巧用网络画板 探究动点轨迹问题

—— 以 2023 广州中考模拟试题中的动点问题为例

广东省广州市番禺区市桥沙头中学 (511400) 陈 琴

摘要 几何直观是初中阶段核心素养的表现之一, 是学生应具备的素养之一. 教师针对学生在学习动态问题中难点, 利用网络画板辅助展示动态画面, 给于学生启示, 帮助学生更透彻的理解题目和探究解决问题的路径.

关键词 网络画板; 动点问题; 总结反思

《义务教育数学课程标准 (2022 年版) 》提出, 要合理利用现代信息技术, 提供丰富的学习资源, 有效的促进教学方式方法的变革. 网络画板不需要安装软件, 操作简单, 教师可在课堂上根据需要随时快速作图, 演示, 让原本抽象且难以理解的问题变得直观. 网络画板既为教学提供了具体的图形工具, 也为发展学生数形结合的数学思想提供了路径, 为培养学生几何直观的核心素养提供了支撑. 本文笔者将结合自己教学中的实际经验, 以 2023 年广州各区中考模拟试题中出现的动点问题为例, 谈谈在此类题型探索过程中怎样结合网络画板, 让抽象问题变得具体和有序.

1 主从联动, 求线段最小值

(2023 天河区 "一模" 第 16 题) 如图 1, 在 RtΔABC 中, $AB = AC = 3$, 点 O 在 AC 上, 且 $AO = 1$, D 为 BC 上任意一点, 若将 AD 绕 A 点逆时针旋转 $90°$ 得到 AE, 连接 OE, 则在 D 点运动过程中, 线段 OE 的最小值为 ____.

1.1 审题, 初探思路

因为 $AB = AC$, $\angle BAC = 90°$, 所以线段 AC 可看出是由线段 AB 绕 A 点逆时针旋转 $90°$ 得到的, 而 AE 是由 AD 绕 A 点逆时针旋转 $90°$ 得到的, 所以 $\Delta ABD \cong \Delta ACE$, 当点 D 点在 BC 上运动过程中, 什么情况下 OE 最短呢? 这是解决这道题的重点和难点所在.

1.2 探究, 软件辅助

任意打开一个浏览器, 输入 "网络画板", 点开即可进行操作. 按照题目中给出的条件进行作图, 完成后, 如图 1, 拉动点 D 时, 可直观的看到点 E 是在一条直线上运动的, 当 OE 垂直于 CE 所在的直线时, OE 最短.

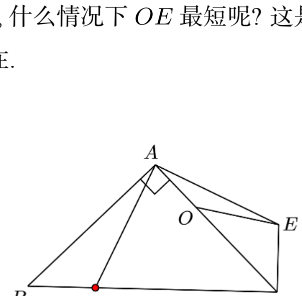

图 1

1.3 解题, 思路梳理

由已知条件, 易证明得 $\Delta ABD \cong \Delta ACE$, $\angle ACE = \angle B = 45°$, 所以点 E 在射线 CE 上运动, 根据 "垂线段最短" 定理, 可知当 $OE \perp CE$ 时, OE 的值最小. 因为 $AO = 1$, 所以 $OC = 2$, 在 RtΔOCE 中, $OE = CE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OC = \sqrt{2}$.

1.4 小结, 归纳通法

几何直观是指利用图形进行描述和分析问题, 大致猜测当前问题的解决路径. 利用网络画板的辅助, 学生能从动态变化的图形中获得直观感知, 猜想解决问题的路径, 获得理性思考的方向, 最终解决问题.

2 主从联动, 求轨迹路径长

(2023 花都区 "一模" 第 24 题) 如图 2, 已知 $\angle MAN = 60°$, 在射线 AM、AN 上分别截取点 B、C, 使 $AB = AC = 8$.

(1) 求证: $AB = BC$;

(2) 如图 3, 以 BC 为直径在 BC 的上方作一个半圆, 点 D 为半圆上的一个动点, 连接 AD 交 BC 于点 E.

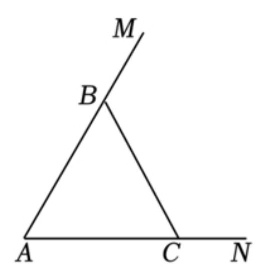

图 2

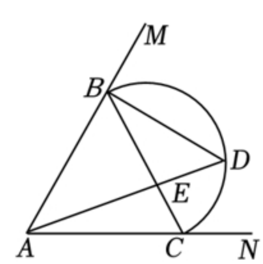

图 3

① 当 $DB \perp AB$ 时, 求 AD 的长.

② 在线段 AC 上取一点 F, 连接 BF 交 AD 于点 G, 若 $BF = AE$, 当点 D 在半圆 BC 上从点 B 运动到点 C 时, 求点 G 经过的路径长.

2.1 审题, 初探思路

此题的第 (2) ②问是求动点轨迹路径长的问题, 在第 (1) 问中已证得 ΔABC 是一个等边三角形, $AB = BC = AC$, 当 $BF = AE$ 时, 存在有两种不同情况: 当 $\angle BFA = \angle AEB$ 时, 可证明 $\Delta ABF \cong \Delta BAE$; 当 $\angle BFC = \angle AEB$ 时, 可

证明 $\Delta BCF \cong \Delta ABE$. 当点 D 在半圆上运动时, 点 G 的运动轨迹是什么呢? 上面两种情况的运动轨迹一样吗? 这是这道题的难点所在.

2.2 探究, 软件辅助

凭借画草图我们很难准确判断点 G 的运动轨迹是一条直线还是一条弧, 而且这道题我们至少需要画六个相对准确的草图才能猜测结果, 这需要花费比较多的时间, 在课堂上显然不实际, 如果我们借用网络画板, 根据条件快速的作出图形 (如果教师对网络画板掌握不熟悉的话, 可提前画好, 如果熟悉的话, 可现场作图, 带着学生进一步理解题目) . 情况 1: 当 $\angle BFA = \angle AEB$ 时, 如图 4, 拉动点 D, 保留点 G 的运动轨迹, 可看到点 G 的运动轨迹是一条线段, 那么我们只需要找到起点和终点位置, 就可以算出路径长了. 情况 2: 当 $\angle BFC = \angle AEB$ 时, 如图 5, 拉动点 D, 保留点 G 的运动轨迹, 可看到点 G 的运动轨迹是一段弧, 既然是一段弧, 那么我们只需找到弧所在圆的圆心位置、半径, 以及弧所对圆心角的度数就能算出路径长.

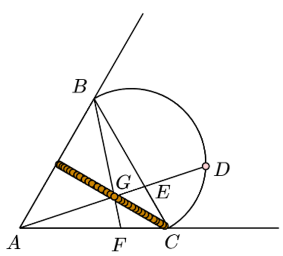

图 4

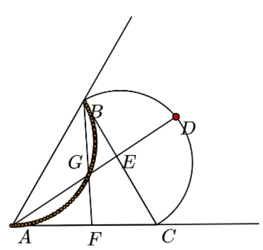

图 5

2.3 解题, 梳理思路

情况 1: 如图 4, 当 $\angle BFA = \angle AEB$ 时, 可证 $\Delta ABF \cong \Delta BAE$, $\therefore \angle FBA = \angle EAB$, $\therefore BG = AG$, 所以点 G 在 AB 边的中垂线上, 此时点 G 经过的路径为 ΔABC 边 AB 上的高 $= AC \cdot \sin 60^\circ = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

情况 2: 如图 5, 当 $\angle BFC = \angle AEB$ 时, 可证 $\Delta BCF \cong \Delta ABE$, $\therefore \angle CBF = \angle BAE$, $\therefore \angle BAE + \angle ABF = 60^\circ$, $\therefore \angle AGB = 120^\circ$, 这就是"定弦定角"问题, 所以点 G 的运动轨迹就是一段弧, 这段弧所在圆的圆心在线段 AB 的中垂线上, 由 $\angle AGB = 120^\circ$ 可算得弧 AB 所对圆心角等于 120°, 半径 $r = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, 弧 AB 的长 $= \dfrac{120 \times \frac{8\sqrt{3}}{3}}{180}\pi = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}\pi$.

2.4 小结, 归纳通法

学生在解题过程中, 之所以无从下手, 很多时候是因为搞不清图形变化过程中不变的本质. 例如上面这道题中的情况 1, 当我们利用网络画板拉动点 D 时, 我们会直观看到点 G 的运动轨迹就是一条线段, 并且从线段的位置比较容易猜测轨迹应该是线段 AB 的中垂线, 这样学生就能从这个方向得到理性思考, 从而找到 $GA = GB$ 这个变化中不变的量; 而对于情况 2, 利用网络画板, 学生能直观看到点 G 的轨迹是一段弧, 这样学生就会猜测到"定弦定角"问题, 从而找到 $\angle AGB = 120^\circ$ 这个变化中不变的量. 学生在多次经历这种探究后, 会逐步形成动态观念, 在图形的动态变化中, 找到不变的本质, 从而解决问题.

3 主从联动, 路径与最值问题

(2023 越秀区"一模"第 16 题) 如图 6, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 4$, 点 E, F 分别为边 AB, CD 上的动点, 且 $AE = CF$, 将线段 EF 绕点 F 逆时针旋转 90° 得到线段 FG, 连接 DG.

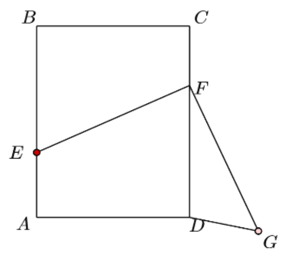

图 6

(1) 当点 E 为 AB 的中点时, 线段 DG 的长是 ____;

(2) 当点 E 在边 AB 上运动时, 线段 DG 的最小值是 ____.

3.1 审题, 初探思路

此题第 (2) 问是动点轨迹问题, 当点 E 在 AB 上运动时, 点 F 和点 G 也跟着运动, 但是点 G 的运动轨迹是什么呢? 这是解题的关键, 教师可引导学生先进行猜测, 如果是一条直线, 如何求最短距离, 如果是一段圆弧, 又怎样求最短距离.

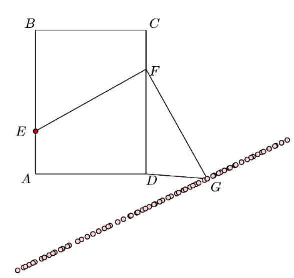

图 7

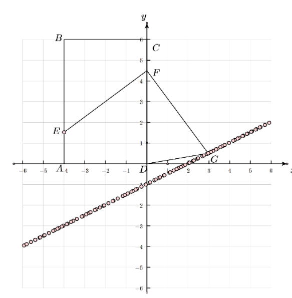

图 8

3.2 探究, 软件辅助

打开网络画板, 根据条件快速画出图形, 拉动点 E, 如图 7, 可清晰看到点 G 的运动轨迹是一条直线, 根据"垂线段最短"定理, 可知当 DG 垂直于轨迹直线时, DG 最短, 但是轨迹直线怎样求呢? 这时教师可引导学生在网络画板中以点 D 为原点建立直角坐标系, 如图 8, 拉动点 E 至点 A 时, 可直观看到点 G 的坐标为 $(6, 2)$, 拉动点 E 到 B 时, 可看到点 G 的坐标为 $(-6, -4)$, 知道了运动轨迹, 知道了两特殊点坐标, 即可求出轨迹直线的解析式, 进而求出最短距离.

3.3 解题, 梳理思路

当点 E 运动到 A 时, 如图 9, 点 F 在 C 处, 过点 G 作 $GH \perp y$ 轴, 因为 $EF = FG$, $\angle EFG = 90°$, 可证得 $\Delta EDF \cong \Delta FHG$, $\therefore G(6,2)$; 当点 E 运动到 B 时, 如图 10, 点 F 在 D 处, 过点 G 作 $GM \perp y$ 轴, 同理可求得点 $G'(-6,-2)$, 可求得轨迹直线的解析式为 $y = \dfrac{1}{2}x - 1$, 当 DG 垂直于轨迹直线时, DG 的解析式为 $y = -2x$, 联立方程组 $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - 1, \\ y = -2x, \end{cases}$ 解得交点坐标为 $(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{4}{5})$, 进而可求得最短距离为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

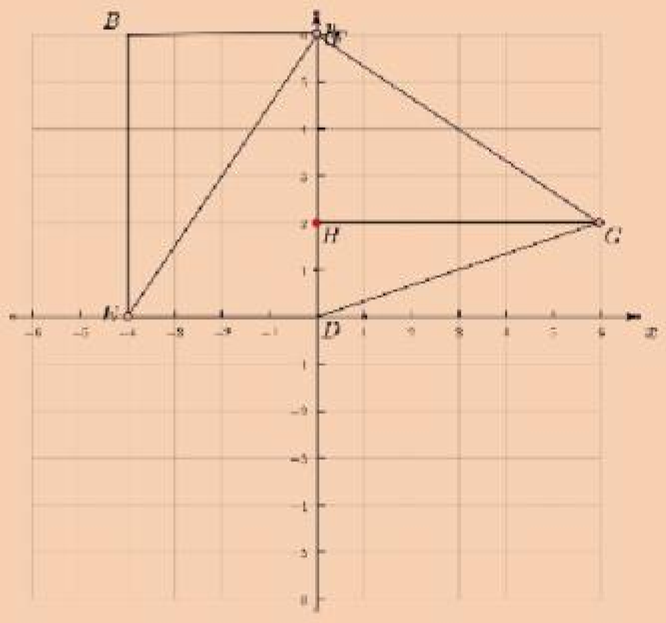

图 9

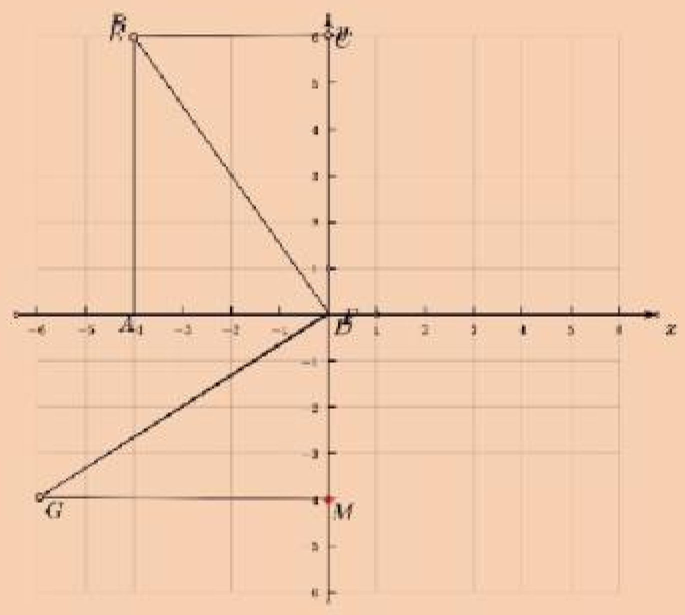

图 10

3.4 小结, 归纳通法

上面这道题, 当教师利用网络画板进行动态展示后, 学生可以通过图形的探索猜测到问题的解决方法, 求解的思路就更直观了. 学生经历这一探索过程, 对知识的内容有了本质的理解, 慢慢形成自身的认知能力, 并将其方法迁移到其他问题的解决上, 有效培养了学生的几何直观素养.

4 总结反思

4.1 合理使用软件使抽象问题具体化

通过上面的例子, 我们可以看到对于中考压轴题中的动点问题, 很适合利用软件辅助进行探究. 基于网络画板的辅助, 教师和学生都比较容易得到准确的图形和精确的数据, 通过拉动主动点, 能直观感受到图形在动态变化过程中的各种性质, 找到变化中不变的本质, 猜测解题路径, 找到理性思考的方向. 由于网络画板简易操作的性质, 教师可以在课堂上现场作图, 带着学生进一步理解题意, 通过一段时间的目睹耳闻, 学生在家也能轻松利用网络画板进行探索此种类型的压轴题, 学生在作图过程中进一步理解题目中的条件, 思考作图的步骤, 这些都对提升其核心素养有很大的作用, 在独立探索动态图形过程中, 其动态思维也得到锻炼.

4.2 软件只是辅助, 并非主导

各种教学软件进入课堂, 确实给教学带来了便利, 提高了教学效率, 但是教师要注意软件的使用频率不宜过高, 高了就会使学生厌烦, 还容易造成学生在解题过程中对动态软件的依赖, 所以在此种类型问题的探索过程中, 传统手段必须占主要地位, 信息技术教学手段是在学生遇到难于想象的变化情况, 或者教师难于讲通讲透的地方才使用, 传统的教学手段对学生抽象能力的培养有着不可替代的作用, 信息技术教学手段只是辅助.

参考文献

[1] 伍慧懿. 基于 GeoGebra 的初中数学二次函数动点问题探究 [J]. 中学数学研究 (下半月) , 2022(01) : 9-13.

[2] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准 (2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

中学数学研究

1955年2月创刊
1982年1月复刊
复刊第508期（下）
2024年4月20日出版

主　　办: 华南师范大学数学科学学院　广东省数学会
主　　管: 华南师范大学
协　　办: 广东教育学会中学数学教学专业委员会
编辑出版者: 华南师范大学数学科学学院《中学数学研究》编辑部
杂志社社长: 李进开
主　　编: 徐志庭
印　　刷: 广州市银裕彩印有限公司
总 发 行 处: 广东省发行局　发行: 在全国范围内发行
订阅、零售处: 全国各地邮局（所）

ISSN 1671-4164

电话:(020)85211343　传真:(020)85213482　邮编:510631
地址: 广州市天河区中山大道西华南师范大学数学科学学院
杂志社现用网址: http://maths.scnu.edu.cn/
E-mail:m-math-yj@scnu.edu.cn　邮发代号: 46-81
统一刊号: CN44–1140/O1（国内）ISSN1671–4164（国际）定价: 10.00元