开展数字化探究活动深化数学概念理解

——以反比例函数曲线下的面积与自然对数为例

文 | 张景中

摘要： 高中数学是初等数学向高等数学的过渡。高中数学中不少知识内容涉及一些尚未严密界定的概念，或者尚未得到严谨推证的规律。在数字化教学探究活动中，教师如能选择适当的主题，设计针对问题关键的动态图象，将抽象的概念与具体生动的画面密切挂钩，讲解学生熟知的事实背后的道理，能启发引导学生兴致勃勃地理解他们原来以为颇为神秘的符号、术语，为他们进入高等数学的新天地做些准备。从初中反比例函数到高中圆锥曲线与幂函数，教师可借助具有动态数学功能的软件，设置真实问题情境，以形助数，让学生直观探究曲线下的面积大小关系，进而水到渠成地推理论证自然对数表征的是反比例函数曲线下的面积，简明直观理解常数 e 的极限意义。这样教学才能抓住数学本质，将技术工具运用到位，促进学生思维能力不断进阶。

关键词： 数字化探究；数形结合；概念理解；反比例函数曲线；自然对数

高中生对反比例函数及其图象并不陌生，在初中就学过。教师从这熟悉的图象中提出一个新问题，即“直观而具体的两块面积是否相等”，这自然会引起学生兴趣。教师利用面积计算的结果，导出“化乘为加”的对数性质，解开了学生对“自然对数”的迷惑；进一步引出数学中最重要的常数之一，即自然对数的底 e，并且用简单的面积比较就得到了 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 和 e 之差的估计。教师设计层层递进的探究活动，步步深入，可引导学生思考、回味。数字化探究活动的明显特点是生动直观。教师将生动表象与相关的深入逻辑思考联系起来，会获得引人入胜的教学效果。

一、利用可调整的动态网格，为学生提供探究工具和支架

平凡现象背后，常常隐藏着重要的奥秘。这是数学的迷人之处。学生在初中阶段已经学了反比例函数，熟悉了它的图象，高中阶段又进一步了解到它是负指数幂的幂函数，它的图象是圆锥曲线的一种。如果进一步探究，还能挖掘出更有趣的情节。

图 1 是学生熟悉的反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的曲线，阴影部分表示区间 [1，4] 上曲线和 x 轴之间的面积。如果要将 [1，4] 分成两部分，使得对应的两块面积相等，应该从哪里分呢？

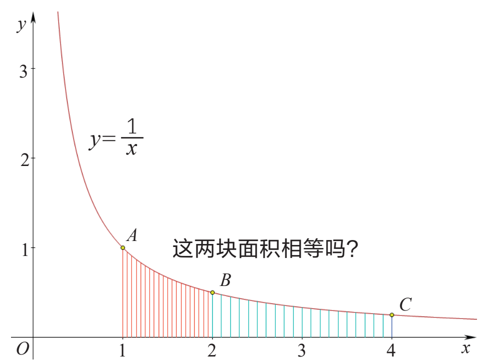

图 1　反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的曲线

教师指导学生使用具有动态数学功能的软件作图，在图上做分割和动态测量。学生很快发现区间 [1，2] 和 [2，4] 上的两块面积几乎相等。

但是，测量的数据总是近似的，准确的结论需要推理论证。

推理的基本思路常常来自直观的启示。如图 2 所示，用边长为 1 的正方形网格覆盖区间 [1，2] 上的那块面积，将这个正方形网格高度压缩一半，

宽度扩大一倍，成为一个矩形网格，覆盖区间 $[2,4]$ 上的那块面积。

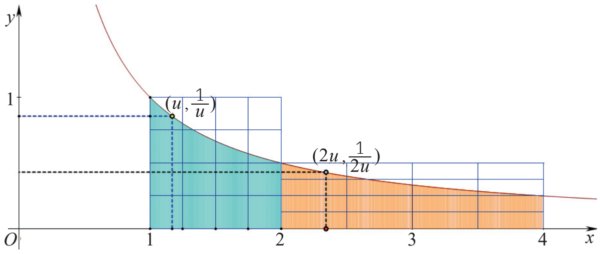

图 2　探究曲线下面积的大小关系

学生借助软件进行这种“水平放大，垂直压缩”的变换，保持每个小网格的面积不变，曲线上的点关于网格的相对位置不变，曲线下的面积应当不变！

是不是这两块面积一定要连在一起呢？不是的！

如图3所示，左边的长方形高为1，宽为 $a-1$，右边的长方形高为 $\frac{1}{k}$，宽为 $k(a-1)$，两个长方形面积相等。曲线 $y=\frac{1}{x}$ 下面在区间 $[1,a]$ 上的面积和在区间 $[k,ka]$ 上的面积应当一样大。这里 $a>1$，而 k 是任意正数。

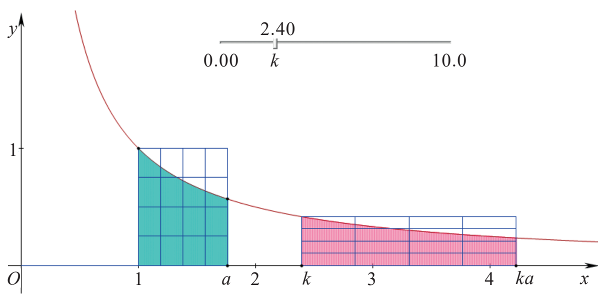

图 3　两个长方形面积相等的情形

这样的直观观察不能代替严密的推理，但可以启发学生进行严密的分析论证。

二、直观呈现抽象问题，为学生逻辑推理指引方向

为了讨论起来方便，将区间 $[1,x]$ 上面反比例函数曲线下的面积记作 $L(x)$，则图 3 中青色阴影部分的面积为 $L(a)$，红色阴影部分的面积为 $L(ka)-L(k)$，我们需要证明等式 $L(a)=L(ka)-L(k)$，即 $L(ka)=L(k)+L(a)$。

如图 4 所示，教师让学生将两块面积都分成宽度相等的 10 条，分别估计。

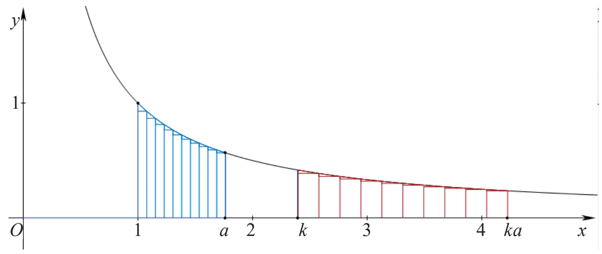

图 4　等宽切分面积进行分析

每条都可以分成两部分，主要部分是矩形长条，附加部分是矩形上面的斜边为一条曲线的直角三角形，简称曲边三角形。

能够看出来吗？左边的 10 条瘦高矩形和右边的 10 条胖矮矩形面积顺次对应相等。

下面，选取图 4 中两个区块的各自第 3 条进行分析：

左边，宽为 $\frac{a-1}{10}$，高为 $\left(1+\frac{3(a-1)}{10}\right)^{-1}=\frac{10}{7+3a}$，面积为 $\frac{a-1}{7+3a}$；

右边，宽为 $\frac{k(a-1)}{10}$，高为 $\left(k+\frac{3k(a-1)}{10}\right)^{-1}=\frac{10}{7k+3ka}$，面积为 $\frac{a-1}{7+3a}$。

道理明显：宽乘 k，高除以 k，面积不变。

可见，两块面积的差不超过左边或右边矩形顶上 10 个曲边三角形面积的总和。粗略地估计一下，这总和不超过 $\frac{a-1}{10}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{(a-1)^2}{10a}$。

如果都分成 n 条，如法处理，可知两块面积的差小于 $\frac{(a-1)^2}{na}$。于是可以证明：

$$|L(a)-(L(ka)-L(k))|<\frac{(a-1)^2}{na}。$$

但是，我们的目的是证明 $L(a)=L(ka)-L(k)$，无论 n 多大，不是也达不到这个目的吗？是不是还要引入极限的理论和方法呢？

其实古希腊人早就有了解决这类问题的方法。他们没用极限概念，而是用反证法：先假设

$L(a)=L(ka)-L(k)$ 不真，于是有：

$$|L(a)-(L(ka)-L(k))|=w>0,$$

取 $n>\frac{2(a-1)^2}{wa}$，按前面的推理就有 $w=|L(a)-(L(ka)-L(k))|<\frac{(a-1)^2}{na}<\frac{w}{2}$，这样推导出 $2<1$，矛盾！反证法的假设错误，即 $L(a)=L(ka)-L(k)$。

这种论证方法被古人称为“穷竭法”，阿基米德用这种方法计算出抛物线拱形的面积及若干几何体的体积。它和极限方法略有不同，不需要让 n 趋于无穷，只要它比某个指定的数大就行。

从 $L(a)=L(ka)-L(k)$ 得出 $L(ka)=L(k)+L(a)$，可见函数 $L(x)$ 能够使乘法化为加法，它被称为自然对数，记作 $\ln(x)=L(x)$，这里 $x>0$。

原来自然对数并不神秘，它不过是我们早已熟悉的反比例函数曲线和 x轴之间的一块面积。

三、以形助数，助力学生理解数学概念本质

用对数简化计算，离不开对数函数的反函数。自然对数 $\ln(x)$ 的反函数记作 $\exp(x)$，对任意实数 x 有 $\ln(\exp(x))=x$，并且对任意正数则有 $\exp(\ln(x))=x$。用上面推出的基本等式 $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ 可以推出这两个函数的一系列性质。如：

$$\exp(a+b)=\exp(\ln(\exp(a))+\ln(\exp(b)))=\exp(\ln(\exp(a)\exp(b)))=\exp(a)\exp(b),$$

由此推出 $\exp(2)=\exp(1)^2$，以至于 $\exp(n)=\exp(1)^n$。如果将 $\exp(1)$ 简单地记作 e，就有 $\exp(n)=e^n$，推而广之，就有了常用的记号 $\exp(x)=e^x$。

那么，e 有什么直观的意义呢？从等式 $\ln(e)=\ln(\exp(1))=1$ 可知，在区间 $[1,e]$ 上反比例函数曲线下的面积恰等于 1（如图 5）。学生在中学阶段接触这个常数 e，其实上面就是高等数学对 e 的最简单明了的说明。众多谈论常数 e 的文献，往往漏掉了这条最基本的简明的性质。从这条基本性质出发，学生容易推出常数 e 是 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 当 n 趋于无穷时的极限。下面展示一下推导的逻辑途径。

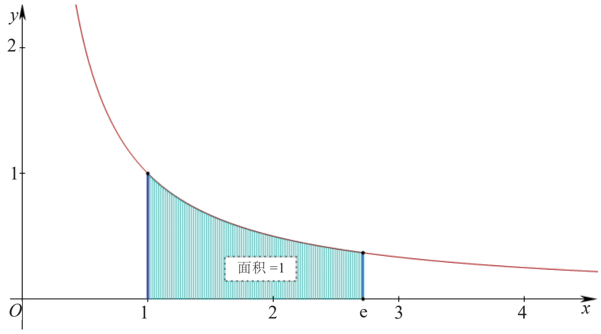

图 5　反比例函数曲线下的面积恰等于 1 的情形

图 5 展示的是区间 $[1,e]$ 上反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 曲线下的面积。如果是在区间 $[a,b]$ 上，这块面积的大小就是 $\ln(b)-\ln(a)$，立刻得到它的基本估计 $\frac{1}{b}<\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$；如果取 $a=1$ 和 $b=1+\frac{1}{n}$，就得到不等式 $\frac{n}{n+1}<n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$，注意到有 $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\left(e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，不等式同取指数就得到 $e^{\frac{n}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，从而有 $0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e-e^{\frac{n}{n+1}}$，为了对此不等式右端进行更清楚的估计，将基本估计前半 $\frac{1}{b}<\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$ 略加变形写成 $1-\frac{a}{b}<\ln(b)-\ln(a)$，取 $a=e^{\frac{n}{n+1}}$ 和 $b=e$，立刻得 $1-e^{\frac{-1}{n+1}}<\frac{1}{n+1}$，两端乘 e 便得 $e-e^{\frac{n}{n+1}}<\frac{e}{n+1}$，于是有：

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{e}{n+1}。$$

由此，学生不但立刻看出当 n 趋于无穷时 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 以 e 为极限，还对误差有准确的估计。这比起常见的有关论述简明多了。

在很多数学教材中，都是先讲指数，再讲对数。讲自然对数，就先讲 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限。对此，著名数学家和数学教育家克莱因在他的著作《高观点下的初等数学》（舒湘芹等译，复旦大学出版社 1989 年出版）第一卷中，提出了不同的看法。例如，该书 165 页有如下论述：

“你们都知道，自然对数系统的底是数

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\ 281\ 8\cdots,$$

e 的这个定义，通常都放在大部头的分析教科书的最开始处……而丝毫不讲它的来由，这样就丢掉了真正有价值的、能促进（学生）理解的部分，即不解释为什么恰好用这样特别的极限做底，为什么由此导出的对数称为自然对数。”

克莱因在该书 169 页，画出了反比例函数曲线并说明：“如果用介于 $\xi=1$ 与 $\xi=x$ 之间的双曲线下的面积……立即就得出自然对数……历史的道路实际上就是如此。”“如果希望用自然对数的这个定义作为出发点，当然必须说明它具有将对数的乘法变为对数的加法这个基本性质……”

笔者前面借助信息技术进行浅显有趣的操作正是为了表达上述观点。

克莱因在该书 175 页指出：“通过求双曲线下面积而引出对数，其方法与其他任何数学方法一样严格，但其简单和清晰的程度则超过了其他方法。”“这个现代的发展在中学数学教学中几乎没有一点反映就被绕过去了，我经常提到这是一个罪过。”在 176 和 177 页他做了如下总结：“我愿意把我在中学里如何简单而自然地介绍对数的方案再概述一遍。第一个原则是求已知函数的积分而导出新的函数，这是适当的出发点。我已经说过，这不仅符合历史情况，也与高等数学中……的处理相一致。遵循这个原则，可以从双曲线 $\eta=\frac{1}{\xi}$ 出发，将 x 的对数定义为在此曲线下介于坐标 $\xi=1$ 和 $\xi=x$ 之间的面积。”

“我非常希望有人把这个方案拿到中学里去试一试。当然，如何具体实施，还得请有经验的中学教师来决定。”

克莱因的这些看法值得教师关注、思考和尝试。

笔者希望教师对这些问题发表意见，也希望教师在教学中合理设置问题，引导学生在信息技术的加持下，动手操作，经历从直观感受到理性推理论证的思考过程，提升学生的思维能力。期待广大师生检验克莱因的观点，得出自己的结论。信息技术赋能数学教学，可以使复杂的问题简单化、枯燥的问题趣味化。教师要善用技术，引导学生从感性的直观探究深入理性的推理论证，逐步深化对概念的理解，取得事半功倍的效果。

（作者系中国科学院院士）

责任编辑：祝元志