段单调连续函数迭代根存在性的研究，是这几年中完成的。这涉及函数方程领域一个老问题。对非单调函数，即使是对单峰连续函数，迭代根的存在条件也长期未得到答案。我们对一般的逐段单调连续函数，给出了存在任意次连续迭代根的容易检验的充要条件。在《数学学报》发表。并引起了后续研究。

关于几何算法，杨路提出：通过点与点的距离关系，不建立坐标系而直接研究几何图形的性质。这实际上重复了西方数学家对距离几何的基本工作，并走得更远，建立了高维几何度量的一般方程。这方面的工作在国内外学术期刊和国际会议文集上被引用近400篇次。英文专著《几何不等式的最近进展》(Recent Advance in Geometry Inequalities)中，引用二十多篇，其中有些是整段摘录。《几何不等式在中国》(文集)一书中，关于高维几何的论文，几乎每篇都引用了我们的工作。这些工作的基础，大体上是在农场劳动的几年中形成的。

三十年后，基于当年建立的几何算法和我提出的新思路，解决了预给度量的初等图形（由有限个点、超平面和超球组成的图形）在欧氏空间嵌入条件的问题。对这一工作，美国著名离散数学家和计算机科学家 L. Kelly 评论说（《数学评论》，96e:52013）：

“这是一个正在发展中的纲领的一章。这个纲领肇始于维也纳的 Menger 和中国的吴文俊，在西方由 Blumenthal 及其学派，在东方则由杨、张等所推进。……除了理论和基础的意义和重要性之外，该纲领的倡导者并顾及其在计算机辅助几何推理、定理机器证明、近似数据嵌入等各不同领域的应用。”

在这段时间内，读了一些能找到的数学书。在辛钦所写的关于排队论的小册子里，看到一个多年未解决的“埃尔兰问题”，花了半年中的星期天把它做出来了。但是，辛钦在两年前已经解决了。这类重复性劳动做了不少。

好景不长，文化大革命来了。和杨路的通信被管教人员视为反改造活动被迫中止。

我和许多“就业人员”一起，1966 年 8 月集体调往新疆生产建设兵团。

（三）西域十三年

这支从北京的几个农场集中起来的队伍，组成了新疆生产建设兵团工二师的一个工程支队。任务是修一条从库尔勒到若羌的公路，全长四百公里。

挖土、抬土、浇灌水泥，制砖，建桥铺路。

真正没有可能看数学了。劳动之外，除了吃饭、睡觉，就是开会和读“红宝书”。因为是“五类分子”，星期天还要加班劳动，打扫厕所、砍柴。

但思想总是自由的。开会学习的时候，可以想自己爱想的一切。

路修了五年，1971 年完工。工程支队各连分别调到兵团农二师各团场。我所

在的七连到了巴州 21 团场。它位于库尔勒地区焉耆县，土地平整，林带茂盛，在南疆算是相当不错的农场了。我们连定名为基建连，任务是房建和农田水利工程。

林彪垮台前不久，摘了右派帽子。虽然仍是“摘帽右派”，毕竟和没摘帽的有不同，有了更多的生活空间，有了更多做数学的时间和自由。我找到了杨路的下落，中止六年的学术通讯恢复了。这时他已被调到四川大邑的新源煤矿劳动，解除了教养但未摘帽，仍是被公安部门监管的就业人员。信件由杨路的妻子张锡铮传递，大多是讨论几何算法的，是八十年代发表的许多论文的基本内容。

在坎坷的命运之路上，常常得到好人的帮助。在这些人中，不能不说郭秀华。

郭秀华是中学同学，这时恰好在 21 团组织部工作。翻阅人员档案时，意外地发现了阔别多年的老同学的材料。在一个星期天，他毅然打破了“革命干部”和“就业人员”的界限，到基建连去找我。

四届人大提出的“四个现代化”，在一定程度上冲淡了极左的气氛。郭秀华抓住这略有宽松的大气候提供的时机，借助自己在组织部工作的有利地位，促成团里作出决定：调我到团场的子女中学当代课教师。尽管学校领导提出异议，抵制摘帽右派来到这培养接班人的地方，使此事拖了一年，最后还是实现了。1974 年 4 月，我走上 21 团子女中学初二年级讲台讲平面几何。

这是十六年来梦寐以求的命运转折点。

在教学中，痛感传统的几何解题方法过于依赖技巧，难于为学生掌握，开始探索新的更有效的方法。很快发现，用面积关系解几何题目非常有效，并且容易掌握。我对这种技巧作了深入的研究，把它从特殊技巧初步发展成一般方法。向

学校领导提出了教材改革的建议。当然，这个建议没有得到采纳。

面积法引出了教育数学的研究，并导致十八年后几何定理可读证明自动生成新方法的出现。

但当时这却帮不了忙。由于主张加强基础知识教学，我在“反击右倾翻案风”运动中理所当然地受到了批判。结果被清出学校，回基建连劳动。

在挖河的工地上，传来了揪出四人帮的消息。一起劳动的一位记者老李悄悄告诉我：中国的命运改变了。

我们想到，和国家人民一起，自己的命运也会改变。

几年后我在北京参加学术会议，和这位记者老李相遇时，他已经是《瞭望》杂志的一位主任编辑。

根据杂志上一篇文章的作者署名和单位，我和校友洪家威取得了联系。由于洪的推荐，广东肇庆师范学院来函向 21 团商调我。团里不肯放，再次调我到子女中学。

这是 1978 年，离开未名湖二十年了。

(四) 科学的春天

1978 年，春江水暖鸭先知。

春的信息之一，是能够发表论文。

这是一篇小文章。华罗庚在一本书中，讲过巴芒 (BAYMN, 苏) 计算台形体积的公式。这公式不便计算，并且对简单形体不能给出准确值。我提出了另一个消除了这些缺点的公式，文章发表在《数学的实践与认识》上。

编辑部给团政治部发函询问，如何署名？经领导慎重研究，最后决定署名为“新疆巴州 21 团子女中学数学教研室”。

无论如何，总是发表了。

后来又在《计算数学》发表一篇，署名井中。

科学大会的召开带来了科学的春天。中国科技大学的领导棋早一步，千方百计网罗人才。当时，北大同学熊金城、赵立人和老师陶懋颐都在科大数学系。他们在寻访我的下落。熊从洪家威处知道我在新疆，几位校友的热诚推荐，科大一封电报，邀我到合肥学术交流。

这也就找到了杨路。另一封电报到了四川大邑新源煤矿。1978年12月，我们二十年来第一次在大学校园里相会。

陶懋颐先生带着调函飞往新疆首府乌鲁木齐，拿到必要的文件，乘汽车长途跋涉到南疆的库尔勒，直到最基层的21团，才取到了我的档案。这一行，同时还办成了北大校友任宏硕的调动手续。任后来是中国科学院数学所的研究员。陶先生为挤车被踩伤了脚，回来后因劳累过度病了一场。

恩师陶懋颐先生的热诚帮助终生铭记。五十年代，他讲数理方程，还辅导过我们的体育活动。在大家心目中，陶先生是一位德智体美劳全面发展的青年师长，是学习的榜样。他在1957年被错划为右派后，调到内蒙古大学，又被迫离开讲台喂猪。陶先生正直、热情，勇于坚持真理，乐于助人，教学科研极为勤奋，硕果累累。他不管在哪里工作，都得到同事和学生们的信任和爱戴。1997年秋，陶懋颐先生终因积劳成疾患不治之症。学生和朋友们，包括我全家，从全国各地来看他。他的逝世是我成年后经历过的最大的悲痛。

1979年这一年，科大接收我为讲师，北京大学对我的右派问题给以改正。科大工作六年。教数学系、少年班的微积分。为了克服微分学入门的难点，提出了非 ε 语言的极限定义方法，以及连续归纳法。基于这些工作和1974年提出

的面积方法，形成了教育数学思想的基础：应当改造现有的数学方法中与教育规律不相适应的部分。这构成了《从数学教育到教育数学》（1989年出版）一书的主要内容。

我赞同这样的看法：数学不仅是科学和技术，也是文化。文化的延续和发展需要大众的理解和参与，因而数学教育和数学科普的重要性不亚于数学研究。

出于这种想法，我花了大量的时间和精力从事科普。为少年儿童写《数学传奇》是第一本。为青年读者所写的《数学家的眼光》和《数学与哲学》，受到较广泛的好评。陈省身先生给我一封信中，对《数学家的眼光》表示了赞赏，建议译成英文。这些书都以繁体字重版。

这六年，自己以及和杨路等合写了几十篇（部），似乎饥不择食。所作的问题除了几何算法（距离几何）和动力系统中的泛函方程外，还涉及数值分析、组合几何、计算几何和非线性振动等多个领域。例如，方程求根的一个迭代算法，只用 $N+1$ 个息却达到了 $2N$ 阶的收敛速度，这在同类算法中是计算效能最高的。又如，和常庚哲合作，解决了计算几何领域多年未有答案的“单形上伯恩斯坦多项式单调性逆命题”是否成立的问题，等等。

敝帚自珍，最喜爱的是生锈圆规作图问题。在尺规作图、单规作图以及直尺作图的问题被数学家们逐步解决之后，这个领域已经沉寂了一百多年。其实，有一个问题大家知之甚少：只用一个固定半径的圆规能作出哪些几何图形？这问题早在达芬奇时代就提出来了。

美国著名几何学家佩多（D. Pedoe）重提这一问题，在国际期刊上公开征解：已知两点 A、B，能否只用一支生锈的圆规（即固定半径的圆规）找出点 C，使 ABC 成正三角形？

几年无人给出解答。我和杨路知道这一问题后，很快找到了两种解法。佩多大为赞赏，在一篇文章中说这是使他最兴奋的数学经验之一。但又提出：已知两点 A、B，能否只用一支生锈的圆规找出线段 AB 的中点（线段是没画出来的）？国外有本关于限制规尺作图的书中曾断言：这是不可能的。但没有证明。

一位名叫侯晓荣的年青人加入了研究的行列。他推广了我的想法，使中点作图问题得以解决。进一步，我们得到了意外完美的结果：从已知两点出发，凡是用尺规作图能作出的点，只用一把生锈的圆规也能作出。这工作先在国内用科普形式发表，后又在国际期刊《几何学报》刊登。审稿评论称：“这结果如此惊人，如此重要，其方法又引人入胜，我无条件推荐它发表。”

佩多对此印象极深。以至在《美国数学月刊》上的一篇评论文章中谬奖“杨和张是中国几何学界的阿尔法和欧米伽”。

自己感到，工作失之宽泛。应集中精力，选定主方向，才能做出好的工作。

(五) 学习和探索

1985 年，和杨路同时调往中国科学院成都数理科学研究所。次年，同时被聘为中国科学院研究员，任研究室正副主任。

我们逐步转入机器证明的新领域。

这一领域早就吸引着我。那是在 1955 年，丁石孙先生讲高等代数时提到了塔斯基 (Tarski) 的一个新成果：一切初等几何和初等代数的命题都是可判定的，也就是说：可以用机械的方法，解决初等几何和初等代数领域的任何命题是否成立的问题。

初等几何的问题千变万化，怎么可能用机械的办法一举而解决？妙不可言，深不可测！于是我选择了数理逻辑专门化作为自己的方向，希望弄清其底蕴。但

只跟着胡世华先生学了半年多，就被捉去了。

1979 年到科大，从《中国科学》上看到了吴文俊先生提出几何定理机器证明新方法的论文。这一突破性工作对我有莫大的吸引力，就开始向这一方向学习、思考，创造进入这一领域的基础条件。

也是在吴文俊先生影响下，洪家威提出一个例子就能证明一条几何定理的思想。1984 年，我和洪家威讨论了这个问题。我认为用一组例子比一个例子更容易实现。两年后，我和杨路提出了机器证明的数值并行法。传统的观点认为，要证明一个几何命题，举多少例子也不行，必须用演绎推理的方法。其实，用有限个数值实例，也可以严格证明几何定理。洪家威用一个例子证明几何定理的结果很有趣，可惜方法太复杂，难于实现。我们用一组例子证明几何定理的数值并行法，很快就由我的研究生李传中用 BASIC 语言和 C 语言实现了。这软件可以在无硬盘的低档微机上，在数以秒计的时间内证明非平凡的几何定理。方法的基本思想是：用数值计算代替符号计算以提高运行速度，用并行计算以代替串行计算以减少内存消耗。

由于吴文俊先生和廖山涛先生的推荐，我于 1989 年到意大利底里亚斯特的理论物理中心（ICTP）访问近一年。在意大利、新加坡、泰国和香港的一些大学里讲了几何定理机器证明的数值方法，均引起很大的兴趣。利用 ICTP 的计算机设备条件，我对机器证明的代数方法，作了进一步的探讨。基于我提出的想法，和杨路以及他们的学生侯晓荣一起，对吴文俊先生倡导的机器证明的特征列方法作了一系列的改进和发展。

在几何定理机器证明的吴法取得公认的成功后，这一领域面临两个有待突破的难题：一个是几何不等式的机器证明问题；另一个是如何让机器生成易于理解

和检验的证明的问题。我特别关注的是后一问题，即可读证明的自动生成问题。事实上，直到 1992 年初，所有有效的几何定理机器证明的方法都只能判定命题是否成立，而不能给出通常意义下的证明，即人在合理的时间内能看明白，能检验其正确性的证明。在有些著名的科学家看来，让计算机用统一的方法对千变万化的几何命题给出可读的证明是不可能的。但是，如果不突破这一关，几何定理机器证明就难以在教育中发挥作用，难以得到大众的理解，难以在人类文化的发展中扮演更重要的角色。

1992 年五月，应周咸青博士的邀请，我到了美国维奇塔大学。我提出了一个想法：在面积方法的基础上，探索几何定理可读证明自动生成的新途径。周咸青问：面积方法不是算法，怎么用于机器证明？经过一个不眠之夜，我从面积方法解题的大量经验中提炼出对这一要害问题的回答：消点。

按传统的几何解题思路，题目做不出时就往图上加点什么。消点法却相反，要从图上去掉些东西，使图逐步简化，直到水落石出。代数方法也是立足于消，消去变元。但在消去之前还是要添上坐标。消点法却要就地消去，不添什么。这是难点。我提出的面积方法的基本工具共边定理，恰好能搬掉这块石头！

第二天早晨，我用基于面积关系的消点法机械地证明了两个几何命题，回答了周咸青的疑问。我们决定沿这一路线研究。周咸青建议我学 LISP 语言，开始试编新方法的程序。他就到北京探亲开会去了。一个多月后，周从中国回来，新编的程序已经证明了近百条定理。

这年七月，高小山博士也来到维奇塔大学，投入这一课题的研究行列。高是吴文俊先生的弟子，在机器证明领域已有不少好的工作，并且是编程能手。他的加入使工作进程更快了。我进一步提出用更多的几何工具如勾股差、全角来加强

消点法。高小山则提出用体积关系把消点法推广到立体几何。

不久，基于杨路提出的想法，我们又把消点法用于非欧几何，在计算机上生成一批非欧几何新定理的可读证明。我们进一步发展了基于前推搜索的逻辑方法，使这一方法达到实用阶段。

从 1996 年，我的主要兴趣转向于数学教育和智能教育软件。

能在不断的学习和探索中度过后半生，是我的愿望。

（六）重聚未名湖

2004 年，北大数学力学系 54 级校友重聚未名湖畔。

半个世纪过去了。当年那些“以天下为己任”的少年书生，多已成为退休赋闲的老人。

大家在一起回忆共同的记忆，分享不同的经历，怀念故去的同窗，互道珍重夕阳红。

经历了多年的风风雨雨，校友们大都以平和冷静的心态看待过去和现在的一切。

国家和社会的有了大的变化，有了令人欣慰的进步。

50 年来，我们根据各自的看法和处境，做了自己想做的或不得不做的事，为社会的变化起到了自己预期的或没有料到的作用。

世界上有太多的事还应当做，但留给我们做的不会很多。

敬爱的几位老师欣然参加了聚会，语重心长地要大家以平常心安度晚年，保重健康。

回顾这一切，就像已经读到了一部小说的最后几页，我们无法改写故事的情节，但已经了解自己的经历了。