

学校编码 10390
学 号 202212451059

分类号 G632.42
密 级

集美大学

教育硕士专业学位论文

基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学研究

指 导 教 师: 刘小辉 教授

林祥华 中学高级教师

作 者 姓 名: 陈慧琪

申 请 学 位 级 别: 硕士学位

领 域 名 称: 学科教学(数学)

论 文 提 交 时 间: 2024 年 4 月

论 文 答 辩 时 间: 2024 年 5 月

学 位 授 予 单 位: 集美大学

学 位 授 予 时 间: 2024 年 6 月

答 辩 委 员 会 主 席: 李 伟 教授

集美大学

教育硕士专业学位论文

基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学研究

**Research on the Variant Teaching of Triangular Function
Concept Based on APOS Theory**

作者姓名： 陈慧琪

指导教师： 刘小辉 教授

林祥华 中学高级教师

领域名称： 学科教学（数学）

学位授予单位： 集美大学

论文答辩日期： 2024 年 5 月 16 日

基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学研究

摘 要

根据《普通高中数学课程标准》（2017 年版 2020 年修订），教师应该将学生的未来发展作为重点，并致力于提高学生的数学核心素养。由于数学概念具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和普遍的应用性，使得它成为中学生学习的重要内容。通过对中国传统的经典变式教学理论和西方权威的 APOS 理论系统性分析，本文尝试将两种理论融合在一起，提出一种新的基于 APOS 理论下的三角函数概念变式教学模式，旨在帮助学生掌握三角函数概念，增强学生的学习兴趣，培养学生的数学应用能力，形成系统的数学思维模式。

采用多种研究方法，具体包括问卷调查法、访谈法、实验研究法等，发现 APOS 理论和变式教学理论都与数学概念的二重性有着密不可分的对应关系，这能为更好地整合这两种理论提供理论支撑。APOS 理论的活动、过程、对象和图式四个阶段与变式教学中的过程性变式和概念性变式结合，同时利用网络画板、思维导图等信息化技术优化三角函数概念变式教学课堂，建立一套新的基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学模型。让学生更好地把握概念本质，改善学生的学习效果。

设计符合学生思维发展的三角函数教学案例和实验，使用 SPSS26.0 软件进行统计。对实验前后学生的数学学习非智力因素与数学学习成绩进行定性和定量的客观分析。实验结果表明：

（1）实验前两个班学生的非智力因素无显著差异；实验后实验班的学生在性格方面与对照班无显著差异，但在动机、情绪情感、态度、意志及总体上有显著差异，明显高于对照班。

（2）实验前两个班学生的前测成绩无显著差异；实验后实验班的学生数学后测平均成绩与对照班有显著差异，实验班的成绩明显高于对照班。

使用基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学有以下作用和启示：（1）提高学生的主动性，激发学生的学习热情，改善学生的学习效果。（2）让学生多角度、多维度、多层次地掌握三角函数的概念，为学生学习三角函数概念提供有意义的借鉴。（3）为教师的教学工作提供宝贵的指导和建议，提高教师的实际教学效果。

关键词：APOS 理论；变式教学；三角函数概念

Research on the Variant Teaching of Triangular Function Concept Based on APOS Theory

Abstract

According to the Mathematics Curriculum Standards for General High Schools (revised in 2017 edition, 2020), teachers should focus on students' future development and devote themselves to improving students' core mathematical literacy. Because the mathematical concept has a highly abstraction, rigorous logic and universal application, it has become an important content of middle school students' learning. Through the traditional Chinese classical variant teaching theory and western authority APOS theory systematic analysis, this thesis tries to merge two theories together, put forward a new concept under the theory of APOS variant teaching mode, aims to help students master the trigonometry function concept, enhance students' interest in learning, cultivate students' mathematical application ability, form a system of mathematical thinking mode.

Using a variety of research methods, including questionnaire survey method, interview method, experimental research method, etc., it is found that APOS theory and variant teaching theory are inseparable from the duality of mathematical concepts, which can provide theoretical support for better integration of these two theories. The four stages of activity, process, object and schema of APOS theory are combined with the process variation and conceptual variation in variant teaching. At the same time, the information technology such as network sketchboard and mind mapping is used to optimize the trigonometric function concept variant teaching class, and a new set of variant teaching model of trigonometric function concept based on APOS theory is established. Let the students better grasp the essence of the concept, improve the students' learning effect.

Design the trigonometric function teaching cases and experiments in line with the development of students' thinking, and use SPSS26.0 software for statistics. Make a qualitative and quantitative objective analysis of the non-intellectual factors and mathematics learning performance before and after the experiment. The experimental results show that:

(1) There were no significant differences in non-intelligence factors between the two classes before the experiment. After the experiment, the students in the experimental class were not significantly different from the control class in personality, but there were significant differences in motivation, emotion, attitude, will and overall, which was significantly higher than

that in the control class.

(2) There was no significant difference in the pretest scores of the two classes before the experiment. After the experiment, the average score of the students in the experimental class was significantly different from that of the control class, and the score of the experimental class was significantly higher than that of the control class.

The use of trigonometric function concept variant teaching based on APOS theory has the following functions and enlightenment: (1) to improve students' learning initiative, stimulate students' learning enthusiasm, and improve the students' learning results. (2) Let students master the concept of trigonometric function from multiple angles, dimensions and levels, so as to provide meaningful reference for students to learn the concept of trigonometry function. (3) Provide valuable guidance and suggestions for teachers' teaching work, and improve their actual teaching effect.

Keywords: APOS theory; Variant teaching; Concept of trigonometric functions

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.1.1 适应《高中数学课程标准》的需求.....	1
1.1.2 适应未来社会发展的需求.....	1
1.1.3 优化三角函数教学的需求.....	1
1.1.4 培养学生数学核心素养的需求.....	2
1.2 研究意义.....	3
1.2.1 理论意义.....	3
1.2.2 实践意义.....	3
1.3 研究问题.....	3
1.4 研究方法.....	4
1.5 研究内容.....	4
第 2 章 概念界定与文献综述	6
2.1 概念界定.....	6
2.1.1 APOS 理论.....	6
2.1.2 变式教学.....	8
2.2 文献综述.....	12
2.2.1 APOS 理论.....	12
2.2.2 变式教学.....	18
第 3 章 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学的教学模型设计	23
3.1 APOS 理论与变式教学理论整合的可行性分析	23
3.1.1 数学概念的二重性.....	23
3.1.2 数学概念的二重性与 APOS 理论的联系	24
3.1.3 数学概念的二重性与变式教学的联系	25
3.1.4 APOS 理论与变式教学的联系.....	26
3.2 教学模型设计.....	27
3.3 教学模型分析.....	27
3.3.1 活动阶段的变式教学模型分析.....	27
3.3.2 过程阶段的变式教学模型分析.....	29
3.3.3 对象阶段的变式教学模型分析.....	29
3.3.4 图式阶段的变式教学模型分析.....	29
3.4 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学路径	30
第 4 章 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学设计	32
4.1 案例一:三角函数的概念教学设计	32

4.1.1 三角函数的概念教学设计思路.....	32
4.1.2 教学内容分析.....	32
4.1.3 学情分析.....	32
4.1.4 教学目标.....	33
4.1.5 教学重难点.....	33
4.1.6 教学过程设计.....	33
4.2 案例二:正弦函数、余弦函数的性质教学设计	44
4.2.1 正弦函数、余弦函数的性质教学设计思路	44
4.2.2 教学内容分析.....	44
4.2.3 学情分析.....	44
4.2.4 教学目标.....	44
4.2.5 教学重难点.....	45
4.2.6 教学过程设计.....	45
第 5 章 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学实验研究.....	51
5.1 实验目的.....	51
5.2 实验对象.....	51
5.3 实验内容与方法.....	51
5.4 实验流程图.....	52
5.5 实验设计.....	52
5.6 高中生数学学习非智力因素数据及分析	53
5.6.1 实验前的基本情况.....	53
5.6.2 实验后的基本情况.....	56
5.7 前后测数学成绩研究数据及分析	60
5.7.1 前测基本情况.....	60
5.7.2 后测基本情况.....	62
5.8 三角函数概念教师教学现状调查及教师学生访谈	65
5.8.1 三角函数概念教师教学现状调查.....	65
5.8.2 教师学生访谈.....	69
第 6 章 研究结论与展望	75
6.1 研究结论.....	75
6.2 研究反思.....	75
6.3 研究展望.....	76
参考文献.....	77
附录.....	80

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 适应《高中数学课程标准》的需求

“十年树木，百年树人。”中学教育是实现中华民族伟大复兴的基础，是推动民族复兴、社会发展的重要支柱。数学是一门极其重要、具有理科思维的基础课程，它旨在培养学生的综合应用思维能力，以便学生能够更好地适应当今社会的变化和需求。2020 年公布的《高中数学课程标准》强调：“全面落实立德树人的要求，深入挖掘数学学科的育人价值。在教学实践中，要不断探索和创新教学方式，不仅重视如何教，更要重视如何学，努力激发学生数学学习的兴趣，提高学生学习效率，促进学生的全面发展^[1]。”高中数学课程标准不仅是一份教育改革的文件，还要求我们将其付诸实施，提升高中教学质量。现阶段的传统教学方式已经落后于现代的教育改革。因此，需要将教学理论运用于课堂以更好落实课标，更好促进数学教育改革以胜任时代的教育需求。

1.1.2 适应未来社会发展的需求

教育是面向未来的事业，在传统数学概念教学中，教学模式一般依赖“复习导入——引入新知——巩固训练——课堂小结——布置作业”的步骤进行。这种教学方式中，教师处于支配地位。整个教学以教师为教学的主体，而非以学生为主体。这样往往轻视学生对概念理解的过程。在理解概念的初步阶段，学生就可能遇到学习困难，无法真正理解方法和有效利用，只能死记硬背，缺乏对概念的深入了解，难以真正掌握。随着社会发展的宏观背景和信息技术的快速发展，学生的学习模式正处于改变之中，学生的学习应是一个不断自我提升的过程，它强调学生在老师的指导下，逐步建立自己的知识体系，而非盲目地模仿老师的思维方式。教师应当帮助学生自主构建一个适合自己的知识体系。

习近平总书记曾经强调：青年强则国家强。未来社会的发展更依赖于这些具备终身学习能力的人，这需要学校培养学生积极主动的学习能力和学习意愿。而 APOS 理论注重创设情境鼓励学生思考，变式教学提倡“于变化中体现不变”以助学生深入思考。在 APOS 理论和变式理论的加持下，教师可以从学生的认知特点出发，结合不同的教学方法，有助于加深学生对数学的概念的理解，促进他们自主学习能力的提升，提升他们的学习效率和实践能力。

1.1.3 优化三角函数教学的需求

三角函数在中学数学课程中是一个相对重要的内容。作为中学数学的一部分，它是学生进一步学习更高级数学知识的基础。但目前三角函数在中学数学课程中的教学存在一些

问题。

一方面来说,三角函数在中学数学课程中未得到足够的重视。在教学过程中,一些学校的老师倾向于将重点放在其他数学内容上,轻视了三角函数的教学。这导致学生在三角函数方面的学习时间和深度不足,影响了他们对三角函数的理解和应用能力的培养。

另一方面,学生对于三角函数的学习常常存在一定的困难。初中学生已经学习过三角函数,但角度范围仅限于锐角,借助直角三角形的边长比例能得到对应的三角函数值;而高中的三角函数将范围扩大到了任意角,从解析几何角度对三角函数进行定义。高中学生需要构建的三角函数图式与初中已经构建的图式产生了极大的差异。这样学生原有的图式可能对于新知识的学习产生负影响,学生往往无法对知识进行有效迁移和整合。

由此引入 APOS 理论和变式理论来指导三角函数教学,帮助学生建立起对“三角函数概念”正确的认知结构,可以使学生在学习三角函数时能够更好地理解其概念和性质,形成更为深入的数学思维和解决问题的能力。

1.1.4 培养学生数学核心素养的需求

21 世纪以来,“双基”的教学目标被“四基”取代,数学课程的重点转向了培养学生的实践能力和创新思维,并且引入“数学核心素养”的先进理念,以更好地满足学生的学习需求。根据新课标的要求,“学校需要提供优质的、多元的数学学习资源。并以学生发展为本,培养和提高学生的数学学科核心素养。数学学科核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析^[1]。”

数学学科核心素养不仅要求学生具备良好的数学学习素养,而且还要求教师具备出色的教学技巧和组织能力。数学学习的目的不仅仅是解答题目和应对考试,更重要的是要培养学生的数学学习思维 and 核心素养。

基于 APOS 理论的变式教学是一种以数学知识的内在联系性为基础,通过对现有问题的重新探索和分析,引导学生思考、理解和掌握新的概念、命题和结论等。老师可以设置一个特定的环境或问题,采用多种形式的教学活动,从简单的基础问题开始,逐渐提高问题难度,以期让每个学生都有机会充分发挥自身的潜能。通过对新旧问题“潜在距离”的深入探究,建立一座桥梁,将新旧知识联系起来,逐步推进。学生们利用已有的知识,逐步深入、循序渐进,最后理解问题的来龙去脉,让学生知其然并且知其所以然。

因此,如何有效地利用 APOS 理论与变式教学理论来构建一系列精彩的数学概念方案,无疑是对数学教师充满了严峻的挑战。本文旨在探讨如何以 APOS 理论与变式教学理论为指导理论组织教学,充分考虑学生的主体地位和教师的引领作用,帮助学生更有效学习数学概念,从而提高教学效果,同时也发展学生的数学核心素养能力。

1.2 研究意义

1.2.1 理论意义

数学概念是数学逻辑的起点、数学思维的基础，它为学生提供了抽象解释现实的思考方式。学习数学概念不应是一种被动的接收过程，APOS 理论表明这是一种活动、过程、对象、图式四个阶段的主动学习过程。而变式教学是一种相对新颖且具有我国特色的教学方式。通过变式教学，变换概念非本质特征以强调本质属性，教师可以帮助学生更深入地理解数学概念的本质。通过文献综述 APOS 理论和变式教学理论的基础和特征，笔者发现目前对 APOS 理论和变式教学的融合研究数学概念还不够丰富。本文试图探究 APOS 理论与变式教学理论的相通之处，尝试将它们结合起来指导数学概念教学，旨在采取更有效的措施来改善目前的数学教学模式，丰富 APOS 理论结合变式教学的研究。

1.2.2 实践意义

一是有利于提升教师教学专业素养。通过对教师与学生的深入探究，我们可以清楚地看到原有教学的不足之处。通过实际案例来指导教师有效地运用基于 APOS 理论的变式教学模式，提升教师的专业素养。二是有利于培养学生数学思维能力和创新意识。利用理论指导的实践，鼓励学生不断探究，深入思考，不仅可以增强学生的数学思维能力，还能够唤醒学生的创新精神，从而为“人人都能受到良好的数学教育”的教学目标提供更多的支撑。三是有利于推动教育模式的转型。将 APOS 理论作为指导，融合变式教学理论，制定一系列的三角函数教学案例，并进行实际操作和分析，旨在为数学概念的教学提供新型教学方法。

1.3 研究问题

本文采用 APOS 理论为基础，探索一种新的三角函数概念变式教学模式。将不同的理论结合起来，希望通过这种教学模式，可以更好地满足学生的需求。希望这样能帮助学生更全面地了解高中三角函数概念的本质及其内在联系。基于这一目标，本研究的具体问题如下：

- 1.探究能否构建 APOS 理论和变式教学理论的桥梁？怎样整合和利用这两个理论？
- 2.如何将 APOS 理论和变式教学理论有机结合，设计两个理论结合的三角函数概念教学方案？
- 3.如何比较两个理论结合指导的教学实验与一般教学的成绩和数学学习非智力因素的差异以及三角函数概念教师教学现状及效果？
- 4.探索基于 APOS 理论的变式教学模式如何提高学生对三角函数的理解能力和激发学生的学习热情，如何提升教师的教学质量？

1.4 研究方法

通过四种不同的研究方法来探索教学问题的根源,以便为未来的发展奠定基础,同时验证新研究设计对实际教学的效果。

(1) 文献研究法

通过多种文献检索平台,包括中国知网(CNKI)、维普、万方、Web of Science 等,以 APOS 理论、变式教学理论、三角函数概念教学等为关键词进行搜索,收集相关国内外研究成果。通过对收集的研究成果进行梳理和分析,为本研究提供理论基础及实践指导。

(2) 问卷调查法

针对本次研究的目的和内容,设计并发放三份问卷调查表,两份是针对学生的调查问卷,一份是针对教师的调查问卷。笔者将问卷调查作为一种辅助手段。前者深入了解学生的学习动机、情绪情感、学习态度、学习意志以及性格方面的非智力因素,旨在比较学生在学习三角函数的过程中实验班与对照班的非智力因素情况,探究新的教学设计在哪些方面能提升学生的非智力因素。后者旨在了解教师对 APOS 理论和变式教学理论的接受程度。

(3) 实验研究法

在本研究中,选择实习学校高一年级的两个班级作为样本,其中一个班级作为对照班,另一个作为实验班。在所有条件尽可能保持一致的情况下,针对三角函数概念进行教学。对照班按照传统教学模式进行三角函数概念教学,实验班采用 APOS 理论与变式教学相结合的方式对三角函数概念教学。在实验开始之前,对两个班级进行了数学学习非智力因素调查与数学学习成绩前测。实验结束后,对两个班级进行了数学学习非智力因素调查与数学学习成绩后测,并且两个班级的前后测试卷均一致。最后,对比对照班和实验班的数学学习非智力因素与数学学习成绩,分析二者之间存在哪些差异,并探讨原因。

(4) 访谈法

基于问卷调查,设计了访谈问题。选取了几位具有代表性的学生和老师进行了访谈,询问学生在老师采用 APOS 理论下变式教学时的感受,和老师们探讨在教学中遇到的问题,以及了解 APOS 理论和变式教学理论如何更好地结合在一起来实现教学目标,整理老师和学生的反馈意见和建议,这些访谈的意见也将会用于本研究的总结归纳。

1.5 研究内容

本文主要围绕 APOS 理论和变式教学理论的整合及应用于实践展开讨论。以三角函数为研究载体,深入探析 APOS 理论与变式教学理论如何融入高中数学教学中,通过对现有问题的深入分析,笔者希望能够为一线教师和学生提供有价值的参考。具体内容如图 1-1。

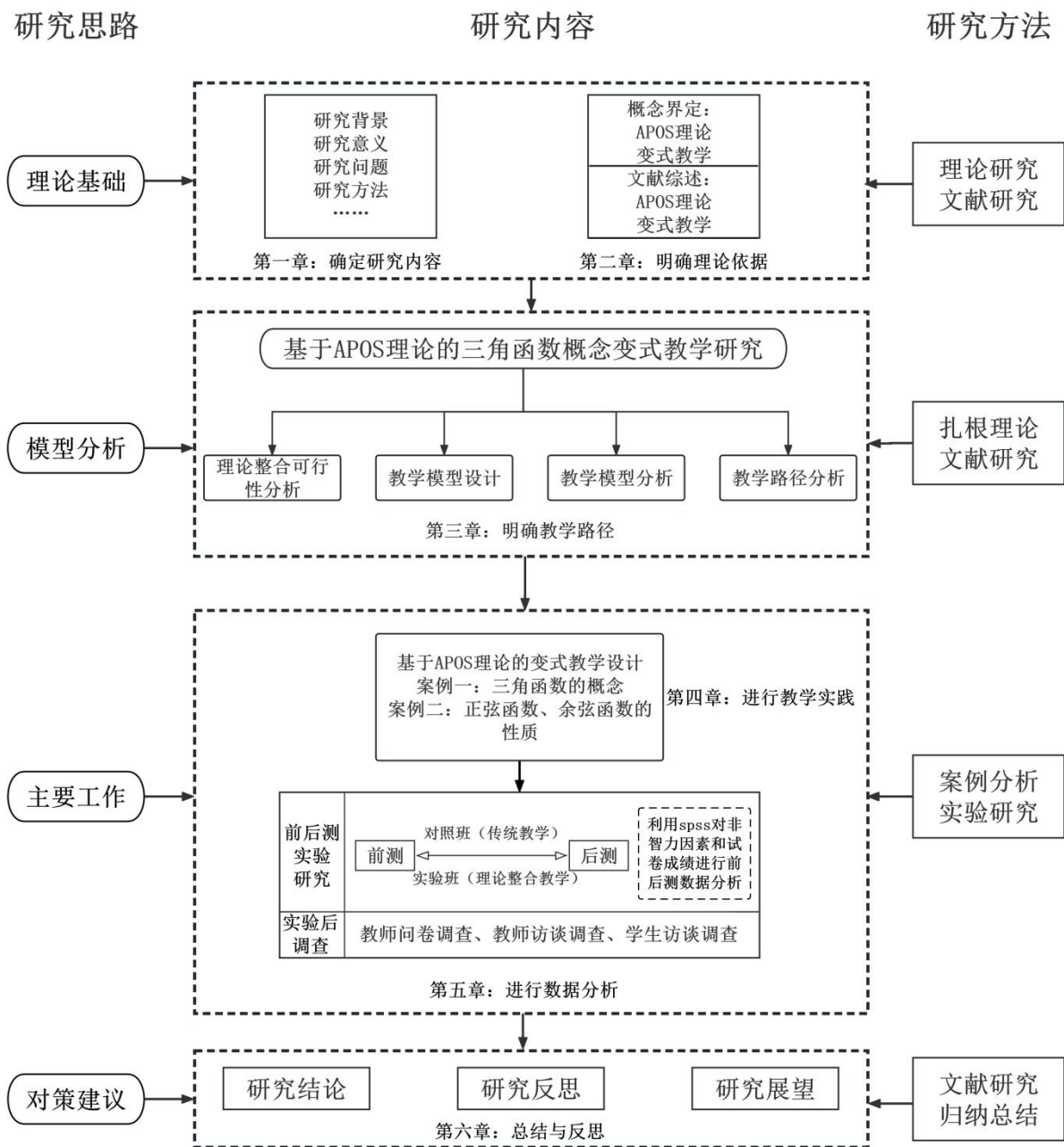


图 1-1 研究流程图

第 2 章 概念界定与文献综述

2.1 概念界定

2.1.1 APOS 理论

APOS 理论基于建构主义思想,起初是由杜宾斯基 (Ed Dubinsky) 提出的。其根植于皮亚杰 (Piaget) 关于个体思维“自反抽象”的观点上,旨在激发学习者学习的主动性,培养学习者的自主学习能力,帮助学习者建立更深层次的认知结构。由此,学习者掌握知识的关键在“反思抽象”,即学习者需要将已经建构好的数学对象抽取出来,在更高的层面上进行重组再抽象过程^[2]。

杜宾斯基认为,学习者无法直截了当的获取数学概念的关键信息,必须依托心智结构 (mental structure) 使得所学的数学概念产生意义^[3]。在理解概念的过程中,学习者的思维是逐步建构的,通过建构心智结构将知识转换为自己的认知体系。而教育的目的在于如何帮助学习者建立合适的心智结构,使得学习者通过持续地深入思考和实践,更好地理解和掌握所需知识,更加准确、全面地完成学习目标。

APOS 理论的基本假设:数学概念是学习者在解决所感知问题的过程中获得的^[4]。基于皮亚杰的思想,杜宾斯基和其他专家学者经过大量的实践研究,最终构建出一套完善的 APOS 理论四个阶段。APOS 理论指出:新数学概念的形成是在实践中构建认知结构的过程。该认知建构过程被分解为四个不同的阶段,即活动 (action) 阶段、过程 (process) 阶段、对象 (object) 阶段和图式 (scheme) 阶段^[3]。学习者应该以现有的经验为基础,通过深度思考和实践,把所掌握的抽象数学概念构建为具体的数学概念形式,并将其融入自身的理论框架之中。

一、四阶段模型 (如图 2-1)

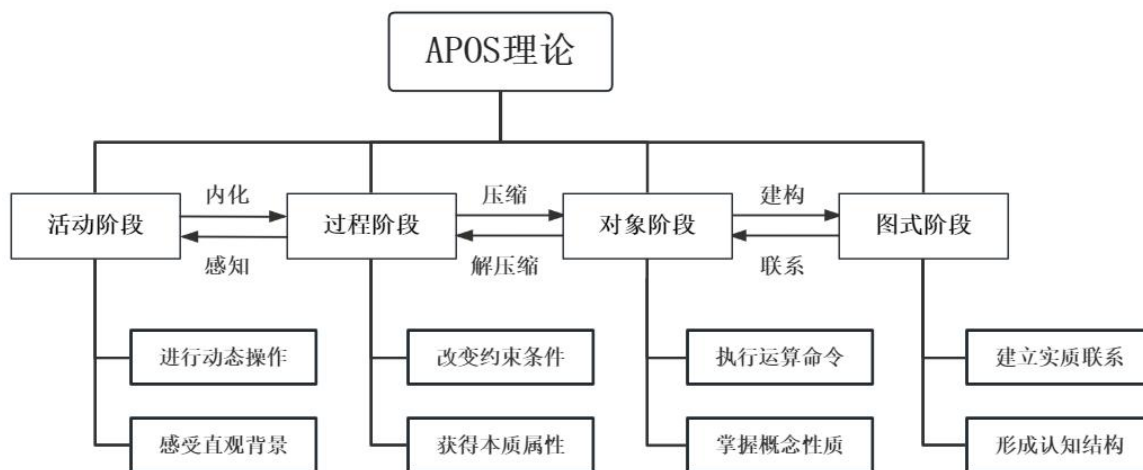


图 2-1 APOS 理论四阶段模型

二、四阶段分析

(1) 第一阶段——(Action) 活动阶段。

“活动”即学习者基于外显操作或外部指令，初步感知数学对象。学习者通过参与活动多次实践操作，可以更加深入地理解所要学习的新数学概念。在此时期，为了让学习者更好地理解数学概念，教师需要依据学习者已有知识和经验，将课堂内容与日常生活联系起来，适当地构建课堂环境；创造各种有趣的直观情景，以便学习者能够反复、形象地感受到概念的形成。“活动”阶段是一个至关重要的时期，它通过借助现实情境学习与数学对象相关的动态操作，旨在为学习者提供一个探索、思考、分析的机会，为学习者的下一阶段学习打下良好的基础。

(2) 第二阶段——(Process) 过程阶段。

通过“活动”学习，学习者对新的数学概念已有简单的了解，可能产生探究的热情。在过程阶段，学习者通过脑力活动将“活动”所接收的信息进行内化与压缩，反复思考提炼出操作所含概念的特征，并内化到自身的思维中。皮亚杰所描述的“反思抽象”就体现在这一阶段。随着反思的不断进行，学习者无需再依赖于“活动”的行动或操作，就可条件反射般快速在脑中实施整个数学概念的操作。鉴于每位学习者的理解能力有所不同，学习者的思维方式和理解能力也各有千秋。因此，在教学课堂上，教师必须给予学习者充分的指导，以便学习者能够更好地应对各种挑战。

(3) 第三阶段——(Object) 对象阶段。

通过前两个阶段的学习，“对象”已经被初步建构。在“对象”阶段，学习者开始将概念视为一个独立的对象来理解和掌握，认识到概念的本质特征，并赋予形式化的定义和符号^[5]。此时的概念呈现为一种静态的结构关系。这一阶段强调对概念的整体掌握，需要学习者深入地探索概念，多角度认识概念。例如，当高中生学习“角的概念推广”时，抽象出角的概念后，就能接着学习正角、负角和零角的概念。

(4) 第四阶段——(Scheme) 图式阶段。

“图式阶段”是综合学习者的活动、过程、对象前三个阶段的内容，对上述阶段生成的新概念与原有相关图式进行整合的阶段。此阶段学习者脑中产生新的图式结构，用于解决新的问题情境。这样有效地促进学习者对新知识的理解和掌握，提升学习者的学习效果。这个全新的图式被看作是对原有图式的进一步补充。一个完整的数学概念图式集相应活动、过程、对象和相关图式于一体的认知框架。例如，“函数”心理图式含有具体的函数示例（现实问题、解析式图象、表格、映射图等）、抽象的对应过程、定义的语言编码，以及与其他概念的联系（方程、曲线、不等式、代数式等）^[6]。构建图式不能一蹴而就，是一个漫长而又复杂的过程，教育者追求的是引导学习者深刻掌握数学概念，并有能力自主构建出一张完整的图式结构。

通过这一理论可以发现，要想深入地掌握和运用数学知识，就必须花费大量的时间和

精力进行反复的建构。“图式”的构建绝非易事，四个阶段也不一定完全按照规律进行。学习者对基于 APOS 理论的某些复杂的概念掌握可能需要经历许多步骤和实践，在这四种阶段中往往形成一种循环的过程，不断地反复地循环，最终才能够构建出完整的图式框架。

2.1.2 变式教学

中国的变式教学历史悠久。变式教学是对教育的对象进行变形，以更好地满足教学的需求，并且能够更有效地传递知识的教学。随着课程改革的深入实施，中国的教育模式正在从一种以教师为核心的传统模式转变为一种更加关注学习者发展的新模式。邵瑞珍教授在《教育心理学》中对“变式”教学的基本模式进行了详细的解释和说明^[7]，变式教学的基本模式如下（图 2-2）：

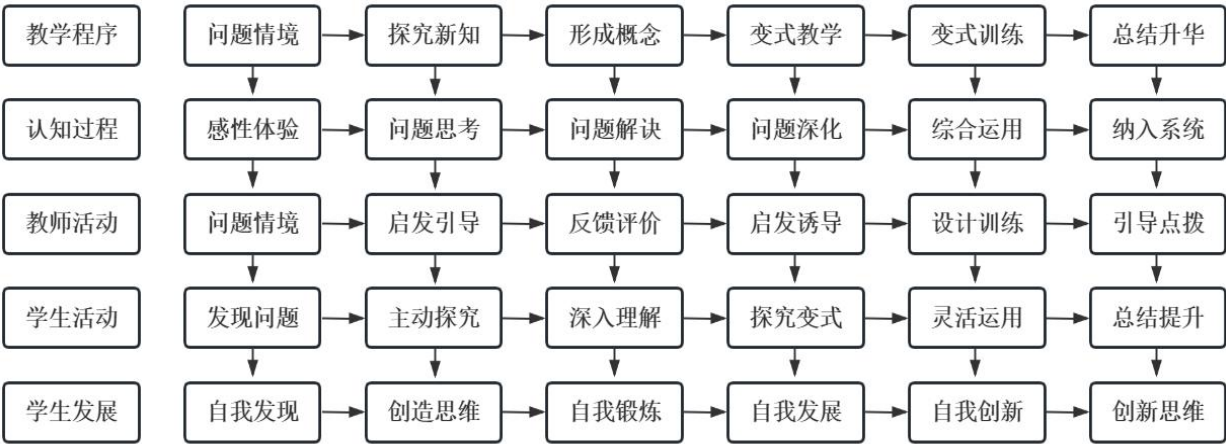


图 2-2 变式教学基本模式

变式是数学教学中不可或缺的一部分，1981 年，顾泠沅对变式教学展开了全面且详细的试验性探讨和理论剖析。此次研究主要包括两个部分：重新梳理和归纳了传统的“概念性变式”；将“概念性变式”扩展至“过程性变式”^[8]。“概念性变式”和“过程性变式”是数学变式教学的两大系列，涵盖了多个学科领域，为学习者提供了全面的知识。

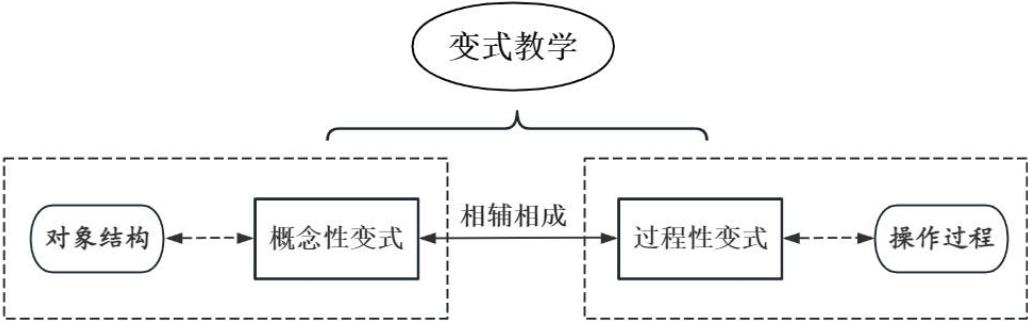


图 2-3 变式教学所属概念示意图

- 一、概念性变式
- 1、概念性变式定义

传统理念将概念性变式主要划分为两类：一类是由概念的外部集合所构建的变式，通常称之为概念变式；另一类未在概念的外部集合中，但它们拥有和概念对象类似的非本质属性，通常将其归类为非概念变式。我们将所有的概念变式以及非概念变式统一定义为概念性变式。

2、概念性变式主要功能

在教学过程中，概念性变式的核心作用就是帮助学习者从不同的视角去领悟和掌握概念。这一点可以通过三个方面进行阐述：

(1) 由直观变式引入概念

虽然数学概念是抽象的，但许多数学概念直接源于具体的感性经验。因此，将概念融入教学的核心在于建立感性经验与抽象概念的关联。根据顾泠沅的研究，三个关键的因素对学习者的几何概念掌握起着决定性的作用：已经积累的一些图形知识、对概念的描绘和基于这些知识的图形转换^[9]。例如，全等图形概念一节。一些富有经验的老师，通常会采取两种措施：一是运用日常生活中的实际直观材料（如图 2-4），整合学习者的感官知识，帮助理解概念的实质内容；二是运用各种不同的图形转换（如图 2-5），将学习者的实际感知能力提高至图形化的直接理解，这是一个将实际直观材料和抽象概念相连接的步骤，以便学习者能够熟练理解和掌握概念的核心属性，并精确理解其所涵盖的范围。

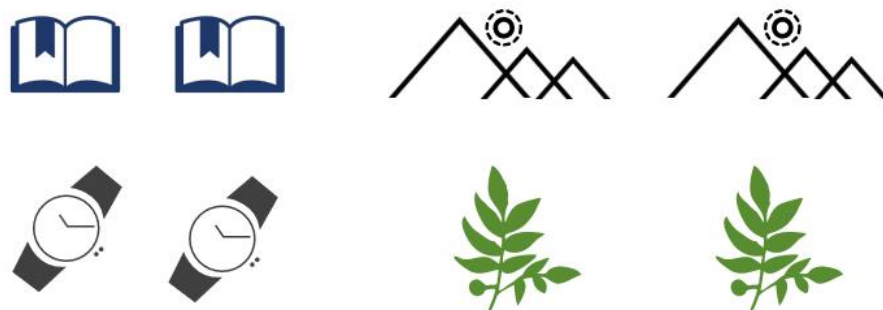


图 2-4 全等图形的直观材料

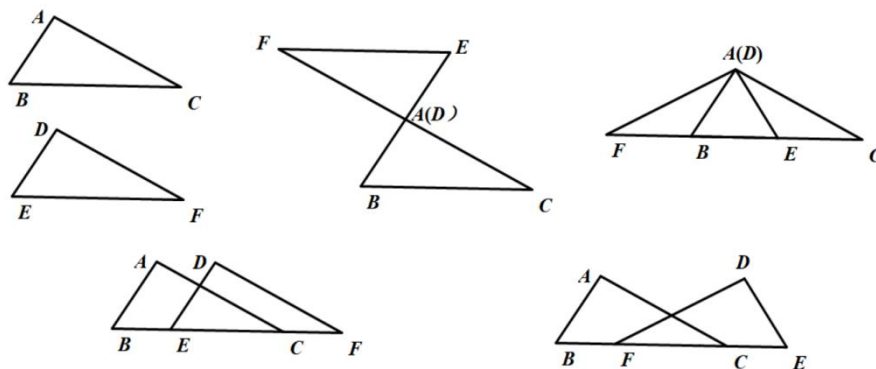


图 2-5 全等图形的图形变式

(2) 通过非标准正例变式突出概念的本质属性

变式主要划分为两种：一种是归属于概念的外延集合的变式，即所谓的正例变式，这种变式又可划分为标准正例变式和非标准正例变式；另一种则是不归属于概念的外延集合的变式，然而它们与概念对象拥有一些相似的非本质特征，这种变式是用来揭示概念对象的相反面，称之为反例变式^[9]。

以逻辑的角度分析，虽然每个概念对象实际上是同样的，然而在学习者的认知框架里，它们的重要性却截然不同。特别需要强调的是，某些概念对象由于具有“标准化”的特性，受到直接感知的影响，或存在着“先入为主”的思维方式，被称作“标准正例变式”^[9]。

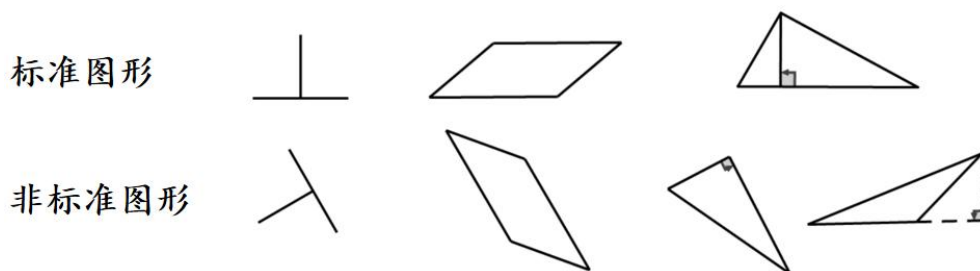


图 2-6 几何概念的标准与非标准正例变式图形

尽管标准正例变式能帮助学习者精确理解概念，但它也可能会束缚学习者的思考，进而导致对概念的理解把握不准。解决这类问题的策略就是充分运用非标准正例变式，通过对概念的非本质属性进行变换，强调概念的本质属性。

(3) 通过反例变式明确概念的外延

概念的内涵和外延是相互矛盾但又相互融合的，如果内涵明晰，外延也会明晰，反之亦然。因此，在讲解概念时，除了要注重其内涵，也需要让学习者对概念中所涵盖的对象有一个明确的认知。

在这里，一个有效的方法是采用反例变式，比如，当学习者通过“标准图形~~×~~”掌握了对顶角的理解后，适合使用反例变式加深学习者对顶角概念的理解。

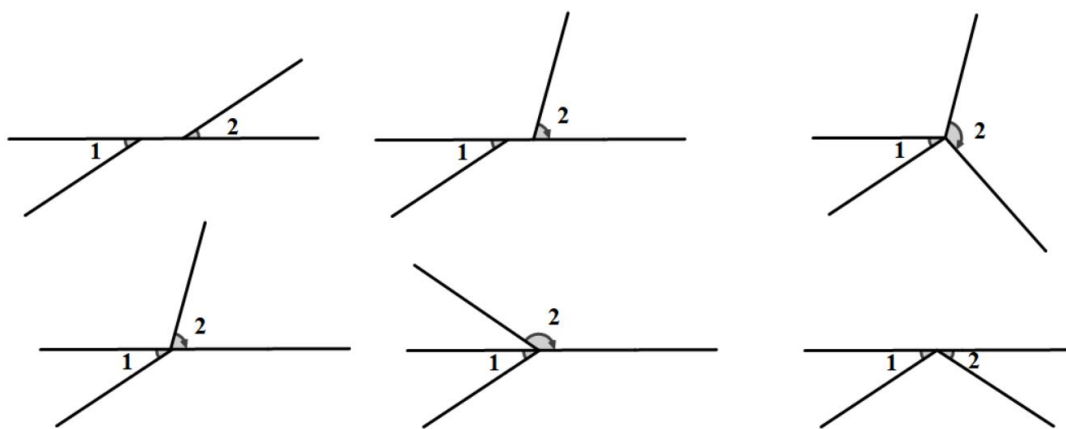


图 2-7 对顶角的反例变式

利用反例变式,能够排除非核心属性的影响,明晰地区分出与其他概念之间的差异,并能够准确地定义概念的范围,从而更好地掌握数学概念的核心属性。

二、过程性变式

1、过程性变式定义

运用过程性变式是一种富含深度的教学方法,而非仅仅是一种机械的训练。层次性是变式教学过程的核心特征。这种过程性变式的特点就是,通过层次化的持续推动,让学生在教学活动中逐步找到问题的答案,并形成一个完整的概念模型^[9]。

2、过程性变式主要功能

(1) 过程性变式为问题解决做铺垫

处理数学难题的策略就是把尚待解答的未知数学难题归纳到已知的问题之中,把复杂的未知难题分解成一连串的基础性已知问题。当把复杂未知难题归纳到基础性已知问题的过程中,可能需要多次的转换,有些路线图能够明确地展示出问题的处理流程,图 2-8 的转换步骤即代表了这个划归路径:

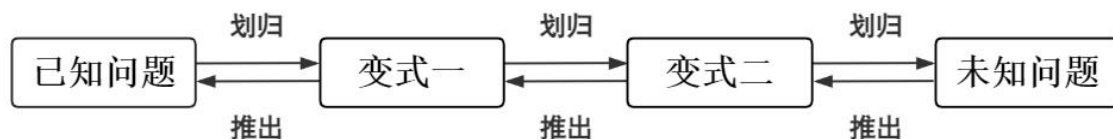


图 2-8 解决问题的变式

(2) 过程性变式呈现知识发展过程

以“方程”概念为实例,展示过程性变式的演变过程。“方程”的教学对学生而言存在两个挑战:首先,需要理解未知数的定义;其次,需要学生理解“平衡”的含义。如果教师只是让学生简单地记住“包含未知数的等式被称为方程”这一概念定义,在学生记住之后给出一些概念性的变换训练,让学生判断哪些是满足条件的,那么依照学生的思维能力,他们也有能力判断哪些不满足方程的定义^[10]。然而,这也带来了一个问题,那就是学生们仅仅是从表面上去理解方程的定义,却无法深入领会其内涵的平衡观念的实质特征。

首先通过实际物品来描述未知数。比方说,“陈杰花费 2000 元购买了三台相机,店老板找给他 200 元,每台相机的价格是多少?”这个问题能够通过图 2-9 直观物象来展现。



图 2-9 3 台相机价格图

其次使用缩写符号来标识未知数。根据图 2-9（①式）使用字母“ x ”来取代直接的图像，这样就能将它转换成缩写符号的方式： $2000 \text{ 元} - 3x \text{ 元} = 200 \text{ 元}$ （②式）。然后再删除②式里的单位，将它进一步精简成： $2000 - 3x = 200$ （③式）。



图 2-10 方程概念的发展过程

上面的例子可以看出，代数符号的发展历经三个阶段，首先是“文字叙述代数”，其次再过渡到“简写代数”，最后简化为“符号代数”。通过这三个阶段的发展过程，能够让学生感受到“字母”替换“数”的精炼，并且构建出“方程”概念的实际框架。然而，此刻学生对于未知数的认识还只局限于特定的实物。换句话说，他们认为②、③两式的“ x ”代表的是实际的相机的价值，并非普通的标志。为了让“ x ”由“实物符号”转变成“抽象符号”，可以在课堂教学过程中进行更深入地探讨。

最后将“ $\bigcirc$ ”作为教学符号取而代替物象符号“ x ”。因此，③的公式转换成： $2000 - 3\bigcirc = 200$ ④。

尽管从形式上看，从③到④的公式与“方程式”的表述有些不同，但实际上，在④公式中，“ $\bigcirc$ ”的含义更为普遍，我们能够把它比作一个能够装满数字的“圆”，引导学生参与填数的活动，同时注意当学生选择填写某一个数，等号的两边应该相等。当学生确定了自己的数值，我们便能帮助学生明白这正是他们需求的未知数。所以，在重新返回第③式的过程中，“ x ”这个在公式里的符号已经不再是用于描述某个具体对象的实体符号，反倒变成了一个类似“圆”的能够填补数字的常规符号。这种填数游戏不仅让学生理解“未知数”的基本特性，同时也能让学生初步感受到“平衡”的概念。

2.2 文献综述

2.2.1 APOS 理论

一、国外研究现状

在 APOS 理论教学应用领域，国外研究开展得比国内要早。为更深入地研究其在教育实践中的具体运用，利用中国知网（CNKI），在数据库里以“APOS 理论”作为关键词进行搜索，并探讨了 2012 年至今国外 APOS 理论的研究动向，具体结果见图 2-11。

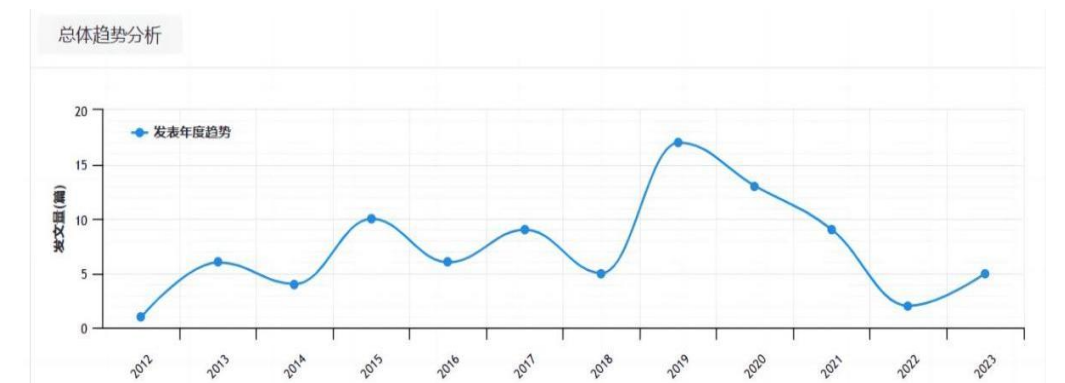


图 2-11 2012 年——2023 年知网关于“APOS 理论”国外文献数量分布图

数据分析显示，以“APOS 理论”为关键词，通过知网搜索到 84 篇外文文献，如图 2-11 所示。这些文献的发表年份从 2012 年开始计算，2013 年以后，发表的文献数量逐步增加，到了 2019 年达到峰值，研究的领域和方向也在不断扩大。

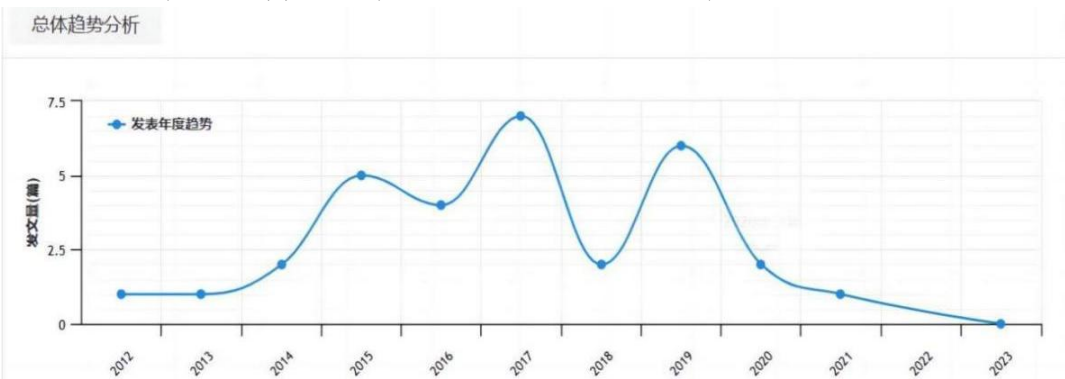


图 2-12 2012 年——2023 年知网关于“APOS 理论”国外数学学科文献数量分布图

由图 2-12 可知，APOS 理论与数学学科有关的文献从 2012 年至今共有 31 篇 APOS 理论与数学相关的研究论文，其中在 2015 年、2017 年、2019 年有较多的学者关注 APOS 理论，三年发表论文的数量达到 18 篇。

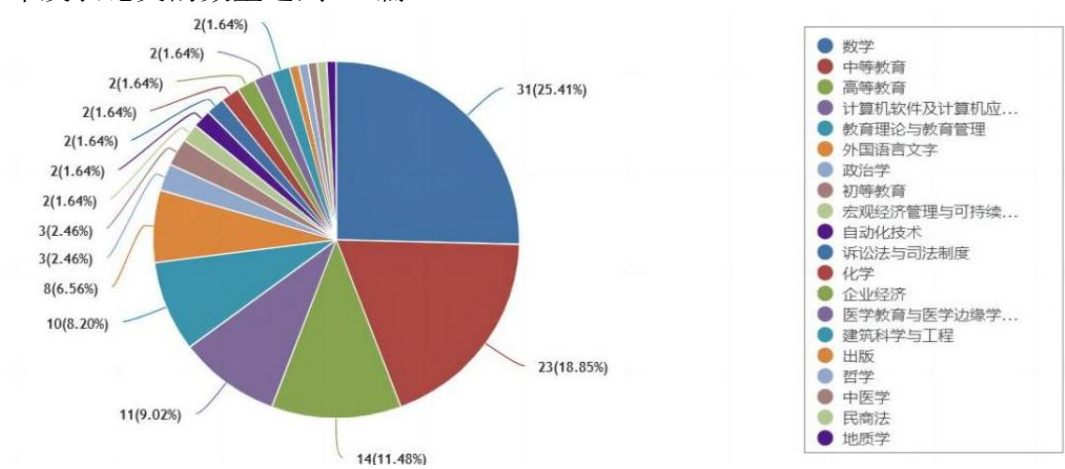


图 2-13 2012 年——2023 年知网关于“APOS 理论”国外文献学科分布图

经搜索外文有关文献, APOS 理论在数学学科领域的占比高达 25.41%, 国外对 APOS 理论的研究主要集中在三个领域: APOS 理论与数学概念构建的相关研究, APOS 理论分析学生心理结构的相关研究, APOS 理论的具体应用的相关研究。

国外许多学者对 APOS 理论与数学概念的构建进行了研究, 提出了很多有意义的建议。E. Dubinsky 学者(1991)首次在《高等代数思维》发表 APOS 理论^[11], E. Dubinsky 教授(1998)借鉴了 Jean Piaget 心理学家的“反思性抽象”理论, 发表了《高等数学中的反思性抽象》和《函数概念的过程本质》等论文, 创新性地提出了五种基于 APOS 理论的教学观念, 从而引领了一个全新的数学概念教育时代^[3]。Jean Piaget 心理学家认为 APOS 理论是建构主义的核心, 它为构建复杂的系统提供了一种可行的思路, 从而使学生能够更加深入地理解和运用这一理论, 为学生理解三角函数打下坚实的基础^[2]。

Hilda Salgado 等学者(2015)研究发现, 采取 APOS 理论进行数学概念教学, 能够显著提升学生的学习效果, 同时也能帮助学生在他们的思维中形成对数学概念的构建, 从而增强他们对数学概念的理解^[12]。M W Afgani 等学者(2017)探讨学生在 APOS 理论框架内对数学概念的理解深浅。研究结果显示, 大部分学生仍然停留在过程阶段, 他们的理解水平并不高^[13]。Borji Vahid 等学者(2019)认为把 APOS 理论和 OSA 理论应用到许多数学概念研究中, 可以更深入地掌握学生对数学概念的认识^[14]。Yerizon 等学者(2020)探讨 APOS 理论是否可以增进学生在线性代数和三角函数方面的成绩, 以及如何帮助他们更好地理解线性代数及三角函数的概念^[15]。Baye Mulat Gebeyehu 等学者(2021)采用 GeoGebra, 并结合各种多媒体教育手段, 旨在增强学生对极限及三角函数概念的理解, 同时也提升他们的图像处理能力^[16]。

国外有许多关于 APOS 理论分析学生心理结构与促进学生学习的研究, 值得借鉴。Abdul Rahman Hakim 等学者(2013)依据 APOS 理论, 利用高级组织者的学习模式来优化学生的心理认知结构和行为活动, 从而提升他们的学习热情^[17]。Angel Cruz Delgado 等学者(2016)运用 APOS 理论, 探讨了学生在处理正弦、余弦以及相应反三角函数的单位圆时的心理建构。注意到 APOS 理论在帮助学生掌握三角函数的知识上具有重要作用^[18]。

APOS 理论在国外应用十分广泛, 其具体应用的案例值得我们深入探究。Zanele Ndlovu 等学者(2013)研究发现, 学生倾向于处理常规类型的问题, 但缺乏概念图式上的理解, 通过学生生活和访谈的反应来探索学生的心理结构, 发现学生学习数学概念的难点^[19]。Achmad Mudrikah(2015)旨在刺激学生的反思性抽象, 这种反思性抽象是在 APOS 理念下构建知识的一种手段, 利用电脑辅助技术与脚手架技术, 激励学生的心理活动发生符合预期的反应^[20]。Sibawu Witness Siyepu(2015)采用 Dubinsky(1991)的 APOS 理论, 对错误进行了分类, 并对数据进行了深入的分析, 以此来帮助学生更好地理解三角函数导数概念^[21]。Yanita 等学者(2020)通过实验结果表明, APOS 理论可以提高学生对抽象函数和三角函数的认知水平, 并且提升学生对抽象函数和三角函数的理解^[22]。

二、国内研究现状

国内对 APOS 理论的研究起步比国外要晚一些，但与国外的研究状况相似，随着时间的推移，国内对 APOS 理论的研究文献数量也逐渐增多。通过中国知网(CNKI)，以“APOS 理论”作为关键词进行搜索，总计搜索到 797 篇文献。对 2001 年至 2023 年国内 APOS 理论的发表的文献进行了大致的分析，具体结果见图 2-14。

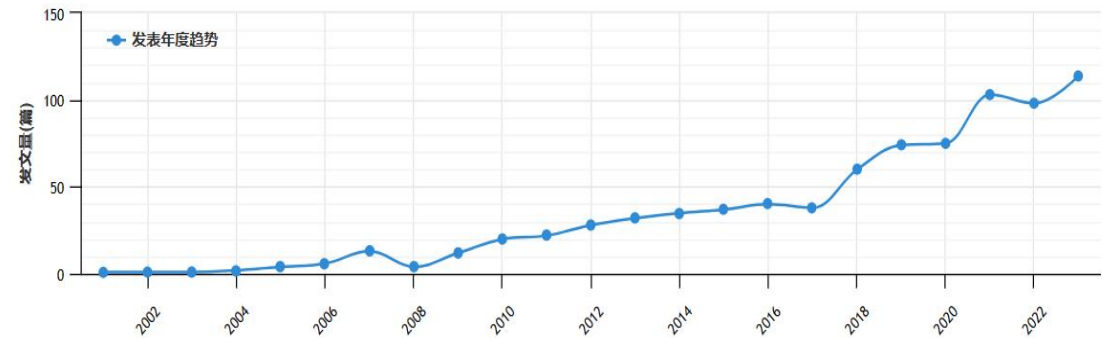


图 2-14 2001 年——2023 年知网关于“APOS 理论”国内文献数量分布图

根据图 2-14 的信息，可以看出，自 2004 年起，APOS 理论的研究在中国持续受到一定的关注，并且这一关注趋势保持了一个稳定的状态。然而，自 2018 年开始，APOS 理论的研究受到了越来越多的学者的重视，发表的文献数量也有了显著的增加，在 2023 年达到这一领域的最高峰。

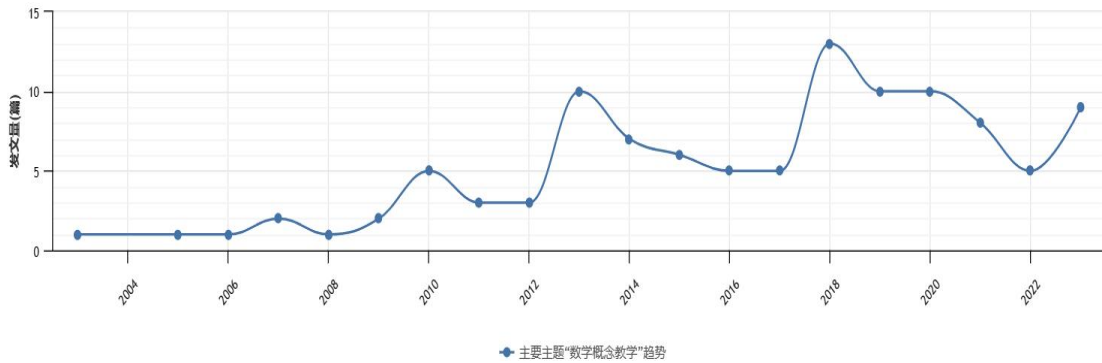


图 2-15 2003 年——2023 年知网关于“APOS 理论”国内数学概念教学文献数量分布图

从 2003 年至 2023 年“APOS 理论”与数学概念教学有关的论文达 113 篇，每一年具体分布情况如上图 2-15。

根据知网文献主要主题分布图 2-16 可知，随着新课程改革与国家对培养新型人才的要求，越来越多的学者更加关注于 APOS 理论并将其理论应用于数学教学实践中。学者对 APOS 理论在国内的研究主要体现在三个方面：一方面，APOS 理论指导数学概念教学的探讨；一方面，APOS 理论价值及内涵的探讨；另一方面，APOS 理论与实际教学评价的探讨。

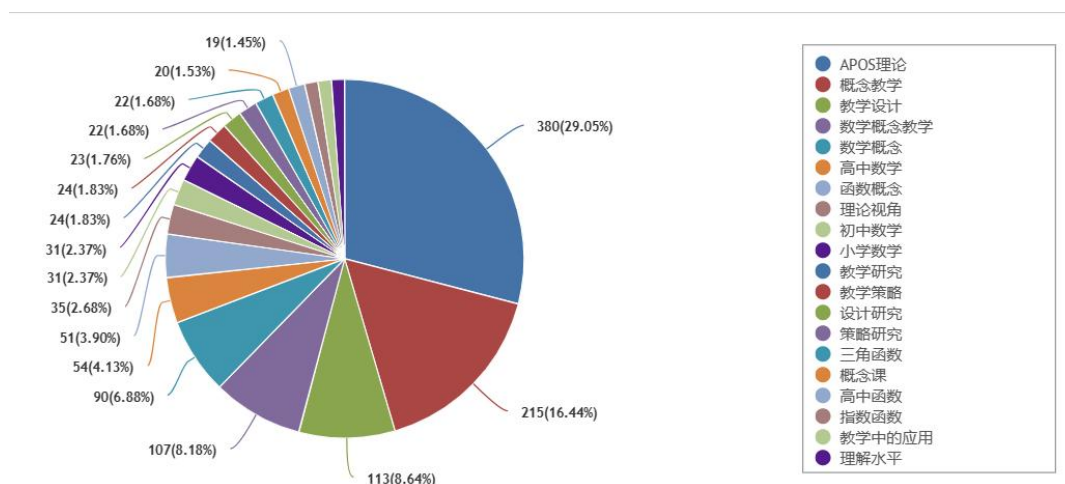


图 2-16 2003 年——2023 年知网关于“APOS 理论”国内文献主要主题分布图

国内对 APOS 理论指导数学概念教学的探讨较为丰富,发表的论文较多。郑秀云(2003)将 APOS 理论作为一种重要的指标,以此来衡量学生掌握高中数学概念的深浅,并且运用实例进行论证在 APOS 理论指导下与高中数学概念相关的教学的效果^[23]。曹丽娟(2012)深入探讨了 APOS 理论在高中数学中三角函数概念教学中的应用,以期为学生提供更加有效的学习体验,对三角函数概念的教学有所启示^[24]。林晓君等学者(2020)认为要实现 A-P-O-S 这一顺序,应该以 A 作为起点,引导学生深入思考,一步步深化,直至 S 的阶段,以期加深学生对数学概念公式的深层理解^[25]。苗昱(2022)利用 APOS 理论进行教学指导,弥补传统教学模式下三角函数相关概念教学中的不足,以期为教师三角函数的教学提供一些合理化建议^[26]。苏蕾(2023)依据 APOS 理论,对初中数与代数概念的微课设计提出了具体的建议,并结合课例进行了微课片段设计^[27]。

国内许多学者对 APOS 理论价值及内涵进行了深入的探讨。乔连全(2001)提出数学的抽象性就是一种构建 APOS 理论活动的过程,进一步来说,把数学学习视为意义赋予(sense-making)的 APOS 理论活动的过程^[28]。张奠宙、宋乃庆(2004)在《数学教育概论》书中阐述 APOS 理论能够为学生提供一种高效的学习方法,比如:通过深度研究三角函数和二元三次方程,利用 APOS 理论可以帮助学生更深入地理解这些数学概念^[29]。鲍建生、周超(2009)对 APOS 理论的理论价值及内涵进行了详细的探讨,利用 APOS 理论去策划和执行数学概念教学,提高学生学习数学的积极性^[30]。

国内对 APOS 理论与实际教学评价的探讨较为完善,发表的文献较为丰富。畅伟杰(2017)深入探索了 APOS 理论与变式教学理论的联系,并提出了整合性理论框架——V-APOS 理论。旨在通过横向的变式教学理论作用于纵向的 APOS 理论,以优化数学概念的教学效果^[31]。李琛(2018)对对数函数及三角函数的现状进行深入研究,并运用 APOS 理论对其课堂教学进行优化,以提升学生的学习热情,对课堂教学进行量化评估^[32]。焦锟(2019)以 APOS 理论为依据,针对对数及三角函数概念的教学提供了一些具体的建议,

并且评估其在课堂教学中的效果^[33]。谢青秀（2021）基于 APOS 理论对三角函数一章进行深入研究，通过教学设计和实施探讨其对学生数学学习的影响。基于 APOS 理论的三角函数教学设计能够有效提升学生的数学能力和素养，对于实现新课改的育人目标具有重要意义^[34]。

赵婉婷（2022）将 APOS 理论与学习迁移理论整合，以优化三角函数的教学策略。发现当前教学中教师忽视概念形成过程，课堂缺乏学生主动参与和抽象反思，以及师生双方忽视知识整体构建的重要性。设计基于 APOS 理论和学习迁移理论的教学案例能够促进学生对三角函数的本质理解，构建完整的知识网络，提高学生的课堂参与率和实际教学效率^[35]。李丹丹、仲昭琳（2022）都将 APOS 理论与变式教学相结合。李丹丹在 APOS 理论的基础上，作者横向融入了变式教学的策略，如情境变式、问题变式、条件变式等，使模型更加丰富和灵活。该模式用于函数单调性以及幂函数教学对学生产生了积极的影响，有助于加深学生对数学概念的理解^[36]。仲昭琳提出的基于 APOS 理论与变式教学理论整合的教学策略，以函数的概念及其性质为例实施教学，不仅帮助学生深入理解数学概念，掌握数学概念的本质，还培养了学生的数学思维和解决问题能力^[37]。

三、现状评述

从三个角度对 APOS 理论的国内外研究现状做出了梳理与简介，详细的分析见以下：

1. 从理论探究转向实践探究

理论是实践的导向。初期仅仅是 APOS 理论被全世界的研究人员关注。但在最近几年，研究人员逐渐将 APOS 理论运用到了实际的教学。显然，APOS 理论的关注焦点已由四个阶段的研究扩展至一个更广阔的观察领域，也就是搭建理论体系，并且能够更有利于数学概念的传授。

2. APOS 理论的实践应用范围扩大

通过对 APOS 理论的研究，国内外在重视其理论的发展时，努力提升其完整性和准确性，随着时间的推移，越来越多的研究开始把理论和实际应用联系起来并且扩大其范围。APOS 理论的实践应用早已超越了高等数学，其影响力也蔓延至中小学，从概念教学、到解题指导、再到学生认知评估，这就大大地扩大了其研究的范围，并且为其增添了更多的深度和广度。为 APOS 理论在中国的研究提供了借鉴，并且为中国的进一步研究发挥着重要作用。

3. APOS 理论对数学概念教学的指导意义较大

大部分国内外学者都在尝试在数学概念教学的各个方面运用 APOS 理论，以便对学生的思维进行阶段性的构建。此种策略能帮助学生理解概念的本质，并且能够帮助教师高效地进行概念教学。因此，可以从 APOS 理论的角度来探讨关于数学概念教学的问题，这将对数学概念教学具有一定程度的指导意义。

2.2.2 变式教学

一、国外研究现状

在国内，变式教学只是一种传统的教学手段，然而，国外对变式教学的关注度一直相对较低，并且开展的时间也比较晚，相比之下，国内的学者在 20 世纪 80 年代就已经开始深入研究变式教学，国外的专家在 21 世纪初才对“变式教学”进行了初步的探讨。应用中国知网（CNKI），以“变式教学”作为关键词进行搜索，搜索时间自 2011 年起，已经搜集到了 50 篇相关的学术论文。

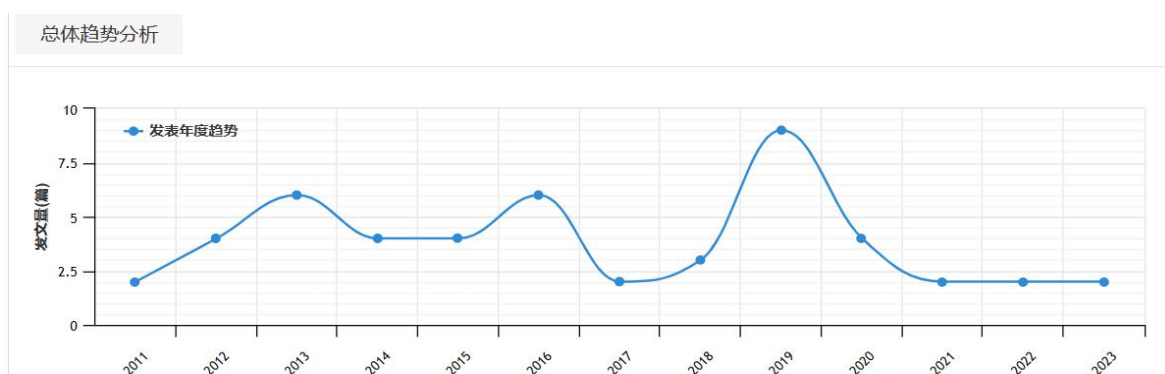


图 2-17 2011 年——2023 年知网关于“变式教学”国外文献数量变化图

图 2-17 展示了知网关于“变式教学”国外从 2011 年至 2023 年每年文献发表的具体情况，国外在 2013 年、2016 年、2019 年三年中发表的文献较多，其中 2019 年发表了 8 篇达到了顶峰。

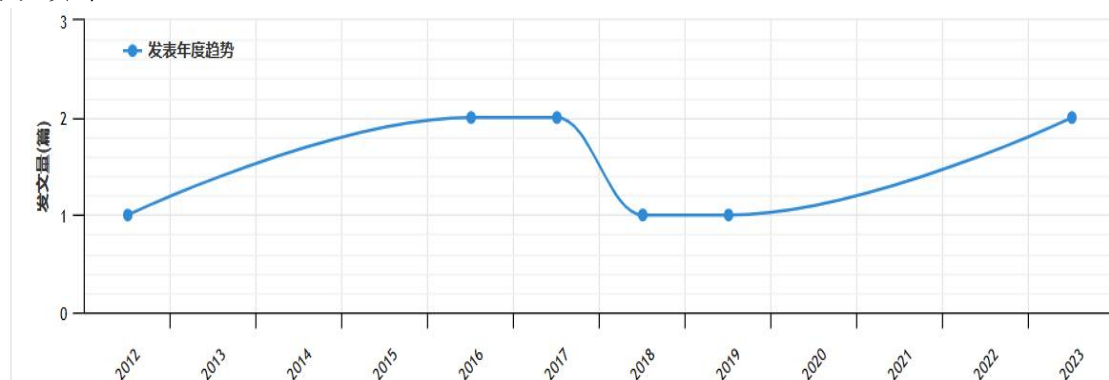


图 2-18 2012 年——2023 年知网关于“变式教学”国外数学文献数量变化图

图 2-18 展示了知网关于“变式教学”国外从 2012 年至 2023 年每年数学变式教学文献发表的具体情况。

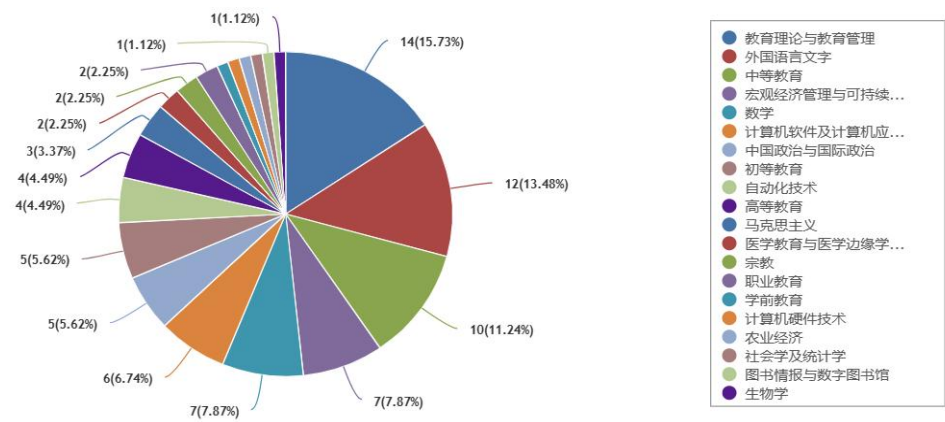


图 2-19 2012 年——2022 年知网关于“变式教学”国外文献学科分布图

图 2-19 展示了知网关于“变式教学”国外 2012 年——2022 年文献学科分布图，从国外文献学科分布图可知从 2012 年至 2022 年有 7 篇是关于数学变式教学的。

Siu Yin Annie Tong（2012）研究发现，通过采用不同的变异方式，可以有效地协助学生熟练运用各种变异技巧，激发学生的学习数学概念的热情并且也提升了教育工作者的专业素质^[38]。Ingrid Pramling Samuelsson（2016）认为变异理论可以构建一个数学概念的图式结构，深化对数学概念的认识。变异教学也是一个优化教学资源与实际操作的重要手段，可以协助学生更深入地理解和运用变异理论^[39]。Jing Ting Jing（2017）认为“变式教学”与“脚手架”在课堂教育中占据着重要的位置，它们为学生学习打下坚实的基石，同时将变异理论融入课堂教学中，能够明显提升学生的课堂表现^[40]。Angelika Kullberg（2017）认为掌握数学概念关键元素变化，是解决问题的根本。变式教学作为一种有效的手段去阐述这种细微的变化，这对于激发学生的学习热情和提升教师的教学积极性都有极大的作用^[41]。

二、国内研究现状

变式教学是国内的一种传统教育模式，在国内的发展比较早。近年来越来越多的专家又加大了对变式教学的研究和讨论。同时，随着其他教育理论的不断发展和完善，学者们也开始将变式教学与其他教育理论、教学策略等相结合，以探索变式教学对其他教育理论、教学策略的影响和效果。应用中国知网（CNKI），以“变式教学”作为关键字进行搜索，搜索时间自 1982 年起，已经搜集到了 3587 篇相关的学术论文。

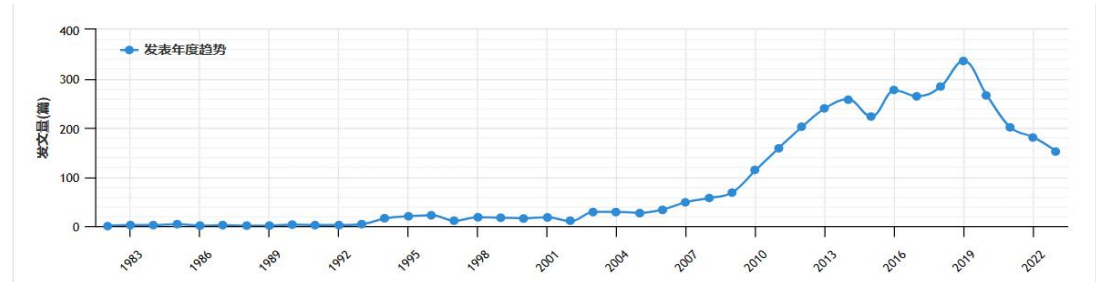


图 2-20 1982——2023 年知网关于“变式教学”国内文献数量变化图

图 2-20 展示了知网关于“变式教学”国内从 1982 年至 2023 年每年文献发表的具体情况，从 1982 年至 2007 年发表的文献都比较平稳，2010 年之后发表的文献急剧增加，到了 2019 年达到顶峰，说明关注变式教学的人越来越多，但最近几年关注度有所降低。

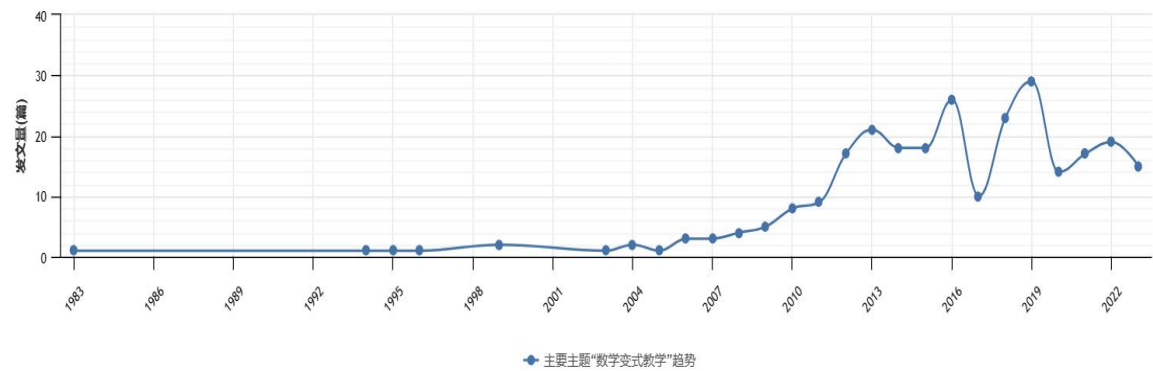


图 2-21 1983——2023 年知网关于“变式教学”国内数学文献数量变化图

图 2-21 展示了知网关于“变式教学”国内 1983 年至 2023 年每年数学文献发表的具体情况。根据图 2-21 的信息，可以看出，国内的变式教学开展得比较早。自 20 世纪 80 年代开始，学术界就重视数学“变式教学”的探索，从 1983 年至 2007 年，相继有一系列的论文发表，但在这段时间里，其发表的论文相对较少并且较为平稳。然而，最近一段时间，研究者对这个领域的理解和探讨却日益深化，自 2008 年开始，其发表的论文量迅速攀升，2019 年更是达到了最高峰，发文量达到 30 篇。

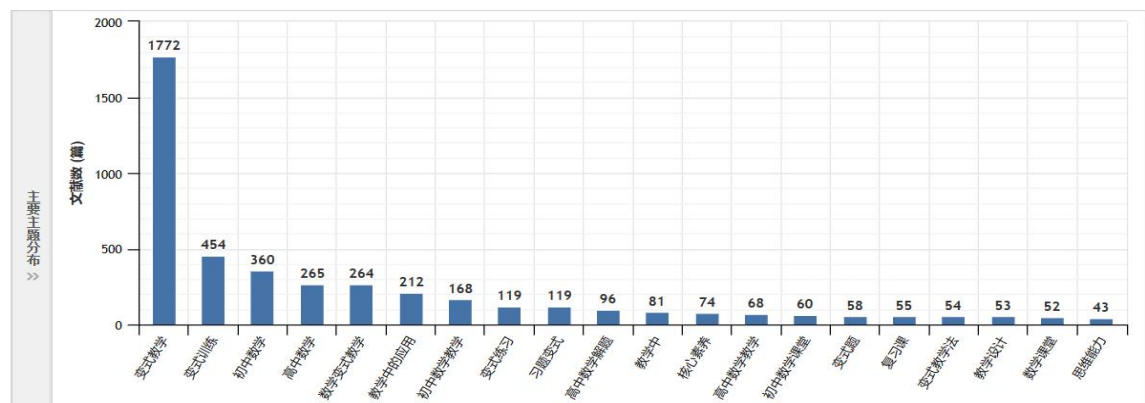


图 2-22 1983——2023 年知网关于“变式教学”国内主要主题分布图

图 2-22 展示知网关于“变式教学”国内 1983 年至 2023 年文献主要主题分布图，从国内文献主要主题分布图可知，其中有 264 篇是关于数学变式教学的，国内“变式教学”研究主要可分为两个方面：一方面，“变式教学”的理论与研究与完善；另一方面，“变式教学”具体实践应用的研究。

对于“变式教学”的理论与研究与完善，顾泠沅（1991）在《学会教学》书中阐述了采用多样化的变式教学，不仅能为学生创新思维提供良好的基础，还能提高学生的创新思维能力^[42]。鲍建生等学者（2003）在《变式教学研究》书中把数学变式划分为概念式变式和

过程式变式，并指出通过科学有序地构建变式题组，不仅能够唤醒学生的学习兴趣，还能够有效地帮助他们深入理解基本概念，进而提升学习成绩^[9]。王志宝（2004）认为变式教学策略可以主动地指导学生们去寻找“不变”的实质，并从这些实质中去掌握“改变”的外形，这样就可以提升学生的数学核心思维^[43]。徐薇（2023）认为变式教学可以有效地提升学生在数学抽象、数学建模、逻辑推理和数学运算等领域的基础能力，真正实现了以人为中心，以学生的成长为重点的教学目标^[44]。

“变式教学”具体实践应用十分丰富，发表的文献较多。程慧（2007）运用变式教学理论来指导教学，解决教学中的数学复杂问题，并通过案例反思，提出了一些建设性的教学意见^[45]。艾尔肯·吾买尔（2016）结合 APOS 理论和变式教学理论，有效地帮助学生更深入地掌握数学概念，从而大幅提升学生的学习效率^[46]。孟秋廷（2019）认为在变式教学过程中，教师需要进行充分的准备，为学生构筑稳固的“脚手架”，通过引导学生进行自我创新的学习以及积极地探索性学习，使得多元化教育的成长道路更加明亮^[47]。

莫翠霞（2020）以 APOS 学习理论和变式教学理论作为理论基础优化高中数学函数概念教学设计。研究得出基于 APOS 理论和变式教学理论整合的概念教学模型能有效激发学生的学习兴趣，促进学生的有意义学习，并对学生的知识构建产生积极影响^[48]。李法玉（2021）探讨 APOS 学习理论与变式教学整合的教学模式在圆锥曲线一章是否能够有效改善实际教学效果。该教学模式不仅有助于学生学业成绩的提高，还能优化课堂教学过程，让学生有意义地建构数学知识^[49]。刘亚倩（2022）根据高中数学教学内容，设计了一套变式教学的实施方案：通过掌握变式的相关知识，推动变式教学，寻找变式的途径；并根据学生的不同特性，设计不同变式的内容^[50]。安慧珍（2023）探讨如何将 APOS 理论与变式教学相结合，以优化三角函数概念教学的效果。构建了 APOS 理论与变式教学结合的复合教学模式，为三角函数概念教学提供了新的思路和方法^[51]。

三、研究现状评述

对“变式教学”在国内外的研究现状进行了两个方面的总结和概述，具体的评述如下：

1.国内多采取传统的变式教学提高数学课堂教学效果

无论是有意识还是无意识地，我国的许多教师都会采用这种变式教学方法来提升教学质量。相对于国外，我国的变式教学的研究更加深入，这主要表现在许多专家始终遵循这种变式教学方法的基本准则和模式，通过理论来引领实际的教学，并且一直致力于探索和应用这种传统的教学方法来指导课堂教学。

2.变式教学效果显著，但与 APOS 理论融合三角函数教学模式探讨较少

随着中外学者的共同努力，变式教学的研究取得了长足的进步，他们发现这一方法不仅可以提高课堂效率，而且还能够与国际上先进的教育理念形成良好的互动关系。中国学者在顾冷沅先生的理论指导下，不断探索和实践，并在多个学术领域中取得了重大进展。变式教学理论和实践相互促进，涵盖了变式训练、教学理论、学科融合等方面，并取得了

一定的成就，但变式教学与 APOS 理论融合的三角函数概念教学模式探讨的论文较少，因此在这方面应该加强。

第 3 章 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学的教学模型设计

3.1 APOS 理论与变式教学理论整合的可行性分析

3.1.1 数学概念的二重性

数学概念是数学学习中不可或缺的一部分。在数学学习过程中，学生需要掌握许多数学概念，这些概念不仅包括基础的数学概念（自然数、角和简单几何图形等），还包括更高级的抽象概念（三角函数、极限、微积分和概率等）。因此，对于学生来说，如何有效地吸纳数学概念知识至关重要。

20 世纪 80 年代，国外著名学者汤普森等提出，数学概念可以被划分为两个主要的构成元素：过程 and 对象。前者指可操作性的公式、定义、原理、规律等，后者可为数学定义的结构或性质。20 世纪 90 年代，A.Sfard 接着对数学概念的二重性进行了全面而深刻的研究。可以说，许多数学概念都具有二重性（如表 3-1），同时许多数学符号也有二重性（如表 3-2）。这是它们的一个显著特征，可以帮助我们更好地理解数学概念和应用数学符号。

表 3-1 数学概念的二重性

概念	过程性	对象性
数	四则运算的过程	集合中的元素
等号	左右两边元素传递的过程	两个元素相等的结果
轴对称	图形关于某条直线折叠的过程	一组图形间存在位置形态
圆	在一个平面内，线段绕它固定的一个端点旋转一周，另一个端点随之旋转所形成的过程	平面上所有到圆心距离相等的点的集合
角	将量角器的中心对准角的顶点，并将零刻度线对准角的一边，得到角的另一边所指示的精确度数值。	由两条具有相同起点的射线构成的一个几何对象
弧度制	角的集合与实数 R 之间建立的一一对应关系	通过将弧长和半径的比值作为参照，用来衡量圆的中心角的符号单位
三角函数	角的集合与数轴上的 y 轴之间建立的一一对应关系	以角度（数学上最常用弧度制，下同）为自变量，角度对应任意角终边与单位圆交点坐标或其比值为因变量的函数

表 3-2 具有过程与对象二重性的数学符号

符号	过程性	对象性
5	记数	集合的数字
4+6	相加	两个数相加的结果
-7	减去 7	负数 7
$\frac{4}{5}$	相除	两个数相除的结果
35+26x	求值	含未知数的表达式
$y = \frac{s}{t}$	比值	两个未知数相比
$y = f(x)$	分配	自变量为 x 的函数

通过深入探究数学概念的二重性，可以发现这两个方面间存在着密切的联系，且彼此间具备着互补作用。学生在学习新的概念时，无法直接高度概括出概念的结构性定义，往往需要结合具体的过程性操作活动引导出抽象的概念。想让学生真正掌握数学知识，教师就必须从多个视角和层次借助操作活动来指导学生去思考和理解。通过实践活动将操作性概念与结构性概念有机融合，可以帮助学生更深入、全面地掌握数学知识，进而提升他们的学习效果。数学概念二重性可分为四个方面的功能，如表 3-3。

表 3-3 概念二重性的功能

	操作性	结构性
总体特征	过程的最后结果或由过程自身决定的数学实体	一个静止状态结构的数学实体
内部表征	受语言表征支持	受直观想象支持
概念形成中的地位	概念形成的最初阶段	对操作观念的进一步发展
对认知理解的功能	对于有效的问题处理与知识掌握而言，虽然重要，却并非必需	有利于所有的认知过程

3.1.2 数学概念的二重性与 APOS 理论的联系

观察数学概念的二重性，能够清晰地认识到：若想让学生深入领会并熟练运用一个数学概念，那么就得将它的过程性与对象性融为一体。在进行概念讲授时，必须借助反复地操作与实践来强化学生已掌握的知识。提升学生对于概念的认识，既要通过学生自己去实

践，同时也要依赖于教师的引领去达到。

APOS 理论是一种建构主义的学习模式，旨在帮助学生通过实践来掌握概念。活动阶段，学生可以根据老师的指示，主动探索周围的环境，从而形成初步的认知。过程阶段，学生可以通过反复实践，将所掌握的知识加以整合，从而形成更加完整的概念。对象阶段，学生需要从自发性的概念转变为科学的概念，并将通过赋予形式化、规范的定义和符号，使其变得更加精确、有序，从而更好地数学化。从而更好地理解数学的本质。成为一个可靠、可行的实体。

通过前三个阶段的学习，学生可以认识到概念学习是一个完整的过程，并将其视为一个独立的整体。在 APOS 理论的最后一个阶段，即图式阶段，学生需要将新的概念融入自己的图式结构，以便更好地理解和应用数学概念，而不是像以往那样不成体系。通过清晰的思路，可以避免思维的僵化和概念的混淆。数学概念的二重性中的对象性知识就构建成功了。概念的二重性（过程性与对象性）与 APOS 理论（活动、过程、对象、图式四个阶段）的关系如图 3-1。

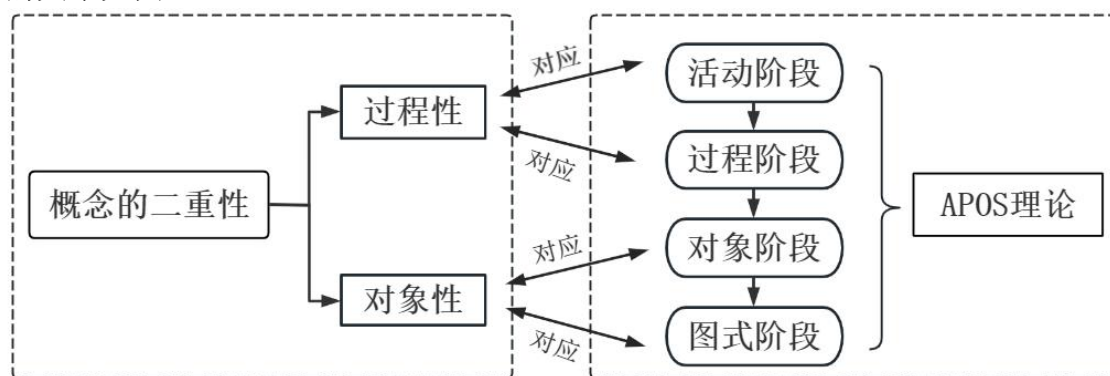


图 3-1 概念的二重性与 APOS 理论关系图

3.1.3 数学概念的二重性与变式教学的联系

根据变式理论的分类，变式教学理论提供了两种不同的变式方法（过程性变式与概念性变式）。合理的应用两种变式，可以更加清晰地展现学习的深入过程，帮助学生更好地理解数学概念。运用过程性变式，帮助学生多角度体会概念生成的过程，学生可以更清晰地理解概念是如何抽象出来的，这样能够充分理解数学概念知识。通过使用概念性变式，让学生系统地把握数学概念的抽象含义，加深学生对概念本质和外延的辨析，从而自主地构建出一个完整的图式，将数学知识模块化。这样使他们能够从不同的视角来理解概念，帮助学生更深入地理解数学概念，从而提升他们的学习能力和效率。

在课堂上，老师应该充分认识到数学概念的二重性，并通过提供概念性变式和过程性变式，帮助学生更好地掌握数学概念。在概念的二重性中，概念过程性（操作性）与过程性变式（动态形式）相对应，概念对象性（结构性）与概念性变式（静态形式）相对应。数学的概念二重性与变式教学的具体关系如图 3-2。

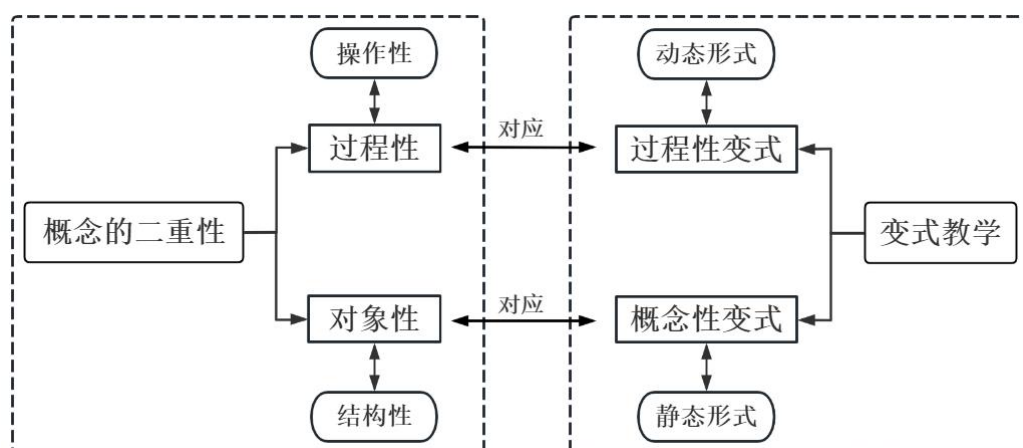


图 3-2 概念二重性与变式教学关系图

3.1.4 APOS 理论与变式教学的联系

通过数学概念的二重性构建的一座桥梁，使得 APOS 理论的四个阶段与变式教学得以完美地融合。APOS 理论的活动阶段和过程阶段对应数学概念的过程性，而 APOS 理论的对象阶段和图式阶段则对应数学概念二重性中的对象性。变式教学的过程性变式与数学概念的过程性相对应，而教学变式的概念性变式则与数学概念的对象性相对应，动态形式和静态形式的完美融合。利用概念二重性这根纽带，把 APOS 理论与变式教学理论完美地联系起来了。

APOS 理论的活动、过程、对象、图式四个阶段都被用于全面推进数学概念的教学，同样，变式教学的过程性变式以及概念性变式，也被用于引领数学概念的教学，两者之间并非矛盾，反而形成了一种相辅相成的关联，从而加深了学生对于数学概念的理解，同时通过数学概念的二重性也把 APOS 理论与变式教学理论紧密联系起来了。图 3-3 展示了 APOS 理论与变式教学的紧密联系。

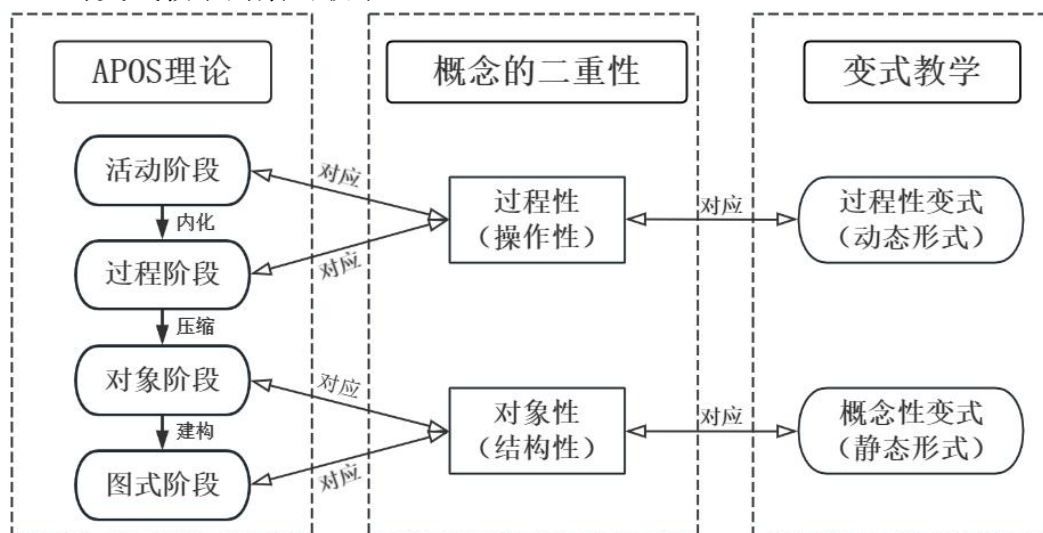


图 3-3 APOS 理论与变式教学理论的关系图

3.2 教学模型设计

基于 APOS 理论和变式教学的深入研究,本文提出了一种新的教学模型,以满足不同的学习需求。

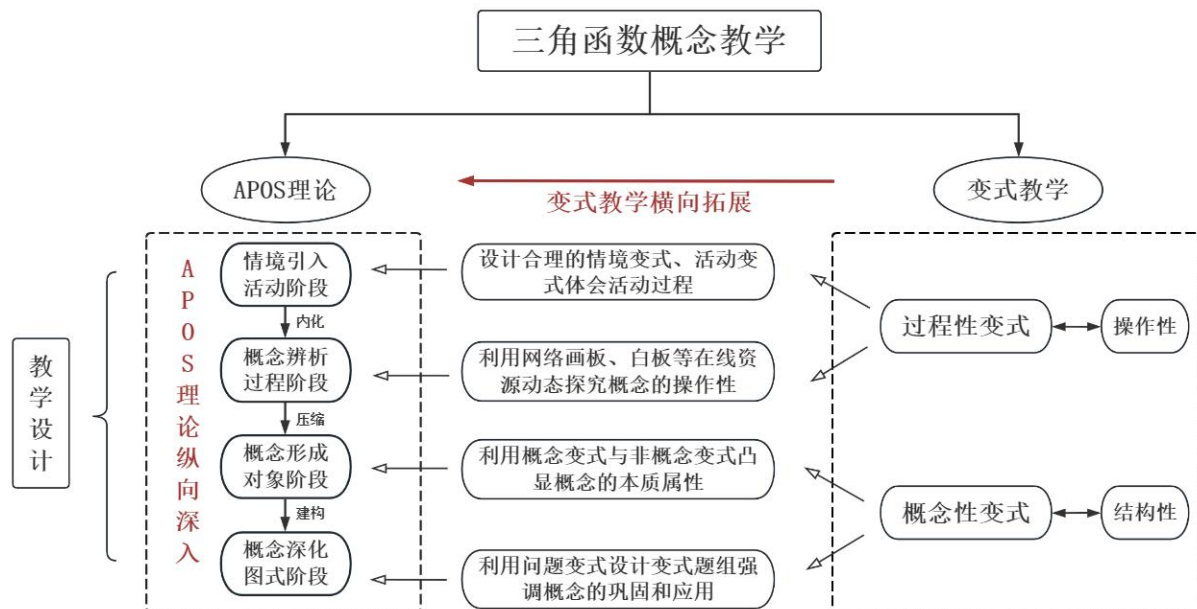


图 3-4 基于 APOS 理论的概念变式教学的教学模型

3.3 教学模型分析

3.3.1 活动阶段的变式教学模型分析

活动 (Action) 阶段既是教学的起点,也是教学的关键环节。在教学的起始阶段,学生还不能直接抽象出概念,他们需要依靠已有经验与具体的情境去深刻体会和思考,并在此基础上对既有知识进行再创造。这一阶段主要通过创设情境让学生结合实际的生活经验引出对概念的初步认识。结合变式教学模式,利用情境变式、活动变式丰富情境教学。使学生能够从多种情景中获得更加清晰的认知,从而更加深刻地理解和掌握知识。

(1) 情境变式

情境变式包括现实化情境、数字化情境以及现实与数字化结合的情境^[52]。问题情境的设计不是随意而成的,老师应当根据教育目标、学生所在的实际环境和他们目前的知识认知程度,精心挑选能够让学生轻松理解的情境问题。

例如,在引入任意角概念前,可以先展示体操比赛以及齿轮运作的视觉素材。让学生们在审视体操运动中的“540 度前空翻转体”与“720 度后空翻转体”动作,及齿轮系统中驱动轮与从属轮旋转方向的相反场景中,感受到日常生活中与角度息息相关的现象。从而引导学生从中发现过去学习的 $0^\circ \sim 360^\circ$ 内的角不能抽象概括上述生活中的角,必须将角

的概念进行推广。



图 3-5 体操比赛及齿轮传动

(2) 活动变式

在活动阶段可以创设不同的活动如探索性的问题、有趣的历史故事、实践性的游戏等，来唤醒学生的学习热情，特别是在一堂枯燥乏味的概念课上，这些活动能够让他们更加深入地理解知识点，让学生更加深入地理解概念的本质，从而更好地掌握知识。

例如，在引入弧度制时，由于学生是第一次学习用弧度表示角的大小，可以先设置一系列的活动引导学生理解为什么要引入“弧度制”。

活动一：日常生活中，有些量可以用不同的单位进行度量。（度量长度一米、英尺、码；度量质量一千克、磅；度量温度—— $^{\circ}\text{C}$ 、 $^{\circ}\text{F}$ 、 K 。）

活动二：日常的运算多数是十进制，角的度量能否像长度的度量一样，可以用除角度制（六十进制）以外的十进制方式来度量呢？

活动三：引入数学史——欧拉明确引出弧度制思想以简化三角公式计算。



图 3-6 活动一“生活中不同的度量单位”

- 欧拉是明确提出弧度制思想的数学家。
- 1748年，在他的一部划时代著作《无穷小分析概论》中，提出把圆的半径作为弧长的度量单位，使一个圆周角等于 2π 弧度，1弧度等于周角的 $\frac{1}{2\pi}$ 。
- 这一思想将线段与弧的度量统一起来，大大简化了三角公式及计算。



莱昂哈德·欧拉
(Leonhard Euler)
1707~1783
瑞士数学家

图 3-7 活动三引入“弧度制”数学史

3.3.2 过程阶段的变式教学模型分析

在过程阶段（Process），需要学生将具体的数学活动转换成抽象的数学思考，这样才能更好地促进下一阶段获取概念的本质属性。这一过程不仅仅是一个情境的转换，更需要学生持续深入地思考。合理运用过程阶段，同时采用过程性变式思维，利用网络画板等网络工具，老师可以通过“变化的”操作来引导学生深入探究概念“不变的本质属性”。

例如，在探索“任意角”时，可通过网络画板资源“任意角”，移动终边的位置，在变化中形成正角、零角、负角的定义。

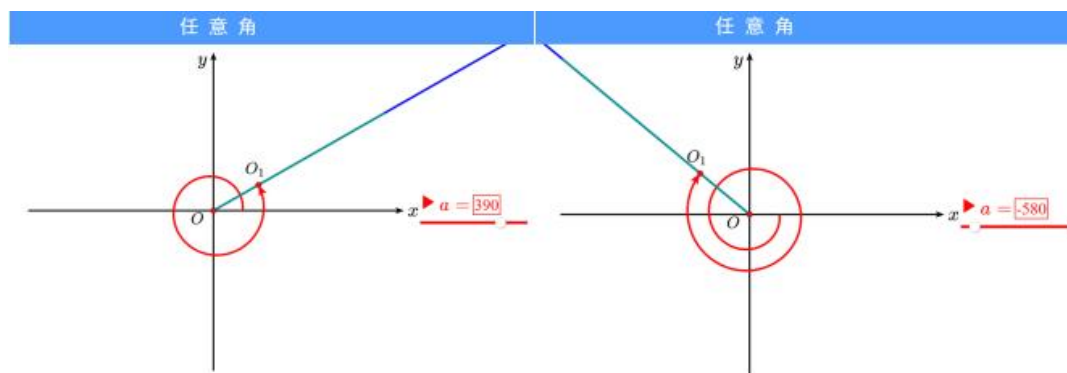


图 3-8 网络画板“任意角”

3.3.3 对象阶段的变式教学模型分析

在对象阶段（Object），需要从先前的活动与操作过程中归纳出关键信息，并将其转化为一个具体的概括对象，从而获得抽象概念的本质属性。这一阶段重点在于对抽象概念的深入理解。引入概念性变式可以促进学习者抽象出概念，显著激发学生的认知活动。同时运用非概念变式辅助，可以减少概念中非本质属性的干扰。由此在这一阶段引入概念变式和非概念变式来辨认概念中的关键要素，清除误导性的因素，可以有效地帮助学生更好地理解数学概念。

3.3.4 图式阶段的变式教学模型分析

图式阶段（Scheme）目的在于将学生对象阶段形成的抽象概念与已知的概念联系起来，对知识进行应用加以巩固，从而更好地掌握和巩固抽象概念，形成稳固的心理图式。为了达成教学目的，教师可以通过概念性变式设计变式题组，利用各种变式题引导学生发现不同概念之间的联系与区别^[31]。还可以利用思维导图、概念图、表格等对四阶段所学知识做一个小结。这样突出概念的核心，促进学生对概念的多维度领会，构建出完整的概念体系。

例如，在学习完“三角函数的单调性”的概念后，可以设计一系列的变式题组对其类型的函数性质进行巩固。

例题：求函数 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ 的单调区间。

变式 1：求函数 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$ 上的单调区间。

变式 2：求函数 $f(x) = \sin(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$ 上的单调区间。

变式 3：若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调，求 ω 的取值范围。

变式 4：若函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})$ 是区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的增函数，求正实数 ω 的取值范围。

变式 5：若函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega < 0$) 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减，求实数 ω 的取值范围。

变式 6：若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$)，对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) \leq f(\frac{\pi}{3})$ ，并且 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上不单调，求 ω 的最小值。

上面 6 个变式层层递进，由于学生已经学了正、余弦函数的单调性，例题类比求正、余弦型函数的单调性，再结合周期函数的性质求 ω ，实现对概念的多角度理解，通过多角度把握概念的本质属性。变式习题合理设计，呈现出恰当的难度渐进，既遵循了学生的认知发展规律，又更有效地促进了学生综合解题能力的提升。

3.4 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学路径

随着时代的发展，数学教育已经从传统单一的讲解转变成一种深入探究的方式，将实践融入三角函数概念当中。通过实际操作，帮助学生掌握新的知识，进一步增强他们的学习技能。结合 APOS 理论，采取多种多样的变式教学方式，深入探究三角函数概念的本质属性，以满足三角函数概念的需求。

(1) 结合 APOS 理论四阶段，采用合理的变式教学方式

在活动阶段，通过引入直观的情境变式和活动变式，用网络画板等工具辅助，使得学生能体会到概念的雏形；在过程阶段，主要依靠网络画板、白板及其他多种多媒体工具的展示，辅导学生在诸多“变化”现象中归纳出概念中“恒定不变”的本质，进而形成定义；对象阶段，运用概念的多种形式变化，协助学生更准确地辨别和把握概念本质；图式阶段，

通过问题的多种变式,辅助学生从不同视角去解读概念。利用概念图、表格、思维导图等多样的图式形式引导学生构成完整的心理图式。

(2) 利用信息化技术促进变式教学

信息化技术的运用不仅可以使得教学内容更加直观和生动,更能够提升学生的学习积极性和参与度。在概念教学尤其涉及几何图象问题时,教师可以借助网络画板、超级画板、几何画板或者 GGB 等多种数字工具,利用网络资源,通过制作演示模版呈现几何图象的动态轨迹向学生展示概念生成的动态过程。网络画板等信息化技术的使用不局限于 APOS 理论的过程阶段,设计合理,各阶段均可应用。这样应用使得抽象的几何图象变得更加通俗易懂,静态的几何图形变得更生动有趣,能刺激学生的学习热情,同时也有助于强化学生们的空间感知能力,提高他们的直观想象素养。

(3) 注重思维引导,重视过程教学

新的课程改革要求教师重视教与学的关系,让学生成为课堂的主人翁。结合 APOS 理论的变式教学更注重学生的思维活动,注重概念的生成过程。让学生们深入理解三角函数概念的形成,加深概念与概念之间的联系,从而提升学生的认知水平,拓宽视野,增强他们的创新精神。

第 4 章 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学设计

4.1 案例一：三角函数的概念教学设计

4.1.1 三角函数的概念教学设计思路

基于 APOS 理论和变式教学理论的结合，设计了“三角函数的概念”教学模式，旨在更有效地教授三角函数的概念，最终在学生思维中形成一个完整的概念图式知识网络。

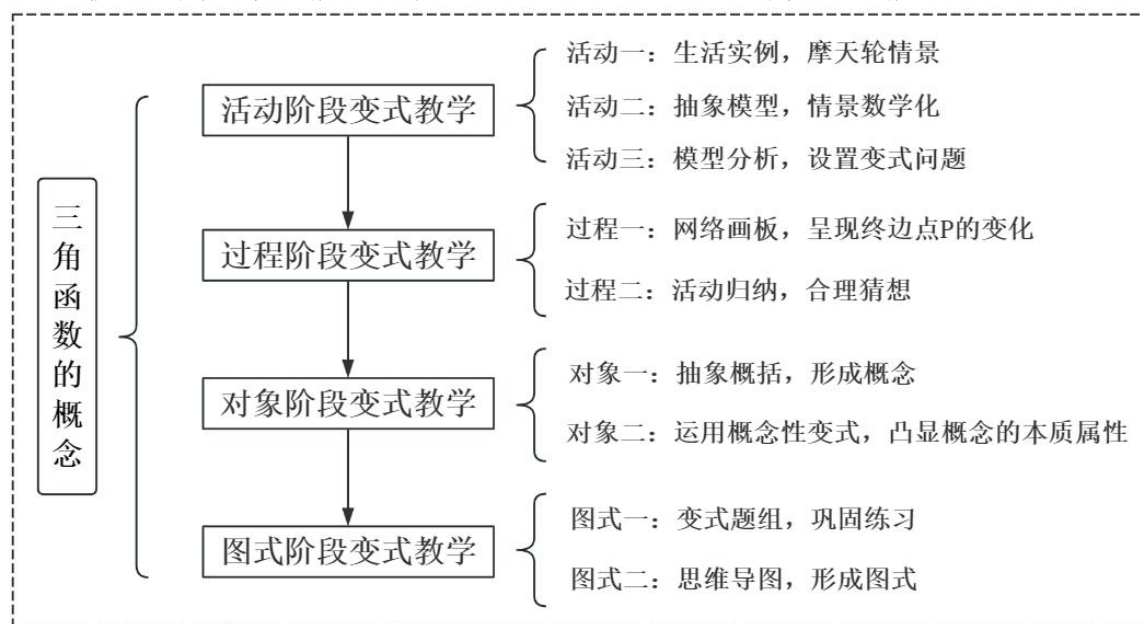


图 4-1 基于 APOS 理论的“三角函数的概念”变式教学设计思路图

4.1.2 教学内容分析

“三角函数的概念”是高中数学概念的关键角色，在教材中充当了衔接前后知识的纽带作用。继“任意角和弧度制”的学习后，关于角的认知不再局限于“锐角”，角度的概念从“锐角”延伸至“任意角”，角度的性质也由原先的“静态”状态扩展到“动态”状态。本节课接着学习“任意角的三角函数”概念，此过程需要利用平面直角坐标系上的单位圆来分析三角函数，研究的范畴也由单一的“平面图形”拓展到“平面直角坐标系”上。

4.1.3 学情分析

(1) 知识储备：在初中阶段，学生们开始接触锐角三角函数。此外，前一堂课他们已经学了任意角和弧度制的概念，但目前学生所学的知识不足以深入三角函数的本质属性，也不能很熟练地运用所学概念来描述现实现象。

(2) 理解能力：高中学生拥有较好的几何直观想象能力，以及较好的数据处理、分

析、综合、推理的能力。

(3) 思维障碍: 由于缺乏坐标系的支持, 学生很难将角的终边与单位圆的交点联想到三角函数上, 从而使得这种抽象的概念变得难于理解。

4.1.4 教学目标

1、学习目标

- (1) 理解任意角三角函数(包括正弦函数、余弦函数、正切函数)的定义。
- (2) 熟悉任意角的三角函数在各个象限中的正负符号。
- (3) 了解并会应用诱导公式一。
- (4) 会利用角的终边上的点的坐标求角的正弦、余弦、正切。
- (5) 会将三角函数概念应用于实际中。

2、核心素养

- (1) 借助单位圆理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义, 培养数学抽象的核心素养。
- (2) 会利用角的终边上的点的坐标求角的正弦、余弦、正切, 提升数学运算的核心素养。
- (3) 掌握公式并会应用, 强化逻辑推理的核心素养。

4.1.5 教学重难点

重点: 任意角三角函数的定义。

难点: 半径 r 与角度 α , 坐标系 x 和 y 之间的关系。

4.1.6 教学过程设计

(1) 活动阶段——情景引入, 活动变式

活动 1: 同学们乘坐过摩天轮吗? 知道摩天轮是怎样运行的吗? (借助网络画板资源展示动态的摩天轮模型如图 4-2)

活动 2: 如图 4-3, 将摩天轮抽象为一个直径为 $2R$ 的圆, 座舱抽象成在圆上旋转的点。假设圆的中心离地面的距离为 h_0 , 圆上的点旋转一圈需要 1800 秒。以 OA 为初始位置, 摩天轮座舱从 A 点开始以一个逆时针的方向旋转, 那么在 225 秒后, 座舱与地面之间的距离将变为多少?

【设计意图】: 通过活动 1、2, 从生活中学生熟悉的摩天轮出发, 利用多媒体技术展示摩天轮的运行过程, 结合他们的认知特点和身心发展规律, 以实际问题为基础, 引导他们深入探索, 激发学生对本堂课的学习兴趣。通过描述乘坐摩天轮的过程, 培养学生的直观想象能力, 感受座舱在旋转的过程中的上升下降, 以及在旋转过程中周而复始的规律。

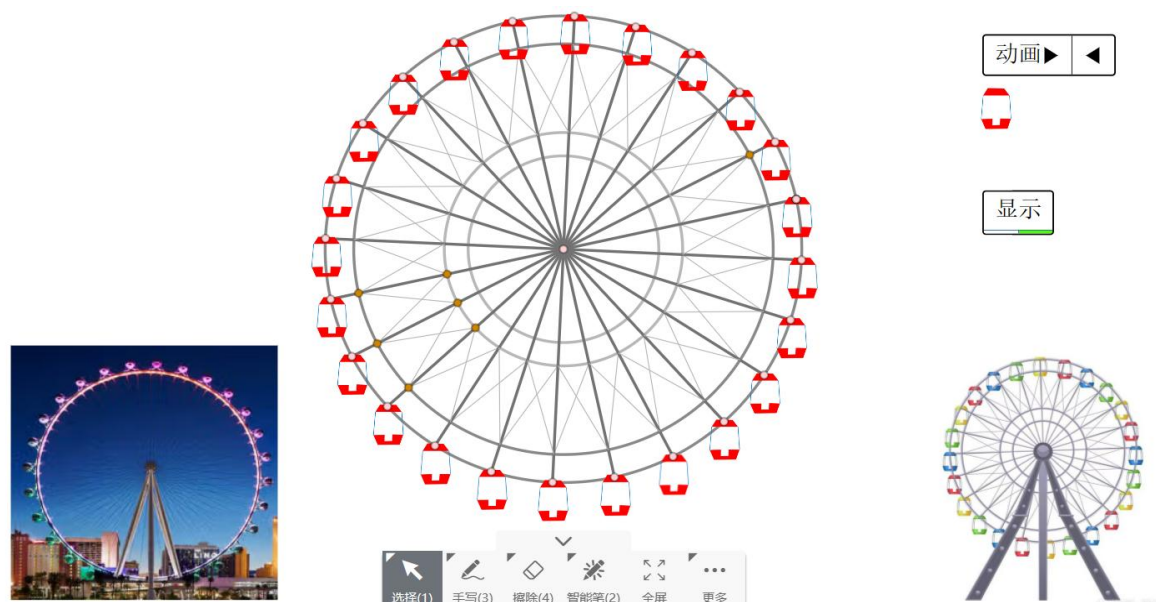


图 4-2 网络画板“摩天轮”动画模型

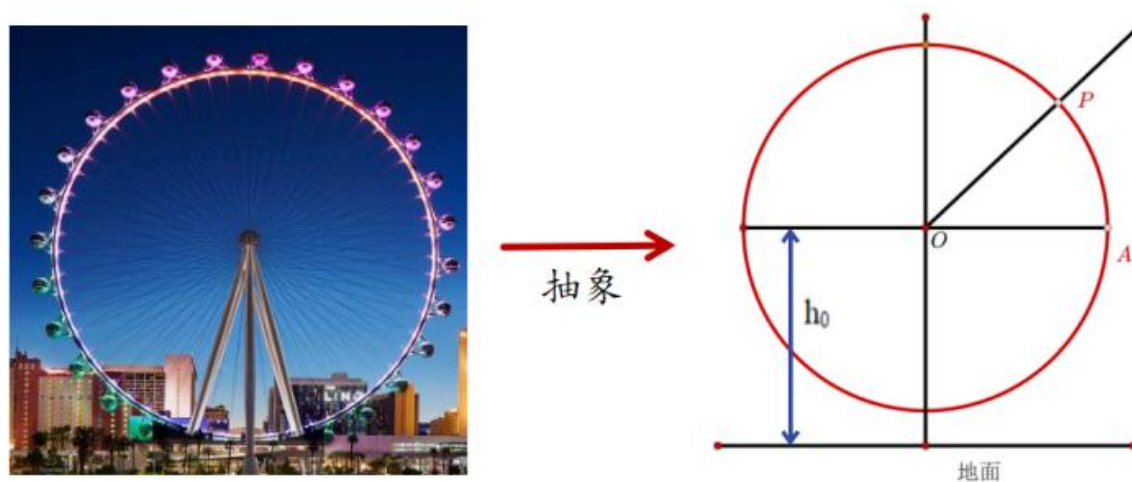


图 4-3 摩天轮实景图与抽象图

分析：做辅助线（如图 4-4）。从 A 点移动到达 P 点位置时，座舱与地面之间的距离为 PH 长度。此时， $MH=h_0$ ，而 $PH=PM+MH$ 。这表明可以将原本的求解 PH 的问题改为求解 PM。

225 秒后，座舱从 A 点绕 O 点旋转了 $\frac{\pi}{4}$ ，这是初中学生所学的解决等腰直角三角形的问题，即关于锐角三角函数问题。

$$\text{简答：} \angle MOP = \frac{2\pi \times 225}{1800} = \frac{\pi}{4}, \quad PM = OP \cdot \sin \angle MOP = \frac{\sqrt{2}}{2} R, \quad PH = \frac{\sqrt{2}}{2} R + h_0.$$

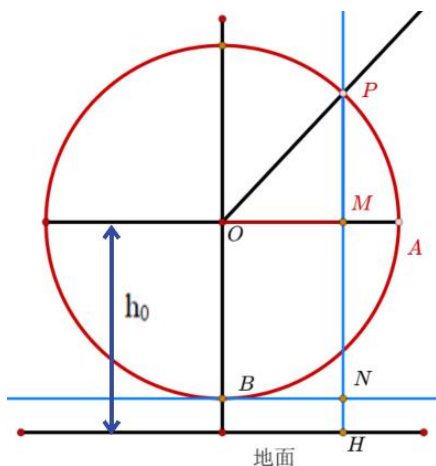


图 4-4 摩天轮抽象图

类比锐角三角函数问题，设计四个过程性变式问题：

过程性变式 1:

变式 1: 过了 600 秒, 座舱与地面之间的距离将为多少?

变式 2: 过了 900 秒, 座舱与地面之间的距离将为多少?

变式 3: 过了 1200 秒, 座舱与地面之间的距离将为多少?

变式 4: 过了 1575 秒, 座舱与地面之间的距离将为多少?

【设计意图】：高中生已具备丰富的实践经验和科学知识。为了让他们更好地理解三角函数的概念，设计了有关数学的过程性变式 1 的 4 个问题，将其融入现实问题的数学模型之中，以便让他们从中获得数学的乐趣。同时通过设计变式问题 1、2、3、4，有效地将锐角三角函数扩充到超过 90° 的三角函数的计算，这样就为获取任意角的三角函数概念做了铺垫。

分析：600 秒后，座舱从 A 点绕 O 点旋转了 $\frac{2\pi}{3}$ ，这变成了钝角三角函数问题。（借

助网络画板，P 点移动到相应位置，如图 4-5）此时 $\sin \angle MOP = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。同理 900 秒

后, 座舱从 A 点绕 O 点旋转了 π , 此时 $\sin \angle MOP = 0$ 。

简答: 600 秒后, $\angle AOP = \frac{2\pi \times 600}{1800} = \frac{2\pi}{3}$, $\sin \angle MOP = \sin (\pi - \angle MOP) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$PM = OP \cdot \sin \angle MOP = \frac{\sqrt{3}}{2} R, \text{ 则 } PH = \frac{\sqrt{3}}{2} R + h_0. \text{ 900 秒时, } \angle AOP = \frac{2\pi \times 600}{1800} = \pi,$$

$PM = OP \cdot \sin(\pi - \angle AOP) = OP \cdot \sin \angle MOP = 0$, 则 $PH = h_0$ 。

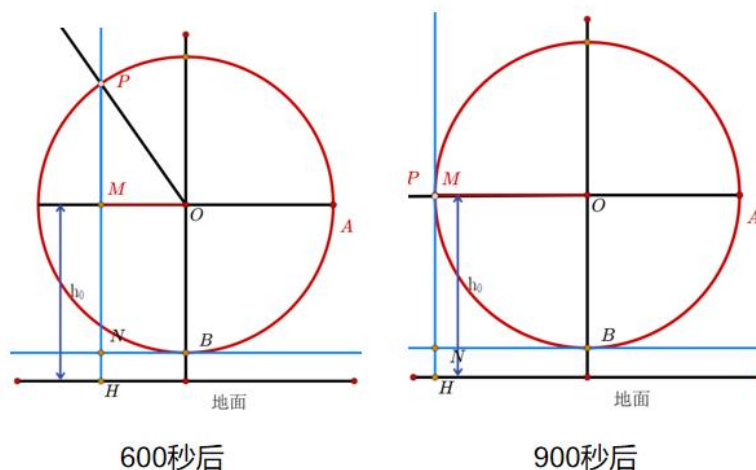


图 4-5 600 秒、900 秒后 P 点的位置变化

分析：1200 秒，1575 秒后。此刻的情况和先前有所不同（如图 4-6），座舱位于起始位置 A 点的下方。座舱从 A 点绕 O 点分别旋转了 $\frac{4\pi}{3}$ 、 $\frac{7\pi}{4}$ 。

此时 $\sin \angle MOP = \sin (\angle AOP - \pi)$ 。PM = OP · sin ∠MOP，但 PH = MH - PM。因此和上述两种情况有所不同。

简答：1200 秒后，PM = sin ∠MOP = sin $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 PH = $h_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}R$ 。1575 秒后，

PM = sin ∠MOP = sin $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 PH = $h_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}R$ 。

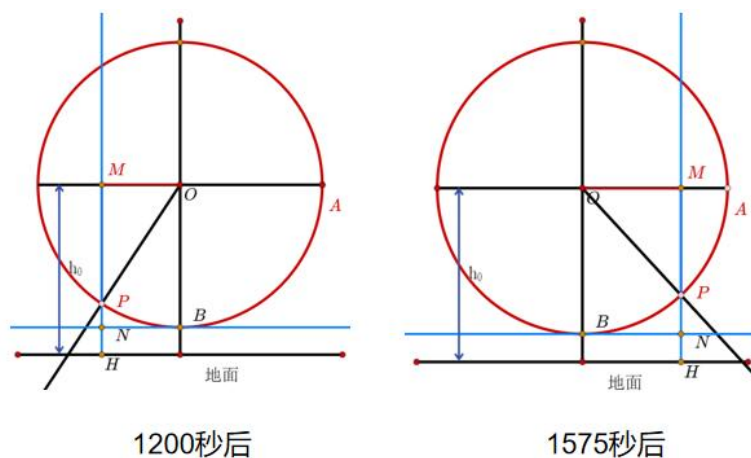


图 4-6 1200 秒、1575 秒后 P 点的位置变化

过程性变式 2：过了 t 秒，座舱与地面之间的距离将为多少？它和时间 t 存在怎样的联系？

分析：225 秒、600 秒、900 秒、1200 秒、1575 秒后，结合现有的知识，转化为锐角

三角函数, 则座舱距离地面的高度为 $h_1 = h_0 + R\sin\left(\frac{225}{1800} \cdot 2\pi\right)$ 、 $h_2 = h_0 + R\sin\left(\pi - \frac{600}{1800} \cdot 2\pi\right)$ 、

$h_3 = h_0 + R\sin\left(\pi - \frac{900}{1800} \cdot 2\pi\right)$ 、 $h_4 = h_0 - R\sin\left(\frac{1200}{1800} \cdot 2\pi - \pi\right)$ 、 $h_5 = h_0 - R\sin\left(\frac{1575}{1800} \cdot 2\pi - \pi\right)$ 。这

样看来, 以学生现有的知识结构还不能用一个等式表示 t 秒座舱与地面之间的距离。

为了简化得出公式, 引导学生合理猜想。当 $t < 450$ 秒 ($\angle AOP < 90^\circ$), $h = h_0 + R\sin \frac{t\pi}{900}$ 。

在 $t \geq 450$ 秒 ($\angle AOP \geq 90^\circ$) 能不能同样满足 $h = h_0 + R\sin \frac{t\pi}{900}$? 这就和这节要学的任意角

的三角函数概念有关。需要将三角函数的定义推广到任意角。

【设计意图】: 为了实现 APOS 理论的第一阶段 (活动阶段) 的教学目标, 通过过程性变式 1、2, 不仅可以有效地将现实问题融入高中课程中, 还将锐角三角函数过渡到任意角的三角函数, 同时也清晰地展现出已知的锐角三角函数和未知的任意角的三角函数概念的联系。这样的设计加深了高中学生对“三角函数的概念”的理解, 并且培养学生举一反三的能力。

(2) 过程阶段——概念辨析, 过程变式

在原有动态摩天轮模型基础上, 显示直角坐标系, 隐藏与摩天轮相关元素 (如图 4-7)。令 $R=1$, 即摩天轮模型变为单位圆。把射线 OA 视为 x 轴的非负半轴。那么点 A 的坐标是 $(1, 0)$ 。点 P 定义为角 α 终边与单位圆的交点, 设为 (x, y) 。再设 $\angle AOP = \alpha$ 。

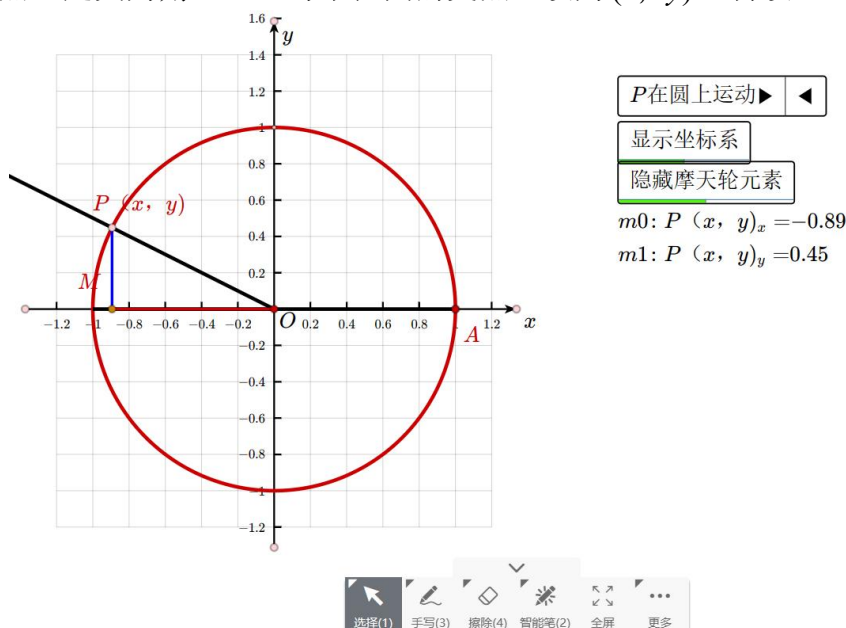


图 4-7 “单位圆”动态网络画板

过程 1: 网络画板演示点 P 从点 $A(1, 0)$ 开始在单位圆上运动。从第一象限到第四象限的过程 (如图 4-8、4-9、4-10)。

过程性变式 3:

变式 1: 单位圆上 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 点 P 的坐标是什么?

变式 2: 单位圆上 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 点 P 的坐标是什么?

变式 3: 单位圆上 $\alpha = \pi$, 点 P 的坐标是什么?

变式 4: 单位圆上 $\alpha = \frac{4\pi}{3}$, 点 P 的坐标是什么?

变式 5: 单位圆上 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$, 点 P 的坐标是什么?

简答: 点 P 的坐标分别是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 、 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 。

【设计意图】: 摩天轮旋转 225 秒、600 秒、900 秒、1200 秒、1575 秒时, 对应的 α 分别为 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{2\pi}{3}$ 、 π 、 $\frac{4\pi}{3}$ 、 $\frac{7\pi}{4}$ 。将活动阶段的摩天轮问题转化为单位圆上点的坐标问题。

加强过程阶段与活动阶段的联系, 引导学生思考。

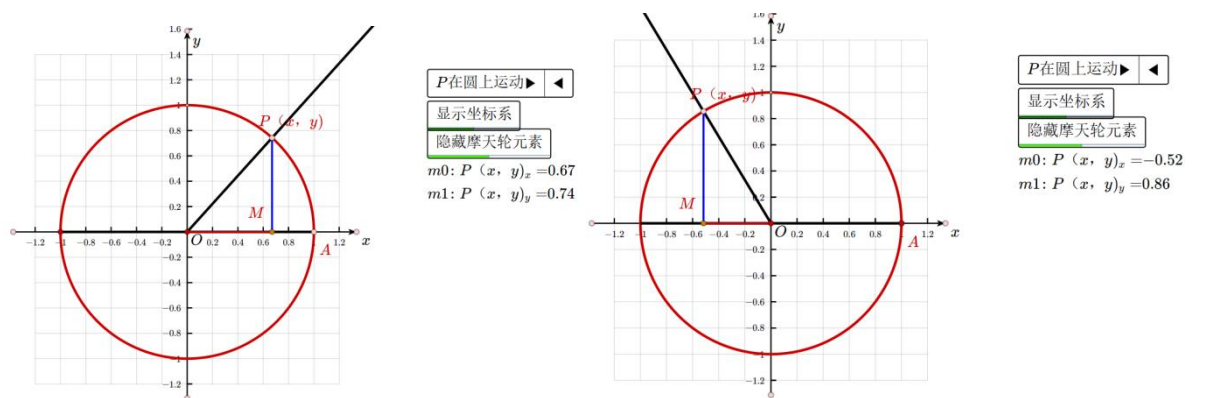


图 4-8 “单位圆”上 P 点的变化 1、2

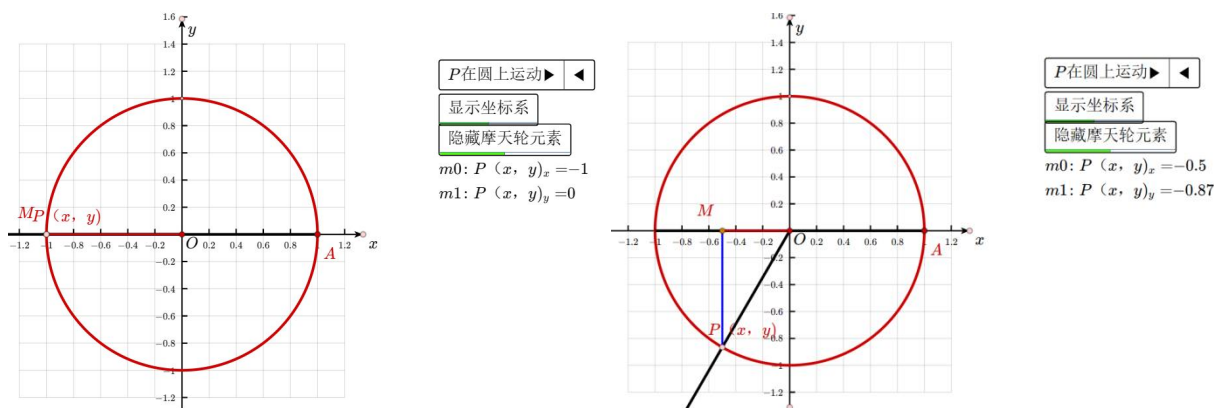


图 4-9 “单位圆”上 P 点的变化 3、4

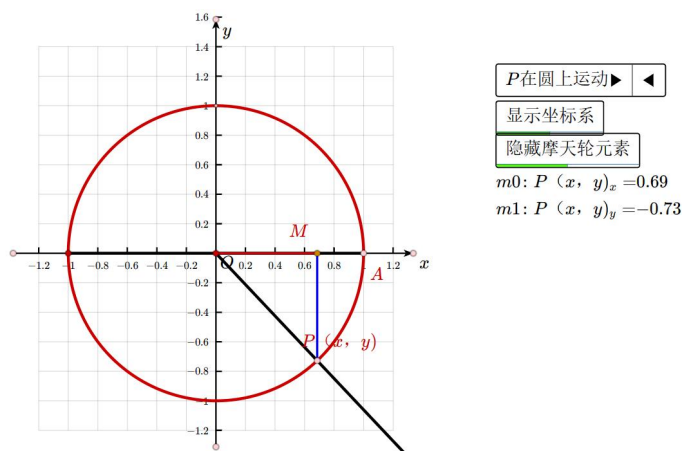


图 4-10 “单位圆”上 P 点的变化 5

过程 2: 一般地, 任意给定一个角 α , 它的终边 OP 与单位圆交点 P 的坐标能唯一确定吗?

简答: 能。

【设计意图】: 通过过程 1 和过程性变式 3 中的 5 个问题, 计算 P 点坐标, 让学生深刻理解角 α 与坐标之间的一一对应关系, 为下一阶段抽象出任意角三角函数打下坚实的基础。

过程 3: P 点运动过程中有哪些变量? 哪两个变量之间存在函数关系, 能否写出函数解析式?

分析: 这个问题以学生现有的知识体系还无法直接得出 x 、 y 与 α 之间存在函数关系。这就需要引出任意角的三角函数概念。

简答: 1, $x^2 + y^2 = 1$, x 、 y 间不是函数关系; 2, $L = \alpha$ 也不是函数关系;

3, x 、 y 与 α 之间可能存在函数关系。猜想 $\sin \alpha = \frac{P_y}{OP} = y$, $\cos \alpha = \frac{P_x}{OP} = x$, $\tan \alpha = \frac{P_y}{P_x} = \frac{y}{x}$ 。

(3) 对象阶段——概念形成, 概念性变式

引导: 为了准确刻画 x 、 y 与 α 之间的函数关系。引入一个新的概念——任意角的三角函数。

对象 1: 设 α 是一个任意角, $\alpha \in \mathbb{R}$, 它的终边 OP 与单位圆交点 $P(x, y)$ 。

(1) 把点 P 的纵坐标 y 叫做 $\angle \alpha$ 的正弦函数, 记作 $\sin \alpha$, 即 $y = \sin \alpha$ 。

(2) 把点 P 的横坐标 x 叫做 $\angle \alpha$ 的余弦函数, 记作 $\cos \alpha$, 即 $x = \cos \alpha$ 。

(3) 把点 P 的纵坐标和横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 $\angle \alpha$ 的正切函数, 记作 $\tan \alpha$, 即

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha \quad (x \neq 0)。$$

我们把正弦函数、余弦函数和正切函数统称为三角函数。

对象 2: 给出下列表 4-1, 适当地留下几个空格, 让学生自己独立完成。

表 4-1 三角函数概念符号表

三角函数	定义一: $ OP =1$	定义二: $ OP =R$	定义域
$\sin \alpha$	y	$\frac{y}{R}$	$\alpha \in R$
$\cos \alpha$	x	$\frac{x}{R}$	$\alpha \in R$
$\tan \alpha$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

【设计意图】: 教师引导学生抽象出任意角的三角函数概念, 同时以概念图表的形式加深学生对概念的抽象理解, 并与活动和过程阶段产生共鸣。

问题: 如果改变终点的位置, 这三个函数的比值是否会发生变化? (网络画板展示 P、P₁ 点的联系, 如图 4-11, P₁ 点可在终边上移动。同时让学生思考交流, 提出自己的想法。)

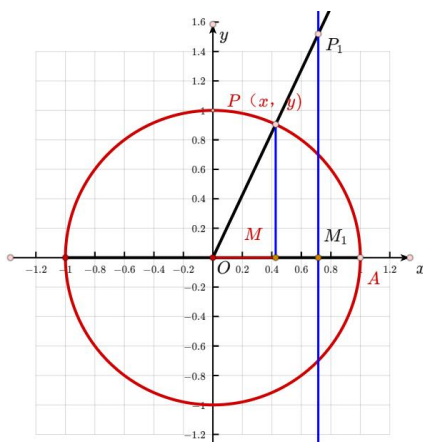


图 4-11 网络画板展示

分析: 根据相似三角形的性质可证不会发生变化。

对象 3: 同一终边上的不同终点位置对应的角度是一样的, 三角函数的值不会因为终点位置发生变化而变化。

【设计意图】: 通过网络画板建立变化的三角形模型, 让学生能够更加清楚地感受到三角函数值的稳定性。

问题: $\sin \alpha = \frac{|MP|}{|OP|} = y$ 、 $\cos \alpha = \frac{|OM|}{|OP|} = x$ 和 $\tan \alpha = \frac{|MP|}{|OM|} = \frac{y}{x}$ 在第一象限角是否正确?

确?

分析: 在第一象限角是正确的。

概念性变式（突出三角函数在各象限符号的变化）：

变式 1： $\sin \alpha = \frac{|MP|}{|OP|} = y$ 、 $\cos \alpha = \frac{|OM|}{|OP|} = x$ 和 $\tan \alpha = \frac{|MP|}{|OM|} = \frac{y}{x}$ 在第二象限角是否正

确？

变式 2： $\sin \alpha = \frac{|MP|}{|OP|} = y$ 、 $\cos \alpha = \frac{|OM|}{|OP|} = x$ 和 $\tan \alpha = \frac{|MP|}{|OM|} = \frac{y}{x}$ 在第三象限角是否正

确？

变式 3： $\sin \alpha = \frac{|MP|}{|OP|} = y$ 、 $\cos \alpha = \frac{|OM|}{|OP|} = x$ 和 $\tan \alpha = \frac{|MP|}{|OM|} = \frac{y}{x}$ 在第四象限角是否正

确？

分析：变式 1 为例，假如 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ， $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，发现这与 $\sin \alpha = \frac{|MP|}{|OP|} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，正

确； $\cos \alpha = x = -\frac{1}{2} \neq \frac{|OM|}{|OP|} = \frac{1}{2}$ ，不正确； $\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\sqrt{3} \neq \frac{|MP|}{|OM|} = \sqrt{3}$ ，不正确。

【设计意图】：通过概念性变式的 3 个问题，让学生能够准确理解三角函数符号的变化。借助网络画板，使得学生理解到第一象限角的正弦、余弦、正切的概念与锐角的正弦、余弦、正切的概念是相同的，比值也相等。但是在第二、三、四象限跟锐角正弦、余弦、正切的比值不完全相同，应该具体问题具体分析。

对象 4： 结合三角函数值的计算，判断各个象限的三角函数值的符号。

分析：结合三角函数值的计算，可以判断在第一、二象限，正弦函数的值为正，而在第三、四象限，正弦函数的值则为负；在第一、四象限，余弦函数的值为正，而在第二、三象限，余弦函数的值则为负；在第一、三象限，正切函数的值为正，而在第二、四象限，正切函数的值则为负（如图 4-12）。

口诀：一全正，二正弦，三正切，四余弦。

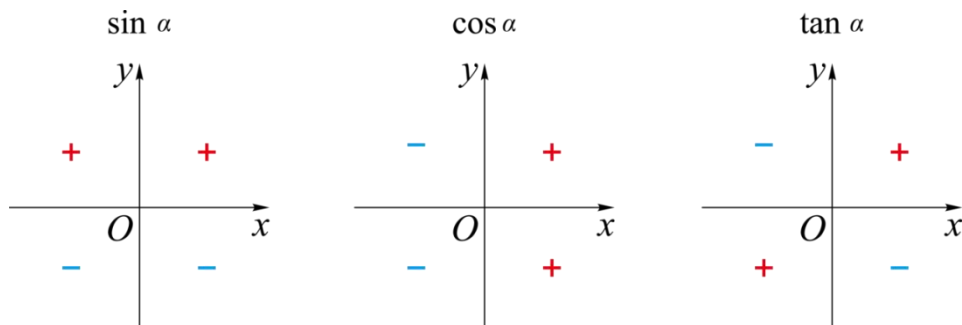


图 4-12 三角函数正负值分布图

【设计意图】：通过网络画板展示，可以判断三角函数值在第一、二、三、四象限角的正负值。三角函数正负值分布图的设计，培养学生的直观想象能力，提高学生分析问题、概括问题的能力。

问题：结合任意角的概念，思考终边相同的角的同名三角函数值相等吗？

简答：相等。由三角函数的定义可知（结合网络画板动态展示，如图 4-13。）

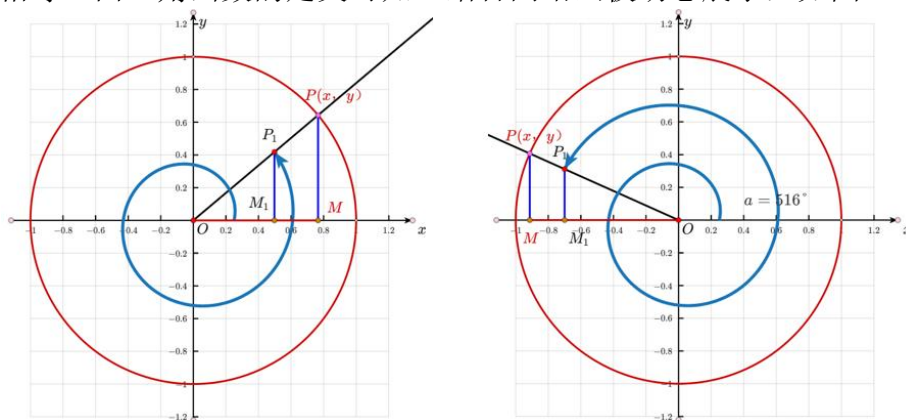


图 4-13 网络画板“任意角”相关

对象 5: 由此可得诱导公式一（1）语言表示：终边相同的角的同一三角函数的值相等。

（2）式子表示： $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha$ 、 $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha$ 、 $\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha$ ，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

非概念变式 1:

变式问题 1: 若 $\sin \alpha = \sin \beta$ ，则一定有 $\alpha = \beta$ 吗？

变式问题 2: 同一三角函数值相等时，角是否一定相等或相差周角的整数倍？

分析：均不一定。（1）由终边相同的角，当 α 、 β 的终边相同时，正弦值相等，但角不一定相等。（2）举例 $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$ ，角不一定相等或相差周角的整数倍。

【设计意图】：通过对象 5 和非概念变式 1 中的 2 个问题，探索终边相同角的同一三角函数的问题，让概念抽象化、具体化，减少学生思维的误区。

（4）图式阶段——概念巩固，形成图式

题型 1: 三角函数的定义及应用

例 1：已知角 α 终边上一点 $P(x, 3)$ ，($x \neq 0$)，且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}x$ ，求 $\sin \alpha$ ， $\tan \alpha$ 。

例 2：已知角 α 的终边过点 $(4, 3)$ ，则 $2\sin \alpha + 5\cos \alpha$ 的值为（）。

例 3：点 $A(x, y)$ 是 -1560° 角终边与单位圆的交点，则 $\frac{y}{x}$ 的值为（）。

例 4：如果角 α 的终边与单位圆的交点为 $P\left(\frac{3}{5}, y\right)$ ($y < 0$)，则 $\tan \alpha$ 的值为（）。

例 5: 在平面直角坐标系中, 已知角 α 的终边经过点 $P(\alpha, \alpha - 3)$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 α 的值为 ()。

【设计意图】: 通过题型 1, 层层推进, 设计终边或终边上的点求解三角函数值的题组, 在学生头脑中建立关于三角函数基本的图式, 提高学生解答三角函数的能力, 形成基本的解题图式。

题型 2: 三角函数值的符号

例 6: 若 α 是第二象限角, 点 $P(\cos \alpha, \tan \alpha)$ 在第_____象限。

非概念变式 2:

变式 1: 若 α 是第三象限角, 点 $P(\cos \alpha, \tan \alpha)$ 在第_____象限。

变式 2: 若 α 是第三象限角, 点 $P(\sin \alpha, \tan \alpha)$ 在第_____象限。

变式 3: 若 α 是第四象限角, 点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第_____象限。

例 7: 判断下列各式的符号: ① $\sin 183^\circ$; ② $\tan \frac{7\pi}{4}$; ③ $\cos 5$ 。

【设计意图】: 通过题型 2 及非概念变式 2 中的三个问题, 探索解答变式题组, 逐步让抽象的概念具体化, 加深对三角函数值正负符号的印象。由浅入深、由易到难, 逐步让学生解决具体问题, 建立理解三角函数符号的思维图式。

题型 3: 诱导公式一的应用

例 8: $\tan 405^\circ - \sin 450^\circ + \cos 750^\circ$

例 9: 化简式子: $a^2 \sin(-1350^\circ) + b^2 \tan 405^\circ - 2ab \cos(-1080^\circ)$;

【设计意图】: 通过题型 3, 可以让学生更好地掌握诱导公式一, 以及如何运用它来探究和分析相关问题。加强学生对三角函数概念的理解, 能够更好地运用数学和几何知识来分析和处理复杂的数学问题, 实现了 APOS 理论的第四阶段 (图式阶段) 的目标, 加强了学生主动构建任意角三角函数心理图式结构。

形成图式, 思维导图做最后的总结, 如图 4-14。

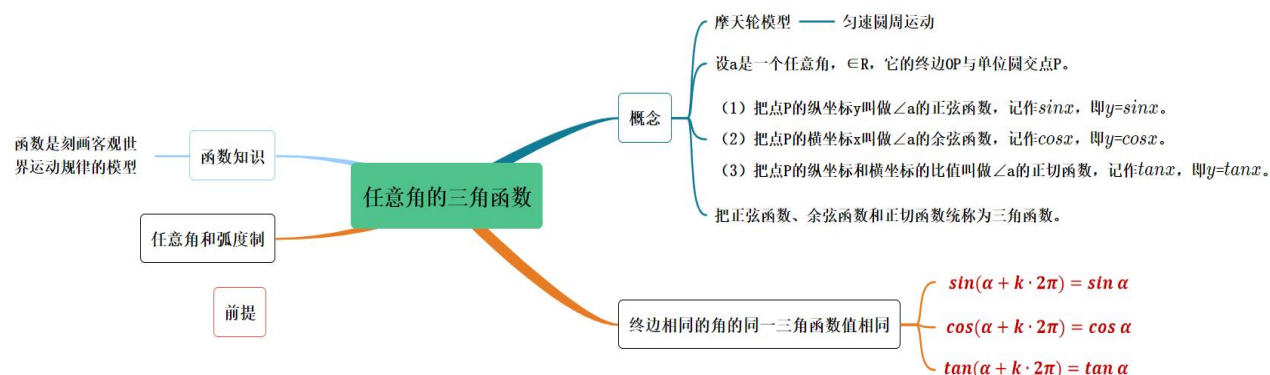


图 4-14 “任意角的三角函数” 思维导图

4.2 案例二：正弦函数、余弦函数的性质教学设计

4.2.1 正弦函数、余弦函数的性质教学设计思路

通过设计 APOS 理论活动、过程、对象、图式阶段和变式教学结合，设计了“正弦函数、余弦函数的性质”教学模式。由于这一节内容较多，需要 2 课时。教学设计不涉及正弦函数、余弦函数的单调性和最值。

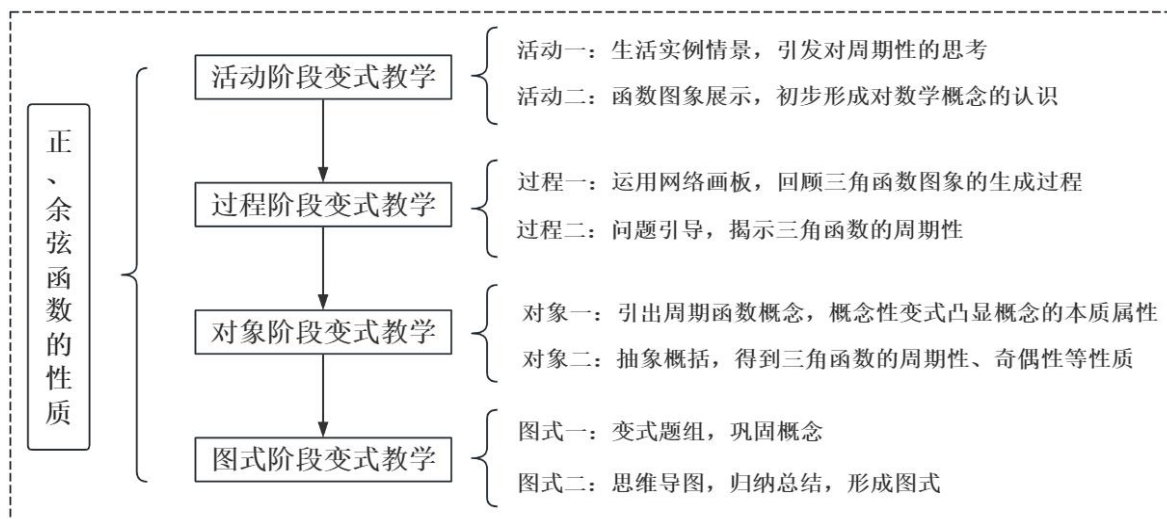


图 4-15 基于 APOS 理论的“正弦函数、余弦函数的性质”变式教学设计思路图

4.2.2 教学内容分析

三角函数是一种具有深远影响的数学模型，可以用来描述客观世界中的周期性变化，具有极其重要的实际应用价值。本节课在学了正、余弦函数的图象的基础上，继续学习三角函数的性质。经过前面几节课的初步探索，学生已经掌握了任意角三角函数的概念、诱导公式等知识。而在本节课程中，将深入探讨三角函数的性质，其中第一个突出的性质就是它的周期性。本节课学习有着重要的地位，发展学生数学直观、数学抽象、逻辑推理、数学建模的核心素养。

4.2.3 学情分析

- (1) 知识储备：学习了三角函数的有关概念、诱导公式及图象。
- (2) 理解能力：已具有一定的几何直观能力与抽象思维能力。
- (3) 思维方法：需要数形结合、转化与化归、从特殊到一般的数学思想。

4.2.4 教学目标

1、学习目标

- (1) 了解周期函数的概念。

(2) 了解正弦函数、余弦函数的周期性、奇偶性。

(3) 会应用三角函数的性质。

2、核心素养

(1) 了解周期函数、周期、最小正周期的意义，培养数学抽象的核心素养；

(2) 会求常见三角函数的周期，提升数学运算的核心素养；

(3) 通过图象直观理解奇偶性，并能正确确定相应的对称轴和对称中心，提升直观想象的核心素养。

4.2.5 教学重难点

重点：如何求解三角函数的周期性、奇偶性；

难点：理解周期函数的概念。

4.2.6 教学过程设计

(1) 活动阶段——情景引入，活动变式

活动 1：周而复始的现象在自然界和日常生活中都常见，能举一些具体的例子吗？

举例：每年四季的变化，白居易诗歌中描写的“野草”，公园中转动的摩天轮上的某个位置，转动的风车（图 4-16、4-17）……



图 4-16 一年四季变化图和野草一岁一枯荣图

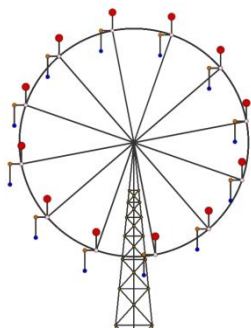


图 4-17 转动的摩天轮图和风车转动图

活动 2：当前时间为上午 10 点，经过 24 个小时是几点？今天是星期一，7 天以后是星期几？

简答：（1）还为上午 10 点。每 24 小时内，时间顺序经历从 0 点、1 点、2 点直至 24 点的循环往复。（2）还是周一。一周的周期从周一开始，依次经过周二、周三……直到周日，每 7 天一个周期循环一周。

【设计意图】：日常生活中有很多周期现象。为了使教学内容与实际生活息息相关，活动 1、2 让学生观察现实中的直观情景。学生主动认识世界，从自然的周期现象中引发对周期性的初步影响，建立知识间的联系，这样提高学生概括推理的能力。

活动 3：观察下列图 4-18，是否能发现这些图像有何共同的规律？

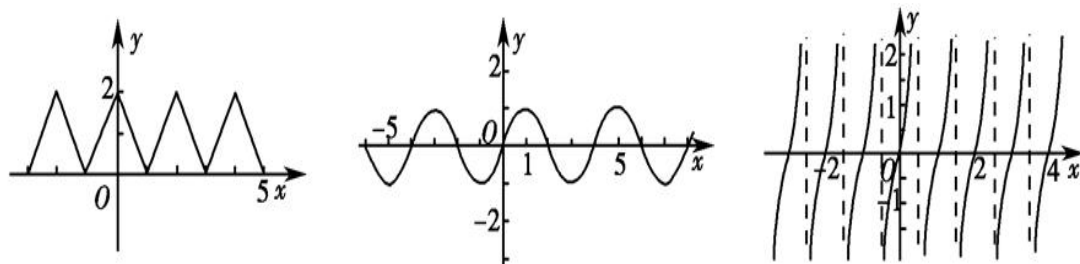


图 4-18 周而复始函数图

简答：函数值每隔相同的单位重复出现，图象发生“周而复始”的变化。

【设计意图】：从自然现象过渡到函数图象，让学生发挥观察图象的能力，化具体为抽象，为抽象出周期函数的概念和概括三角函数的周期性打下基础。

（2）过程阶段——概念辨析，过程变式

过程 1：网络画板展示正弦、余弦函数图象的生成过程。如图 4-19。

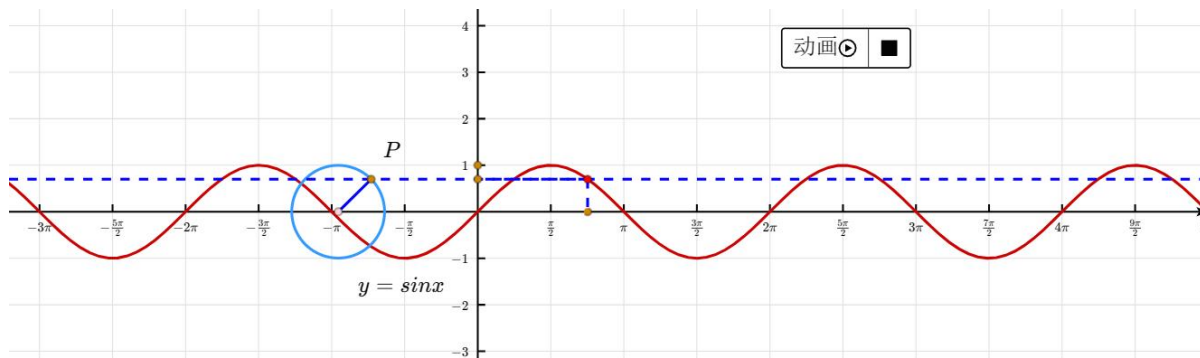


图 4-19 正弦函数图为例

过程 2：结合正（余）弦曲线，可以看出正（余）弦函数有怎样的特征？图象的变化趋势是怎样的？

简答：自变量 x 增加 2π 的整数倍时，函数值重复出现，图象“周而复始”变化。

过程 3：正弦函数和余弦函数都具备“周期性”。它们的“周期性”如何用数学公式抽象表示？

【设计意图】：运用网络画板，学生可以明显发现当自变量增加或减小 2π 时，三角函数的正弦函数和余弦函数的值会不断重复出现。而且这种变化是有规律的，按照一定的周期性变化。此外，学生在之前的学习有接触过周期性的函数，但未具体抽象出周期函数的定义。需要先引出周期函数的概念。

(3) 对象阶段——概念生成，概念性变式

引导：为了准确刻画正弦函数、余弦函数的周期性。需要引入一个新的概念——周期函数的定义。

对象 1：周期函数的概念：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时，也就是 $f(x+T)=f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数，非零常数 T 叫做这个函数的周期。

概念性变式 1：

变式 1：若存在非零常数 a ，使函数 $f(x)$ 在定义域上满足： $f(x+a)=-f(x)$ ，那么 $f(x)$ 是周期函数吗？若是，其周期是什么？

变式 2：若存在非零常数 a ，使函数 $f(x)$ 在定义域上满足： $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ ，则

$f(x)$ 是周期函数吗？若是，其周期是什么？

分析：（1）由已知得， $f(x+2a)=-f(x+a)=f(x)$ ，根据周期函数的定义， $f(x)$ 以 $2a$ 为一个周期的周期函数。（2） $f(x+2a)=\frac{1}{f(x+a)}=f(x)$ ，根据周期函数的定义， $f(x)$ 也是以 $2a$ 为一个周期的周期函数。

【设计意图】：通过概念性变式 1 的 2 个问题，学会应用周期函数的性质判断函数的周期性和求解函数的周期，加深学生对周期函数概念的理解。

问题：那么，怎么证明正弦函数、余弦函数是周期函数？周期是多少？最小正周期是多少？

分析：根据所学诱导公式一： $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ ， $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ 可知。

简答： $f(x)=\sin x=\sin(x+2k\pi)=f(x+2k\pi)$ ， $f(x)=\cos x=\cos(x+2k\pi)=f(x+2k\pi)$ 。

对象 2：正弦函数、余弦函数都是周期函数。 $2k\pi(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$ 都是它们的周期，最小正周期均是 2π 。

概念性变式 2：

变式 1： $\sin(x+\pi)=\sin x$ ， π 可以被视为函数 $y=\sin x$ 的最小正周期，这个结论是否正确？

变式 2： $\cos(x+0)=\cos x$ ，所以 0 可以被视为 $y=\cos x$ 的周期。这种说法正确吗？

变式 3: $\sin(30^\circ + 120^\circ) = \sin 30^\circ$ 是否成立? 能否说 120° 是正弦函数 $y = \sin x$ 的一个周期?

分析: (1) 假设 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $\sin(x + \pi) = \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, 但是 $\sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 所以

$\sin(x + \pi) \neq \sin x$, 这与定义中的定义域内每一个 x 值, 都满足 “ $f(x + T) = f(x)$ ” 的条件不符, 所以 π 不是函数 $y = \sin x$ 的最小正周期。(2) 错误, 周期函数的定义表明非零常数 T 才算。(3) 成立, 因为 $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 。不能, 在定义域内, $\sin(40^\circ + 120^\circ) \neq \sin 40^\circ$ 。

不满足对一切变量 x 都有 $f(x + T) = f(x)$ 。

【设计意图】: 这一阶段已获得正、余弦函数的周期性, 通过设计概念性变式 2 中的反例变式 1、2、3, 让学生从不同角度深入理解三角函数周期性概念, 从而使概念对象的理解过程变得更有意义。这一环节能让学生从反面理解概念, 从而更好地掌握三角函数周期性概念的内涵。

问题: 4π 、 6π 是 $y = \sin x$ 的周期吗? 此函数还有其他周期吗?

简答: 是, 还有 -2π 、 -4π 、 -6π 等。

引导: 研究一个函数的性质, 除了周期性, 还常常从哪几个方面考虑?

简答: 定义域、值域、奇偶性、单调性、最值等。

对象 3: (结合网络画板图象, 如图 4-20 可得)

1、正弦函数、余弦函数的图像向左、向右无限伸展;

2、正弦函数、余弦函数的图像夹在两条平行直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间。

即正弦函数、余弦函数, 定义域: $\mathbf{R}$; 值域: $[-1, 1]$ 。

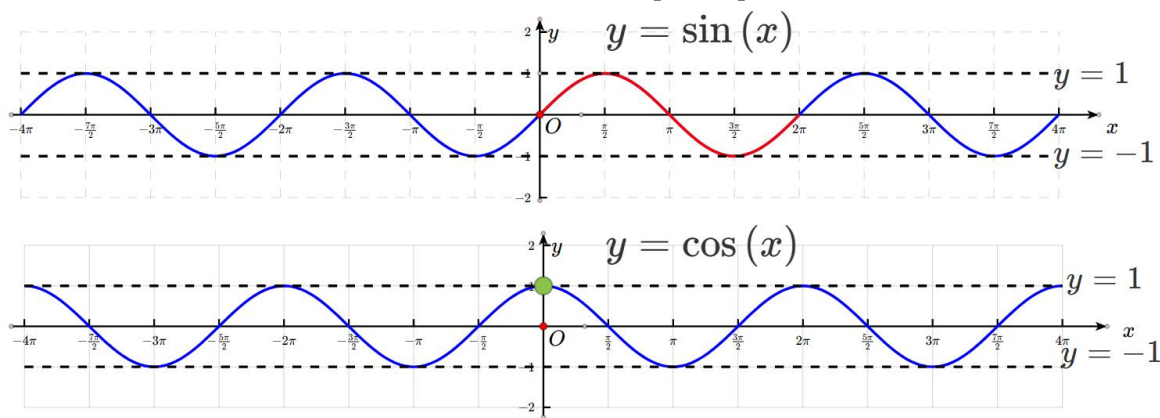


图 4-20 正、余弦函数图象

观察正弦曲线和余弦曲线，可以看到正弦曲线关于原点对称，余弦曲线关于 x 轴对称这个事实。

问题：如何从代数角度证明正弦函数、余弦函数的奇偶性？

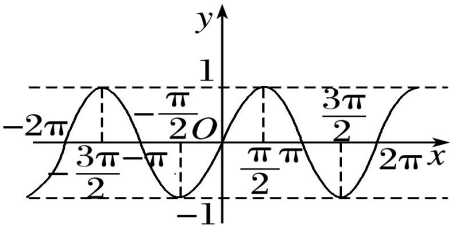
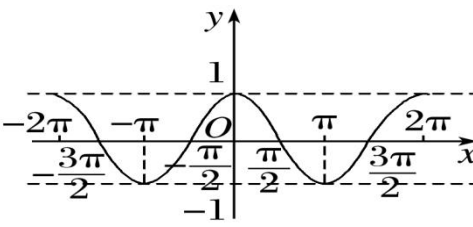
简答：由诱导公式 $\sin(-x) = -\sin x$ ； $\cos(-x) = \cos x$ 得到

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x); \quad f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

对象 4：正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数。

对象 5：总结表 4-2。让学生填空。

表 4-2 正（余）弦函数的性质

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
图象		
定义域	R	R
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
周期性	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
奇偶性	奇函数	偶函数

【设计意图】：问题和概念图的设计旨在让学生从图象中抽象出三角函数性质概念的本质特征，能用精确的数学语言进行描述，逐步深入，螺旋上升，最终在学生思维中形成一个完整的概念知识网络。

(4) 图式阶段——概念巩固，形成图式

例题 1：求函数 $y = \sin 2x$ 的最小正周期？

变式 1：求函数 $y = \cos 2x$ 的最小正周期？

分析：以 $y = \cos 2x$ 为例，设 $y = \cos 2x$ 的最小正周期为 T 。 $\cos[2(x+T)] = \cos x$ 。令 $u = 2x$ ，那么 $\cos(u+2T) = \cos u$ 对所有的实数 u 都适用。而 $y = \cos u$ 的最小正周期为 2π 。可以推断出， $2T$ 等于 2π ，即 $2T = 2\pi$ ， $T = \pi$ 。

变式 2：求 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期？

分析：同样的，设 $f(x)$ 周期为 T ，则 $f(x+T) = f(x)$ ，当 $u = \omega x + \varphi$ 时， $y = A \sin[\omega(x+T) + \varphi] = A \sin[(\omega x + \varphi) + \omega T] = A \sin(u + \omega T) = A \sin u$ 。 $y = \sin u$ 的最小正周期 2π ，从而得出 $|\omega|T = 2\pi$ ，从而得出 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 。 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 是 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 最小正周期。

变式 3: 求下列函数的周期: (1) $y = \sin \frac{2x}{3}$; (2) $y = \cos(-4x)$; (3) $y = 3\cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4})$ 。

【设计意图】: 运用了化归思想和整体思想, 并结合换元法和比较法。将 $y = \sin 2x$ 的函数问题转换为形如 $y = \sin x$ 最小正周期的求法, 从而得出 $y = \sin 2x$ 的最小正周期, 最后特殊问题一般化, 得出 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期。这种思路是数学解题的有效策略之一。

图式 1: 根据上述变式题组, 以表 4-3 的形式, 总结经验。

表 4-3 正弦、余弦型函数的周期性

函数	$y = A \sin(\omega x + \varphi)$	$y = A \cos(\omega x + \varphi)$
最小正周期	$T = \frac{2\pi}{ \omega }$	$T = \frac{2\pi}{ \omega }$
条件	$A \neq 0$, A 、 ω 、 φ 为常数	

例题 2: 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \sqrt{2} \sin 2x$

(2) $f(x) = \sin(\frac{3x}{4} + \frac{3\pi}{2})$

(3) $f(x) = \sin |x|$

(4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x - 1}$

【设计意图】: 设置例题考察正弦、余弦型函数的奇偶性。加深学生对函数的奇偶性的理解 and 应用。

图式 2: 思维导图总结 (如图 4-21)。

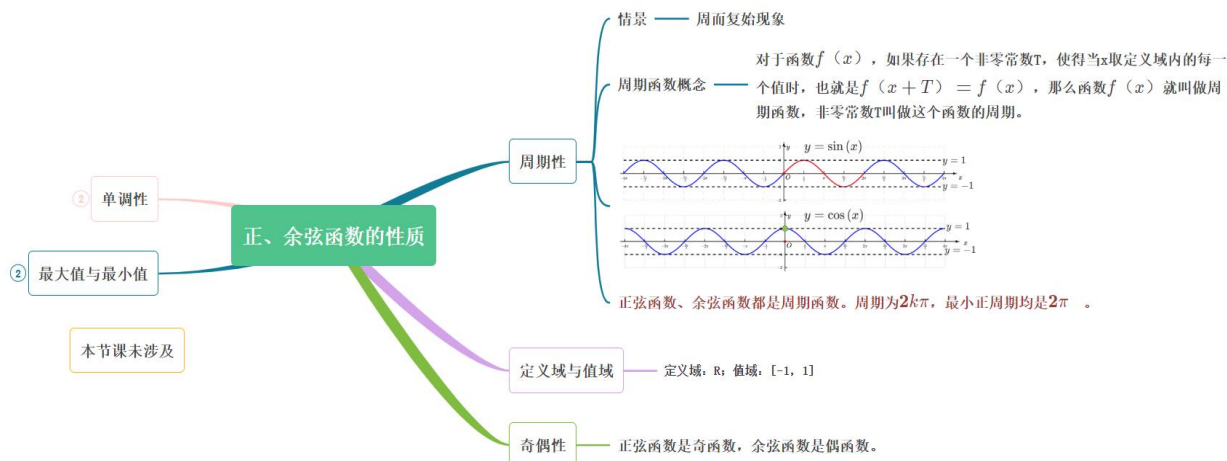


图 4-21 “正、余弦函数的性质” 思维导图

第 5 章 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学实验研究

基于 APOS 理论的三角函数变式教学模型,设计出的教学设计在抚州市某中学高一年级进行实验。采用恰当的研究方法,分析学生前后测非智力因素调查及前后测试成绩的相关数据,并且实地对师生进行调查与访谈,期望得到令人满意的结果。

5.1 实验目的

通过对 APOS 理论四个阶段与变式教学理论的深入分析,本文探讨了它们之间整合的可行性,并提出了一种新的教学模式,以更好地实现三角函数概念课的教学目标。实验旨在探索将两种不同的理论融入高中数学的三角函数概念课程中,是否可以培养学生的非智力因素、显著提升学生学习三角函数概念的效果(成绩),为三角函数概念教学提供一些理论和实践参考。

5.2 实验对象

经过精心筛选,从抚州市某中学的重点班中挑选出较均衡两个班的学生参与本次实验。高一(18)班设立为对照班,高一(1)班设立为实验班,同一个人担任两个班级的数学教师,这两个班级学生实验前的数学学习非智力因素与数学学习成绩大致相似。男女学生比例大约均为 2:1,两个班的总人数也大致相同。为了保证实验结果的可信度,本研究没有将任何与实验相关的细节告知学生,让他们成为真正的实验参与者,这样能够更加准确地评估实验的可信度。

5.3 实验内容与方法

(1) 实验内容:高一三角函数的概念。根据高一的实际情况,将 APOS 理论与变式教学理论相结合,制定出四个阶段的教学环节,以提升学生的学习效果。根据班级学生的特点,编写了非智力因素调查前后测问卷及前后测验题目。通过测试材料,评估实验班在 APOS 理论与变式教学理论相结合指导下教学的学生学习效果。

(2) 实验方法:第一,数据分析法:利用 SPSS26.0 数据分析软件,对实验班与对照班的前后非智力因素及前后期考试成绩进行了数据分析,以评估两种教育模式及其结果的有效性。第二,问卷调查法:针对本次研究的目的和内容,设计并发放了三份问卷调查表,两份是针对学生的调查,一份是针对教师的调查。笔者将问卷调查作为一种辅助手段,深入了解学生的学习动机、情绪情感、学习态度、学习意志以及性格等非智力因素,旨在探究学生在学习三角函数的过程中实验班与对照班非智力因素情况,同时也将探究 APOS 理

论下的三角函数变式教学方式是否能促进学生对数学概念知识的吸收和掌握。第三，课后访谈法。在实验结束后，研究者应该及时了解学生和老师对本章的教学方法、内容以及过程的反馈，并且深入探讨 APOS 理论四个阶段与变式教学理论相结合的三角函数新概念教学模式的可行性和实用性。

5.4 实验流程图

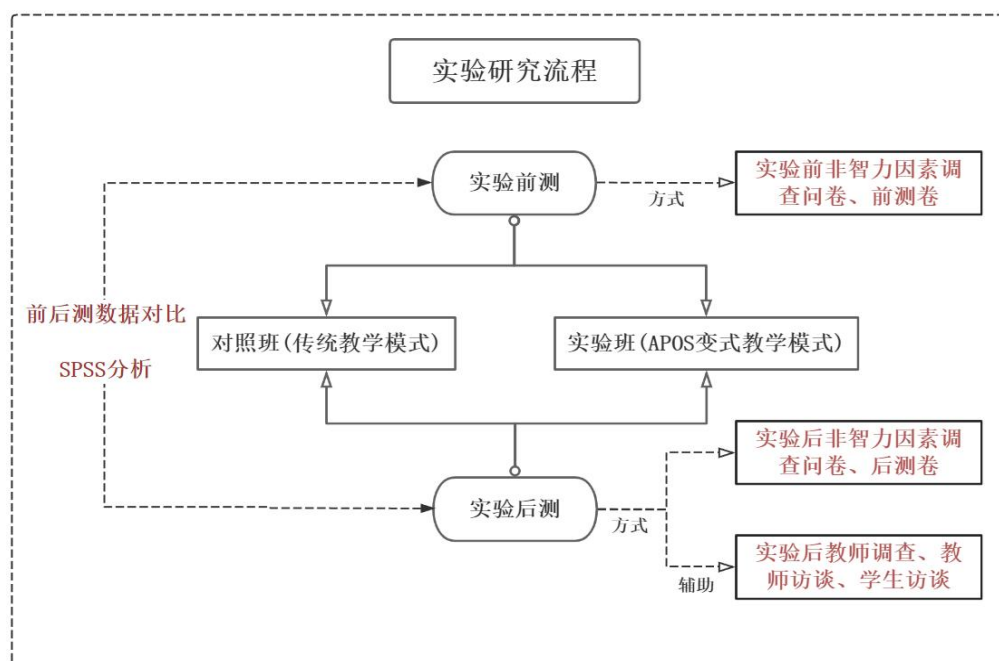


图 5-1 基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学实验流程

5.5 实验设计

(1) 实验假设

基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学研究，笔者做了以下实验假设：

①经过 APOS 理论与变式教学理论的结合，学生在三角函数概念课的学习效果明显提升。学生们不仅能够更加积极地参与到学习中，而且还能够更好地理解三角函数概念，从而更加深入地掌握概念的本质特征。这样，实验班的学生在后续测试中的表现就会明显优于对照班，相比对照班大幅提升他们的学习成绩。

②通过采用基于 APOS 理论的变式教学模型，可以更有效地激发学生对三角函数概念的兴趣，从而提升学生的数学解题及思维能力，改进学生学习方式，提高学生的学习兴趣，并培养学生符合新课标要求的非智力因素与数学核心素养。

(2) 实验变量

自变量：在这个实验中，将对照班（18）班和实验班（1）班采用不同的教学模式，

前者使用传统的三角函数概念教学模式,后者使用基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学模式。

因变量:由于采用不同的教学模式,一是导致学生的动机、情绪情感、态度、意志和性格等非智力因素发生变化;二是导致学生对三角函数概念的掌握程度及对新三角函数概念的理解能力的不同,以至于学生在相同的考试中的分数也有可能会有所出入。

控制变量:在这项研究中,将使用两组平行的班级:实验班和对照班。这两组班级的任课老师均来自同一位数学老师,授课内容和进度完全相同,两组班级的基础基本上差不多,此外,使用的习题、作业和课外辅导材料都相同,并且不会提前告诉实验班的学生任何信息。为了尽可能地消除外部环境的干扰,两个班级应当在基本一致的时间内进行课程安排,并使用一致的考核标准,以便更好地评估学生的表现。

(3) 实验实施

①实验前期,需要确定两个合适的班级作为实验班和对照班。利用图书馆、网络等资源,搜集有关本文的信息和资料,深入探究相关研究内容,并进行系统的整理和总结,以期获得一手的研究资料。接下来,将深入探讨基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学研究,并结合本研究的教学设计用书,制定出一套完善的教学计划,以期达到本研究的最终目标。经过与多位资深高中数学教师的深入探讨,发现了课程设计的缺陷,并采取全面的措施来改善它。编制和修订数学学习非智力因素调查前测问卷及测试前测试题,并对两个班的非智力因素进行前测问卷调查和前测试卷测试。

②实验中期,采用两种不同的教学方式,对对照班和实验班进行为期一个半月的教学,并且对学生进行时刻跟踪观察,记录他们的学习情况,并为后期调查及测试做好准备,如编制和修订数学学习非智力因素调查问卷及测试试题。

③实验后期:在实验完毕之后,将会收集并整理学生的后续评估成果。例如:实验后重新对学生进行非智力因素调查,并且利用试卷进行后期测试。通过使用 SPSS26.0,研究了学生前后测非智力因素和测试成绩的差异性,探讨了两种教学方法对学生学习表现的影响,并对实验结果进行了反思和总结。

5.6 高中生数学学习非智力因素数据及分析

5.6.1 实验前的基本情况

针对本次研究的目的和内容,在实验前,设计并发放了一份高中学生数学学习非智力因素调查问卷表(附录 A),将问卷调查作为一种辅助手段,深入了解学生的学习动机、情绪情感、学习态度、学习意志以及性格等五大类非智力因素,旨在探究学生在学习三角函数前对照班与实验班数学学习非智力因素情况,这就为后续的实验提供了部分数据支持。

- 1，调查对象：江西省抚州市某中学高一（18）班对照班和高一（1）班实验班全体学生。
- 2，调查基本情况：本次调查利用纸质表格进行调查，发放了 111 份调查表格，最后收回了 111 份表格，收回率达到 100%，可信度及效度较高，为笔者提供了一个全面详细的调查数据。
- 3，学生调查问卷的信度、效度
- （1）调查问卷的信度分析
- 使用 SPSS26.0 软件来评估《高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验前）》的准确性，以便对其数据做出可靠性分析：

表 5-1 可靠性统计表

可靠性统计		
克隆巴赫 Alpha	基于标准化项的克隆巴赫 Alpha	项数
.891	.893	15

根据表 5-1 的数据，可以发现，这次学生调查问卷的克隆巴赫 Alpha 值为 0.891，而基于标准化项的克隆巴赫 Alpha 值为 0.893，总共有 15 个项目。按照 Alpha 系数的信度评估标准，当 Alpha 系数超过 0.8 时，该问卷的信度较高，因此，这份学生调查问卷的信度较高。

（2）调查问卷的效度

KMO 和 Bartlett 对《高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验前）》的总体结构效度进行了评估和解读，并把问卷中的数据输入到 SPSS26.0 软件中进行测试，最终的测试结果见表 5-2。

表 5-2 KMO 和 Bartlett 检验

KMO 取样适切性量数		.795
近似卡方		445.955
巴特利特球形度检验	自由度	105
	显著性	.000

根据表 5-2 的数据，使用 SPSS26.0 软件对统计信息进行 KMO 和 Bartlett 检验，结果显示 KMO 值为 0.795，超过 0.7，这证实了《高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验前）》的结构效度相当高。

4，实验前的学生调查问卷编制

本次调查问卷的编制主要参考王光明教授的《高中生数学学习非智力特征调查问卷的编制》^[53]，借鉴了导师及一线教师的意见设计而成的，通过这份调查问卷了解实验前对照班与实验班学生数学学习非智力因素的基本情况。根据本文的实际研究情况，最终将非智力因素分为动机、情绪情感、态度、意志和性格 5 个维度。其中动机、情绪情感、态度分

为 3 个因子，每个因子设计一个题目；意志和性格分为 2 个因子，自律性和质疑精神设计一个题目，坚持性和好胜心设计两个题目。具体情况如图 5-2 所示：

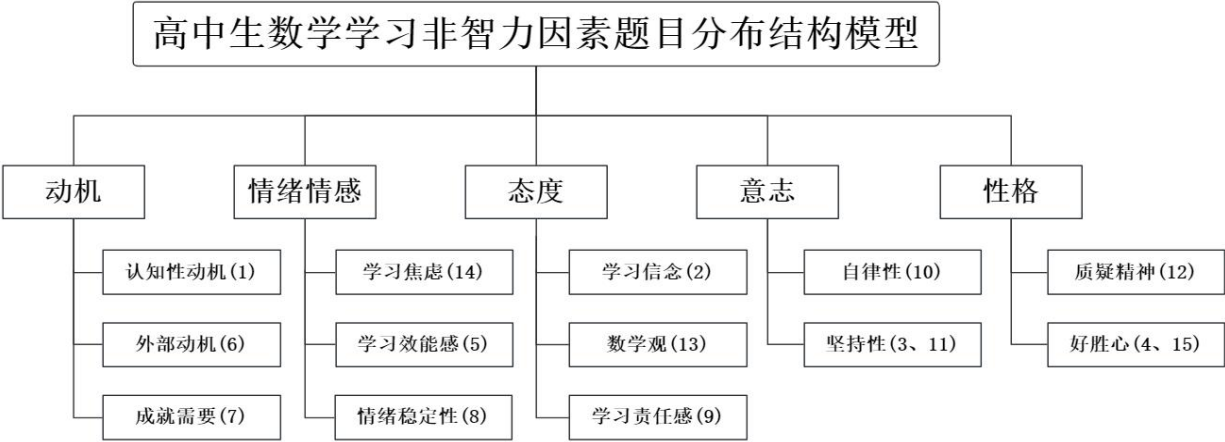


图 5-2 高中学生实验前数学学习非智力因素题目分布结构模型

问卷所有题型皆为客观题，每题设置“完全一致”“大体上一致”“不确定”“不太一致”“完全不一致”等 5 个选项，分别对应 5 分、4 分、3 分、2 分、1 分。其中，第 6、12、14 题为反向题，计时时根据选项调整最后得分。非智力因素调查问卷共计 15 题，每题满分 5 分，则总分为 75 分。

5，调查问卷数据分析

数学学习非智力因素各维度的数据是了解学生基本情况的一个重要参考指标。一共五个一级维度，每个一级维度的题目数量都相同，因此笔者将计算各维度的平均值以及总值来进行比较。利用 SPSS26.0 进行数据统计，具体统计结果见表 5-3。

表 5-3 对照班与实验班实验前数学学习非智力因素得分统计分析表

非智力因素	班级	个案数	平均值	标准偏差	标准误差平均值
动机	对照班	56	10.91	2.798	.374
	实验班	55	10.60	2.685	.362
情绪情感	对照班	56	10.89	2.715	.363
	实验班	55	10.76	2.638	.356
态度	对照班	56	10.95	2.693	.360
	实验班	55	10.69	2.721	.367
意志	对照班	56	11.00	2.683	.359
	实验班	55	10.89	2.572	.347
性格	对照班	56	11.04	2.656	.355
	实验班	55	10.85	2.613	.352
总体	对照班	56	54.79	12.249	1.637
	实验班	55	53.80	12.520	1.688

根据表 5-3 可知：两个班的非智力因素五个维度及总体平均值都差不多，不存在明显的差异。

表 5-4 对照班与实验班实验前数学学习非智力因素独立样本 T 检验

		方差方程的 Levene 检验				均值方程的 t 检验				
		F	Sig.	t	自由度	Sig.（双侧）	平均值差值	标准误差值	差分的 95%置信区间	
									上限	下限
动机	假定方差	.484	.488	.597	109	.552	.311	.521	-.721	1.343
	不假定方差			.597	108.942	.552	.311	.520	-.721	1.342
情绪情感	假定方差	.401	.528	.254	109	.800	.129	.508	-.878	1.137
	不假定方差			.254	108.988	.800	.129	.508	-.878	1.136
态度	假定方差	.007	.935	.497	109	.620	.256	.514	-.763	1.274
	不假定方差			.497	108.912	.620	.256	.514	-.763	1.274
意志	假定方差	.349	.556	.219	109	.827	.109	.499	-.880	1.098
	不假定方差			.219	108.937	.827	.109	.499	-.880	1.098
性格	假定方差	.359	.550	.362	109	.718	.181	.500	-.810	1.173
	不假定方差			.362	109.000	.718	.181	.500	-.810	1.172
总体	假定方差	.160	.690	.419	109	.676	.986	2.351	-3.674	5.645
	不假定方差			.419	108.825	.676	.986	2.351	-3.675	5.646

根据检测数据表 5-4 可知：通过独立样本 T 检验，观察到数学学习非智力因素各维度和总体中方差方程 Levene 检验的 sig 值均超过 0.05，这表明方差齐性的假设成立。同时，均值方程的 t 检验 sig（双侧）值均超过 0.05，这意味着对照班和实验班的实验前数学学习非智力因素无显著差异。两个班的学生在动机、情绪情感、态度、意志和性格等 5 个维度及总体上的差距也非常小，这样可以更加顺利地开展后续的实验。

5.6.2 实验后的基本情况

针对本次研究的目的和内容，在实验结束后，设计并又发放了一份高中学生非智力因素调查问卷表（附录 B），将问卷调查作为一种辅助手段，旨在了解基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学在实验班实验之后，对于学生的学习动机、情绪情感、学习态度、学习意志以及性格等五大类数学学习非智力因素的影响情况。

- 1，调查对象：江西省抚州市某中学高一（18）班对照班和高一（1）班实验班全体学生。
- 2，调查基本情况：本次调查利用纸质表格进行调查，发放了 111 份调查表格，最后收回了 111 份表格，收回率达到 100%，可信度及效度较高，为笔者提供了一个全面详细

的调查数据。

3，学生调查问卷的信度、效度

(1) 调查问卷的信度分析

使用 SPSS26.0 软件来评估《高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验后）》的准确性，以便对其数据做出可靠性分析：

表 5-5 可靠性统计量表

可靠性统计		
克隆巴赫 Alpha	基于标准化项的克隆巴赫 Alpha	项数
.895	.899	15

根据表 5-5 的数据，可以发现，这次学生调查问卷的克隆巴赫 Alpha 值为 0.895，而基于标准化项的克隆巴赫 Alpha 值为 0.899，总共有 15 个项目。按照 Alpha 系数的信度评估标准，当 Alpha 系数超过 0.8 时，该问卷的信度较高，因此，这份学生调查问卷的信度较高。

(2) 调查问卷的效度

KMO 和 Bartlett 对《高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验后）》的总体结构效度进行了评估和解读，并把问卷中的数据输入到 SPSS26.0 软件中进行测试，最终的测试结果见表 5-6。

表 5-6 KMO 和 Bartlett 检验

KMO 取样适切性量数		.789
巴特利特球形度检验	近似卡方	509.849
	自由度	105
	显著性	.000

根据表 5-6 的数据，使用 SPSS26.0 软件对统计信息进行 KMO 和 Bartlett 测试，结果显示 KMO 值为 0.789，超过 0.7，这证实了《高中学生非智力因素调查问卷（实验后）》的结构效度相当高。

4，实验后的学生调查问卷编制

本次调查问卷了解实验后对照班与实验班学生数学学习非智力因素的变化情况。根据实际研究情况，还是将非智力因素分为动机、情绪情感、态度、意志和性格 5 个维度。其中动机、情绪情感、态度分为 3 个因子，每个因子设计一个题目；意志和性格分为 2 个因子，自律性和质疑精神设计一个题目，坚持性和好胜心设计两个题目。具体情况如图 5-3 所示：

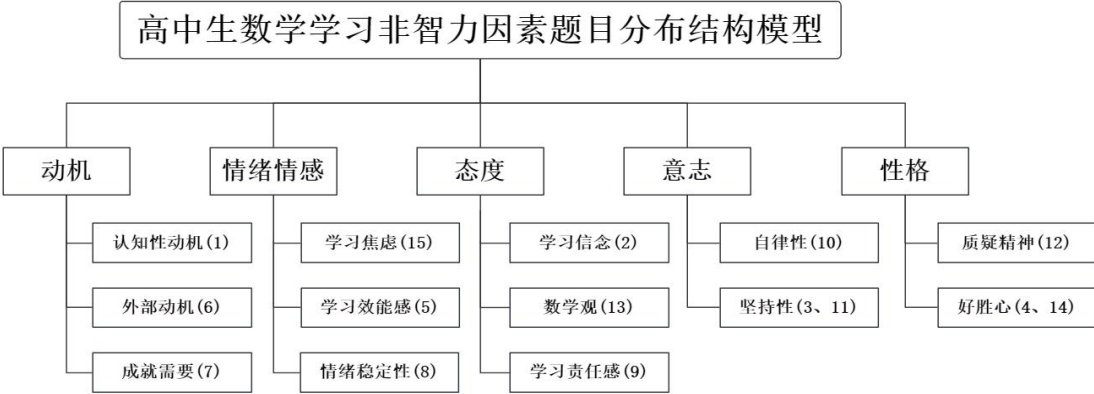


图 5-3 高中学生实验后数学学习非智力因素题目分布结构模型

问卷所有题型皆为客观题，每题设置“完全一致”“大体上一致”“不确定”“不太一致”“完全不一致”等 5 个选项，分别对应 5 分、4 分、3 分、2 分、1 分。其中，第 5、8、9、15 题为反向题，计时根据选项调整最后得分。非智力因素调查问卷共计 15 题，每题满分 5 分，则总分为 75 分。

5，学生调查问卷结果分析

为了进一步检测实验后实验班的数学学习非智力因素与对照班是否有显著的变化？利用 SPSS26.0 进行数据处理与分析，如果检测方差齐性，说明独立样本 T 检验成立，如果不齐性，就进行 welch 检验，统计结果如表 5-7、表 5-8 及表 5-9：

表 5-7 对照班与实验班实验后数学学习非智力因素得分统计分析表

非智力因素	班级	个案数	平均值	标准偏差	标准误差平均值
动机	对照班	56	11.14	2.932	.392
	实验班	55	12.24	2.589	.349
情绪情感	对照班	56	11.11	2.826	.378
	实验班	55	12.56	2.402	.324
态度	对照班	56	11.34	2.712	.362
	实验班	55	12.40	2.593	.350
意志	对照班	56	11.36	2.746	.367
	实验班	55	12.91	2.343	.316
性格	对照班	56	11.38	2.646	.354
	实验班	55	11.44	2.559	.345
总体	对照班	56	56.32	11.159	1.491
	实验班	55	61.55	8.476	1.143

根据表 5-7 的数据，实验班非智力因素在性格方面平均值与对照班没有明显的差异，但在动机、情绪情感、态度、意志等四个维度及总体平均值较明显高于对照班，因此基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学在学生非智力因素培养方面整体上有明显的效果。

表 5-8 对照班与实验班实验后数学学习非智力因素独立样本 T 检验

		方差方程的 Levene 检验				均值方程的 t 检验				
		F	Sig.	t	自由度	Sig. (双侧)	平均值差值	标准误差值	差分的 95%置信区间	
									上限	下限
动机	假定方差	1.620	.206	-2.081	109	.040	-1.094	.525	-2.135	-.052
	不假定方差			-2.084	107.793	.040	-1.094	.525	-2.134	-.053
情绪情感	假定方差	3.390	.068	-2.923	109	.004	-1.456	.498	-2.444	-.469
	不假定方差			-2.927	106.805	.004	-1.456	.498	-2.443	-.470
态度	假定方差	.129	.720	-2.105	109	.038	-1.061	.504	-2.059	-.062
	不假定方差			-2.106	108.923	.037	-1.061	.504	-2.059	-.063
意志	假定方差	3.761	.055	-3.200	109	.002	-1.552	.485	-2.513	-.591
	不假定方差			-3.205	106.922	.002	-1.552	.484	-2.512	-.592
性格	假定方差	.103	.749	-.124	109	.901	-.061	.494	-1.041	.918
	不假定方差			-.124	108.974	.901	-.061	.494	-1.041	.918
总体	假定方差	7.913	.006	-2.774	109	.007	-5.224	1.883	-8.957	-1.491
	不假定方差			-2.781	102.555	.006	-5.224	1.879	-8.950	-1.498

表 5-9 对照班与实验班实验后数学学习非智力因素总体 welch 检验

数学学习非智力因素总体				
	莱文统计	自由度 1	自由度 2	Sig.
Welch	7.732	1	102.555	.006

由表 5-8 可知，动机 Levene 检验 sig 值等于 $0.206 > 0.05$ ，则方差齐性假设成立；发现 t 检验 Sig（双侧）等于 $0.040 < 0.05$ ，说明动机维度两个班的差异显著；

情绪情感 Levene 检验 sig 值等于 $0.068 > 0.05$ ，则方差齐性假设成立；发现 t 检验 Sig（双侧）等于 $0.004 < 0.05$ ，说明情绪情感维度两个班的差异显著；

态度 Levene 检验 sig 值等于 $0.720 > 0.05$ ，则方差齐性假设成立；发现 t 检验 Sig（双侧）等于 $0.038 < 0.05$ ，说明态度维度两个班的差异显著；

意志 Levene 检验 sig 值等于 $0.055 > 0.05$ ，则方差齐性假设成立；发现 t 检验 Sig（双侧）等于 $0.002 < 0.05$ ，说明意志维度两个班的差异显著；

性格 Levene 检验 sig 值等于 $0.749 > 0.05$ ，则方差齐性假设成立；发现 t 检验 Sig（双侧）等于 $0.901 > 0.05$ ，说明性格维度两个班的差异不显著，基本一致；

总体 Levene 检验 sig 值等于 $0.006 < 0.05$ ，则方差齐性假设不成立；进行 welch 检验如表 5-9，发现 Sig 值等于 $0.006 < 0.05$ ，说明非智力因素总体上看两个班的差异显著。

分析：实验结束后，实验班在数学学习非智力因素性格方面与对照班相比没有显著差异，但在动机、情绪情感、态度、意志及总体方面优于对照班。出现上述明显变化的原因涉及多个方面，这可能是因为实验班在实验过程中接受了基于 APOS 理论的变式教学，教学更注重以学生为中心，教学增加了与学生的沟通和互动，激发了学生的学习兴趣，实验中实验班学生的班级氛围也更加积极，有助于学生形成积极的情绪体验。动机、情绪情感、态度和意志的改善往往相互影响，形成一个综合效应。当一个方面的变化发生时，它可能会促进其他方面的改善，从而形成一个良性循环。这种综合效应使得实验班的学生在总体上表现出显著差异。而性格是个体相对稳定的心理特征，不容易在短时间内发生显著变化。即使实验班的学生经历了不同的教学策略或环境，这些改变可能不足以对他们的性格产生显著影响。

5.7 前后测数学成绩研究数据及分析

5.7.1 前测基本情况

（1）前测试卷的编制

本次前测试卷（附录 C）参考了专家及一线教师的意见精心设计而成的，试卷共有十八道题目，这套试卷包含了学生在初中阶段就已经掌握的锐角三角函数基本概念，包括正弦、余弦和正切等。这样就可以更深入地理解学生所学的三角函数概念，为实验的顺利进行打下坚实的基础。

（2）前测结果分析

对照班与实验班都是平行班，学生们对数学的兴趣和热情都不够特别强烈。在这个实验中，对照班级由 56 名学生组成，实验班级由 55 名学生组成，两个班级的人数大致相同，这是采集的一个大样本。并且所有参加考试的对照班和实验班的学生必须在 120 分钟内完成测试，该套试卷的总分为 150 分。通过 Excel 对两个班级的前测数据进行统计分析，创建了一个柱状图 5-4 来清晰地展示出两个班级各个分数段成绩百分比分布情况，发现对照班和实验班各分数段呈现正态分布。

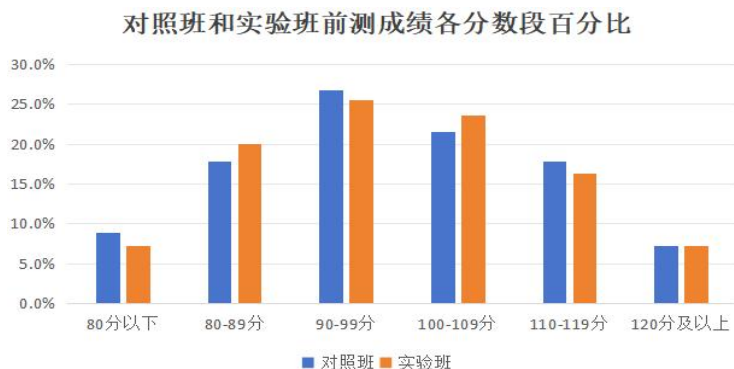


图 5-4 对照班与实验班前测成绩各分数段百分比对比柱形图

表 5-10 前测成绩各分数段人数及平均成绩统计表

	80 分以下	80-89 分	90-99 分	100-109 分	110-119 分	120 分及以上	平均成绩
对照班（56）	5	10	15	12	10	4	98.7321
实验班（55）	4	11	14	13	9	4	98.0727

根据表 5-10 的数据，对照班与实验班的分数都主要集中在 80 分至 119 分之间，80 分以下及 120 分及以上的学生都比较少，说明这两个班级中等生较多，特优生与差生都比较少，说明两个班的学习情况基本相似，没有明显差距。

为了对两个班级的学习状态做出更精细的判断，并且判断两个班级是否有显著的差异，使用 SPSS26.0 来深入研究前测成绩。采取独立样本 T 检验，以确定两个班级对于三角函数概念的学习成绩是否存在显著的差异。

表 5-11 前测成绩 t 检验统计量

班级	N	均值	标准差	平均值的标准误差
对照班	56	98.7321	19.11543	2.55441
实验班	55	98.0727	18.81770	2.53738

根据表 5-11 的数据，对照班与实验班的人数分别为 56 人、55 人，两个班的人数基本相同，另外对照班的平均分为 98.7321，而实验班的平均为 98.0727，两个班级的平均分也基本一致，没有明显的差别。

表 5-12 独立样本 T 检验（前测成绩）

		方差方程的 Levene 检验		均值方程的 t 检验						
		F	Sig.	t	自由度	Sig.（双侧）	平均值差值	标准误差差值	差分的 95%置信区间	
									上限	下限
前测成绩	假设方差相等	.030	.862	.183	109	.855	.65942	3.60097	-6.47759	7.79642
	假设方差不相等			.183	108.999	.855	.65942	3.60097	-6.47657	7.79540

根据检测结果表 5-12 可知：通过独立样本检验，观察到方差方程的 Levene 检验中 sig 的值等于 0.862，超过 0.05，这表明方差为齐性的假设成立。同时，均值方程的 t 检验中 sig（双侧）值均等于 0.855，超过 0.05，这意味着对照班和实验班的前测成绩并无显著的差异。通过前测发现两个班的学生在知识储备、学习技能等方面的差距非常小，基本上来说是一致的，这样可以更加准确地开展后续的实验。

5.7.2 后测基本情况

(1) 后测试卷的编制

对照班采取传统的教学方式,实验班采取以 APOS 理论和变式教学理论为指导的教学模式。为评估基于 APOS 理论的三角函数变式教学的效果,经过一番精心设计,为对照班和实验班设计了一份三角函数测试卷(附录 D),该测试试卷要求学生在 2 个小时内完成,总分 150 分,共 21 道题,评分标准基本一致。测试卷知识点如表 5-13。

表 5-13 三角函数后测试卷知识点分布

题号	知识点分布	分值
1、15	任意角三角函数的定义	10 分
2	弧度制	5 分
3、13、16	同角三角函数基本关系的运用	15 分
4、17	三角函数象限角	10 分
5	象限角、轴线角、单位圆与三角函数线	5 分
6	三角函数的周期性	5 分
7	三角函数的奇偶性	5 分
8、9	三角函数的图象变换	10 分
10	三角恒等变换	5 分
11	三角函数值的符号	5 分
12	同角三角函数间的基本关系,运用诱导公式化简求值	5 分
14	函数的定义域及其求法,二次函数在闭区间上的最值	5 分
18	正切的二倍角公式、两角和的正切公式	5 分
19	图形对称性,三角函数值符号,同角三角函数基本关系的运用	20 分
20	弦切互化,同角三角函数间的基本关系	20 分
21	振幅、周期的定义,正弦函数的性质,正弦函数的最值性质	20 分

(2) 后测成绩总体分析

在这个实验中,对照班级由 56 名学生组成,实验班级由 55 名学生组成,两个班级的人数大致相同,这是采集的一个大样本。通过使用 Excel 统计分析,可以清晰地展现出实验班与对照班的各自教学成果,笔者使用折线图 5-5 和柱状统计图 5-6 来分别展示。

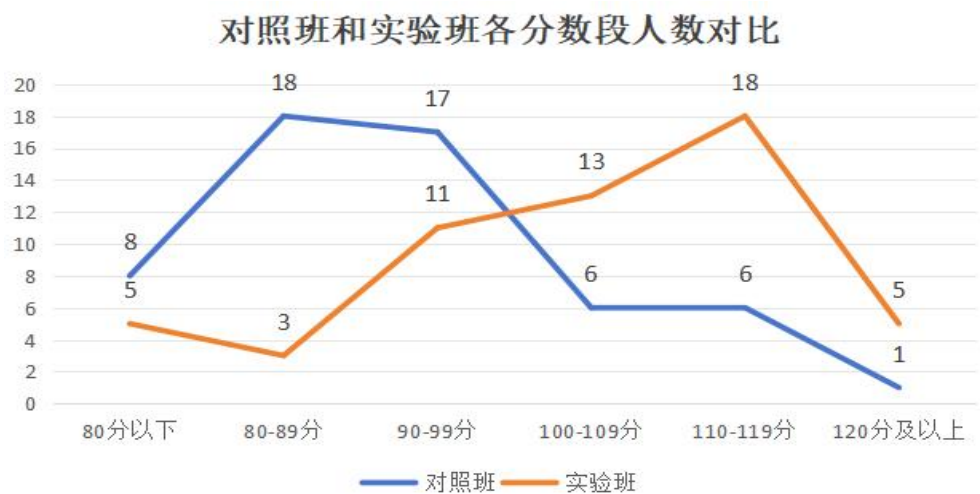


图 5-5 对照班与实验班后测成绩各分数段人数对比

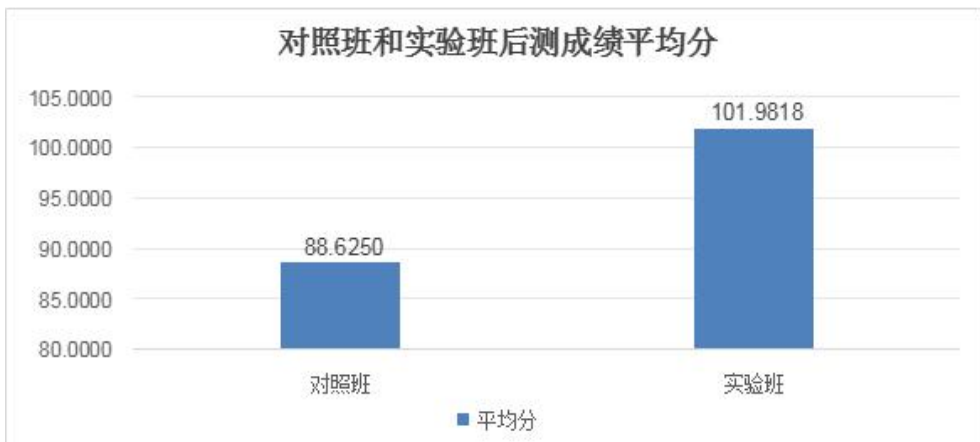


图 5-6 对照班与实验班后测成绩平均分

表 5-14 后测成绩各分数段人数及平均成绩统计表

	80 分以下	80-89 分	90-99 分	100-109 分	110-119 分	120 分及以上	平均成绩
对照班（56）	8	18	17	6	6	1	88.6250
实验班（55）	5	3	11	13	18	5	101.9818

通过表 5-14 可知：对照班成绩多集中在 80-89 分与 90-99 分之间，分别为 18 人和 17 人，110 分以上人数只有 7 人，而实验班成绩多集中在 100-109 分与 110-119 分间，分别为 13 人和 18 人，110 分以上人数多达 23 人，这说明对照班成绩高分段人数远远低于实验班人数。

为了进一步检测实验班的教学效果，利用 SPSS26.0 进行数据处理与分析，采用独立样本 T 检验来评估结果的准确性。

表 5-15 后测成绩 t 检验统计量

班级	N	均值	标准差	平均值的标准误差
对照班	56	88.6250	20.59529	2.75216
实验班	55	101.9818	21.56771	2.90819

根据表 5-15 的数据，对照班与实验班成绩分别为 88.6250、101.9818，对照班成绩明显低于实验班成绩。

表 5-16 独立样本 T 检验（后测成绩）

		方差方程的 Levene 检验		均值方程的 t 检验						差分的 95%置信区间	
		F	Sig.	t	自由度	Sig.（双侧）	平均值差值	标准误差值		上限	下限
后测成绩	假设方差相等	.050	.824	-3.337	109	.001	-13.35682	4.00232		-21.28928	-5.42436
	假设方差不相等			-3.336	108.552	.001	-13.35682	4.00399		-21.29297	-5.42067

经 SPSS26.0 的数据处理，方差方程的 Levene 检验发现 sig 等于 0.824，超过 0.05，证明方差为齐性的假设成立。然而，均值方程的 t 检验中 sig（双侧）的值等于 0.001，小于 0.05，这表明对照班和实验班在后测成绩上存在显著的差异。经过数据分析，发现基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学对学生的学业表现产生了积极的效果，并且这种效果非常显著。

（3）实验结果分析

经过系统的前测和后测成绩的数据分析，发现在 APOS 理论与变式教学理论的融合下的三角函数的教学模式的教学效果可以被量化。此外，还进行了实验教学和调查访谈，并得出如下结论：

从观察学生课堂表现上来看，发现实验班的学生都非常积极，乐于参与到 APOS 理论的四个不同的阶段的变式教学中。通过采用这种教学方法，可以更有效地唤醒学生的学习热情，帮助他们更好地理解、掌握和运用知识。

经过前后测试成绩的评估，实验班学生的表现优异，特别是在理论的深入探究方面表现出色。将 APOS 理论与变式教学理论有机融合，能够有效地帮助学生在三角函数概念课

方面取得更优异的表现，而且对于学习能力较弱的学生来说，也有着明显的改善作用。

经过一段时间的教学评估，发现这一教学模式可以使得整个实验班的课堂教学效果大大改善。特别是对于能力水平较差的学生，他们的表现比一般的对照班学生更加优异，取得的进步也更加显著。

5.8 三角函数概念教师教学现状调查及教师学生访谈

5.8.1 三角函数概念教师教学现状调查

本次调查旨在探究一线教师如何利用 APOS 理论和变式教学理论教授学生三角函数概念知识，并评估他们对这两种理论的掌握情况。实验后，通过问卷调查的形式，评估了这种教学模式的可行性，并研究它对学生三角函数概念学习的影响。

1，调查对象：江西省抚州市某中学高一和高二年级的 28 位数学教师。笔者对 28 位数学教师进行了一项有关基于 APOS 理论的三角函数变式教学的调查，并向他们提供了相关的问卷。旨在探究高中教师未来应该如何利用 APOS 理论和变式教学模型来教授三角函数的知识。

2，调查基本情况：在这次调查中发出了 28 份调查问卷（附录 E），采用多种方式，包括纸质表格、电话访谈等，共收集了 22 份调查表格、6 份电话访谈，回复率达到 100%，可信度极高，为笔者提供了一个全面详细的调查数据。

3，教师调查问卷的信度、效度

（1）调查问卷的信度分析

使用 SPSS26.0 软件来评估《三角函数概念教师教学现状调查问卷》的准确性，以便对其数据做出可靠性分析：

表 5-17 可靠性统计量表

可靠性统计		
克隆巴赫 Alpha	基于标准化项的克隆巴赫 Alpha	项数
.870	.886	18

根据表 5-17 的数据，可以得知，这次教师调查问卷的克隆巴赫 Alpha 值为 0.870，而基于标准化项的克隆巴赫 Alpha 值为 0.886，这并不包括前 3 项，总共有 18 项。按照 Alpha 系数的信度评估标准，当 Alpha 系数超过 0.8 时，该问卷的信度就比较高，因此，这次教师调查问卷的信度是非常高的。

（2）调查问卷的效度

KMO 和 Bartlett 对《三角函数概念教师教学现状调查问卷》整体结构效度进行检验与分析，将问卷收集的数据录入 SPSS26.0 进行检验，得出的检验结果如表 5-18。

表 5-18 KMO 和 Bartlett 检验

KMO 取样适切性量数		. 798
巴特利特球形度检验	近似卡方	498. 686
	自由度	153
	显著性	. 000

根据表 5-18 的数据，使用 SPSS26.0 软件对统计数据进行 KMO 和 Bartlett 测试，结果显示 KMO 值为 0.798，超过 0.7，说明《三角函数概念教师教学现状调查问卷》的结构效度比较好。

4，调查问卷结果分析

（一）教师基本信息分析

这份调查问卷 A1--A3 题调查教师基本信息，具体教师基本信息如表 5-19 所示。

表 5-19 教师基本信息情况表

编号	内 容	A	B	C	D
A1	您所教的年级是高中几年级？（可多选）	71%	31%	9 %	*
A2	您的教龄是多少年？	7 %	30%	45 %	18 %
A3	您的最高学历是什么？	11%	71%	18 %	*

由表 5-19 可知：本次调查的教师主要在高一、高二年级任教，也有少部分教师兼任高三年级，教龄大部分在六年以上，也兼顾了六年以下的年青教师，教师的最高学历大部分都在本科以上，说明本次调查教师的学历都比较高，综上所述，本次调查的教师广泛，教龄较长，学历较高，具有较强的可信度。

（二）教师教学现状分析

（1）教师教学观念分析

这份调查问卷 B1--B6 题调查教师的教学观念，最后调查情况如图 5-7 及 5-8 所示。



图 5-7 教师教学观念 B1--B3 题选项百分比图

由图 5-7 可知：采用变式教学重要性来看，认为非常重要的教师比率高达 68%，说明变式教学作用非常重要；62%的教师认为数学成绩与学生对三角函数概念的理解关系很大，说明对概念的理解有利于提高数学成绩；58%教师认为采用 APOS 理论教学三角函数概念比较重要，说明教师还是比较赞同 APOS 理论教学。总体来说，教师认为在三角函数教学中，要多采用 APOS 理论与变式理论教学，有利于帮助学生对概念的理解。



图 5-8 教师教学观念 B4--B6 题选项百分比图

由图 5-8 可知：教师会采用 APOS 理论与变式教学理论教学三角函数概念次数比较多的比率只有 17%，说明大部分教师还是应用传统教学；教师在阅读三角函数概念数学期刊时，学习 APOS 理论与变式教学理论偶尔的比率占 42%；说明对 APOS 理论与变式教学理论探讨不够深入。教师认为两种非常适用于高中数学教学的比率高占 51%，说明教师认同 APOS 理论与变式教学理论的融合。总的来说，大部分教师虽然认为 APOS 理论与变式教学理论有利于提高学生的学习成绩，但应用 APOS 理论与变式教学理论融合教学的不多，并且对理论的研究也比较少。

（2）教师教学具体应用分析

这份调查问卷 B7--B12 题调查 APOS 理论与变式教学理论具体应用，最后调查情况如图 5-9 与 5-10 所示。



图 5-9 教师教学具体应用 B7--B9 题选项百分比图

由图 5-9 可知：教师不会通过变式教学活动来帮助学生理解任意角三角函数的人数较

多, 比率高达占 36%, 说明部分教师不会尽量利用多种变式题目, 加深学生对概念的理解; 22% 的教师一定会设计探究变式教学理论, 引导学生挖掘 “ $y = \cos x$ ” 图象, 占比也不高, 说明充分利用变式教学理论的教师也不多; 在三角函数备课时, 教师不会采用两种理论进行备课的比率有 35%, 占比较高, 说明教师对 APOS 理论与变式理论重视不够。综上所述, 教师对变式教学理论与 APOS 理论的应用不多, 需要多多加强。



图 5-10 教师教学具体应用 B10--B12 题选项百分比图

由图 5-10 可知: 41% 教师不会采用 APOS 理论, 让学生发现三角函数 “周而复始” 循环规律, 说明教师应用 APOS 理论主动性不强; 对于公式 “ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ”, 了解 APOS 理论后只有 31% 教师经常让学生自己主动推导出公式, 说明教师对 APOS 理论了解得不够透彻; 在教授任意角三角函数时, 教师一定会经常应用 APOS 理论的四个不同阶段变式理论进行教学的比率不高, 只有 21%, 说明教师对 APOS 理论探讨不够深刻。总的来说, 教师在教授学生三角函数时, 应用传统教学方式比较多, 对新式教学理论 APOS 理论与变式教学理论重视不够, 需要在将来教学中多加注意。

(3) 教师教学效果分析

这份调查问卷 B13--B18 题调查教师教学效果, 最后调查情况如图 5-11 与 5-12 所示。



图 5-11 教师教学效果 B13--B15 题选项百分比图

由图 5-11 可知: 50% 的教师认为采用 APOS 理论与变式理论教学, 非常有效地唤醒学生的学习热情, 说明两种理论对于提高学生的学习兴趣作用比较大; 经过前后测试成绩的

评估,认为实验班学生的表现优秀教师比率高达 48%,说明实验达到了预期效果;46%的老师认为实验班学生在理论深入探究方面表现非常出色,说明实验班学生学习理论方面比较成功。可见,这次实验比较成功,鉴于 APOS 理论的三角函数变式教学对学生的成绩提高效果显著,值得推广。



图 5-12 教师教学效果 B16--B18 题选项百分比图

由图 5-12 可知:45%的教师认为两种理论有机融合能够有效地帮助能力较强的学生在学习三角函数概念课方面取得非常优异的表现,说明这种教学对能力较强的学生学习帮助较大;将 APOS 理论与变式教学理论有机融合教学,对于学习能力较弱的学生来说,56%的教师认为有着明显的改善作用,说明对学习较弱的学生帮助也比较大;经过一段时间的教学评估,教师认为两种理论有机融合教学模式可以使得实验班的课堂教学效果大大改善的比率高占 40%,说明实验班的课堂教学效果明显。综上所述,大部分教师认为 APOS 理论与变式教学理论有机融合教学有利于提高学生的学习成绩,并且在实验班的实验较为成功,得到了实验验证。

(三) 调查结果整体分析

大多数一线教师只是曾经了解过 APOS 理论,了解的比率不高,只有极少数一线教师能够准确地阐述它的四个阶段,并且在实际课堂教学中应用的也比较少。此外,大多数一线教师对于变式教学理论的理解仍然停留在表面,缺乏对其本质的理解。他们通常采用的教学方法是传统的三角函数概念讲解,并使用典型的例子来巩固三角函数概念。通过实验课后的评估,绝大多数教师都赞赏 APOS 理论的三角函数概念变式教学,相信这种教学可以帮助学生在三角函数概念课方面取得更优异的成绩。

5.8.2 教师学生访谈

一、教师访谈

本次调查在对教师进行问卷调查的基础上,还设计了教师访谈提纲(附录 F),目的在于更加全面地了解基于 APOS 理论下的三角函数概念变式教学的现状及其效果。访谈教师的详细情况如表 5-20 所示。

表 5-20 访谈对象的具体情况表

教师	职称	性别	教龄
教师 A	中学二级	男	3 年
教师 B	中学一级	女	8 年
教师 C	中学一级	女	9 年
教师 D	中学副高	男	12 年
教师 E	中学正高	女	25 年

1、教师访谈记录

问题 1：您认为基于 APOS 理论下的三角函数变式教学方式效果如何？对提高学生学习三角函数的兴趣和成绩是否有效果？

A 教师：这种教学方式非常出色，它可以提高学生对三角函数的理解，可以提高学生的成绩。

B 教师：这种教学方式可以激发他们的创造性思维，让他们在真实的环境中探索三角函数的奥秘，但平时用得不多。

C 教师：这种教学方式可以通过使用具体的图形来加深对三角函数的理解，从而构建一座跨越函数的桥梁，有利于提高学生的学习效果。

D 教师：通过各种新式的变式习题，学生可以更深入地理解三角函数概念，并能够辨析出它们的外延和内涵，加深对三角函数概念的掌握程度，学生的成绩提高显著。

E 教师：由于我对此类教育模式的认识相当浅薄，平时只凭直觉进行授课，因此无法准确地判断其是否能够激发学生的学习热情。

问题 2：您在授课过程中，是否会刻意地把各个知识点划分为不同层次进行讲解呢？

A 教师：通常会，在开始上新课时，会引入一个小型的场景故事，以此来吸引学生们的兴趣并引起学生的注意。接下来，将有计划地依照这个场景故事来介绍本节课的主题，并逐渐深化教学。

B 教师：会，在备课时，会对课程的进度和内容进行深入地反复思索，这可以被视作有目的地把各个知识点分层次进行授课准备吧。

C 教师：会，我将按照知识的难易程度按顺序来组织教学。

D 教师：不太会，当学生的反馈相当积极时，会加快讲课的进度，期待在一堂课中能够更深入地讲解多一些知识点，但并未考虑到是否需要按照不同的层次来进行教学。

E 教师：不会，由于学校的授课责任繁重，有时候为了加快进度，可能需要加快讲课的节奏，这可能导致我无法把各个知识点划分为不同层次进行教学。

问题 3：你是否会有意识地帮助学生构建知识网络图？你对 APOS 理论有深入的了解吗？

A 老师：会，一旦完成某一阶段的课程，我将按照知识网络图进行整理和归纳，不了

解。

B 老师：会，在讲解新课，会帮助学生通过课堂总结的教学环节进行自我总结。听过。

C 老师：不会有意识有目的的梳理。没听过。

D 老师：会，当上课时间足够的时候，会对这一课的内容进行简洁的概括与梳理。比较了解。

E 老师：会，在讲完一些重要的内容之后，将引导学生做一个整体的回顾与梳理。很了解。

问题 4 对于“单位圆定义法”与“终边定义法”在任意角三角函数的教学，您是采用哪一种方式进行教学呢？会应用 APOS 理论与变式教学理论吗？

A 教师：我会采用“单位圆定义法”来进行教学，“终边定义法”的一种特殊情况就是“单位圆定义法”。很少。

B 教师：我经常采用“终边定义法”来讲解任意角三角函数，有时会。

C 教师：首先复习锐角三角函数的定义过程，然后将其置于坐标体系内，采用任意角的终边定义法进行讲解。不会。

D 教师：我会在单位圆上设定一个终边顶点，从而推导出一种简单的单位圆定义法，然后添加三角函数线，使得学生能够明白任一角度的几何含义，这样可以为接下来的三角函数图像研究奠定基础。偶尔会。

E 教师：通过使用单位圆定义法来阐述任意角三角函数概念，并且采用终边定义法提升学生对任意角三角函数概念的认识。经常会。

问题 5：教授三角函数的挑战在哪里？学生在学习过程中容易遇到哪些问题？

A 老师：初次接触周期性函数的学生，他们的思考方式相对较为僵硬，特别在探讨自变量为弧度制时，学生可能会产生疑惑。然而，随着深入地学习，逐渐“接纳”了周期性函数，但是在解决问题时，又常常忽视三角函数的周期性，对于诱导公式的运用，学生的应用还不够灵敏。

B 老师：实际上，学生对于三角函数线的介绍并不十分清楚，尽管许多教师已经讲解过三角函数线，但教师并未详细阐述其功能，这导致学生只能大概了解，从而阻碍了学生接下来对于三角函数概念的深入学习。

C 老师：学生在使用诱导公式时缺乏灵活性，对于三角函数的综合问题的解决存在一些困难，特别是在将其与以往的知识进行结合时，这表明学生并未真正掌握三角函数的相关特性。

D 老师：学生可能无法理解三角函数的含义，特别是它与初中的定义有所差异，并呈现出周期性。如果教育方法不当，学生的思维模式和初中的学习经历可能会对此部分内容造成负面效果。概念是最基本的，如果对概念的理解不够深入，将会对接下来的学习造成重大影响。

E 老师：在初步接触三角函数的概念时，学生们只是略知一二，许多关于性质的知识都是通过刻板记忆和做题来掌握的。此外，学生们在初中阶段已经学习过锐角三角函数，高中三角函数定义方式的变化使得许多学生无法适应，这对性质和图像的学习产生了影响。在确定三角函数定义的过渡方式时，需要进行一些思考。

2、教师访谈小结

对 5 位高中数学老师的采访成果进行深入整理，并依据采访记录提炼出重要信息进行研究，详细的研究结果如下：

(1) 对于 APOS 理论和变式教学理论一线教师还是比较了解，他们也在教学实践中尝试应用，然而，仍有部分教师缺乏这些理论知识，无法灵活地应用。

(2) 虽然有许多教师采用分层教学，但仍需持续关注。大多数教师会对学生的知识进行归纳和整理网络结构图。在任意角三角函数的学习中，一些教师会使用“单位圆定义法”进行教学，另一些教师则会使用“终边定义法”进行教学。只有少数教师会采用两种方式进行教学。而应用 APOS 理论和变式教学理论进行教学的教师相对较少，需要进一步加强。

(3) 对于 APOS 理论与变式教学理论，许多教师已经接触过，然而他们却未能全面掌握这种方法。三角函数的问题对于学生而言比较棘手，那些基础知识薄弱的学生往往无法理解，许多老师在应对此类问题的时候，由于缺乏实践经验，使得教师的教学未能达到预期。然而，绝大多数教师普遍持有这种观点，即在 APOS 理念指导下的三角函数变式教学方法能够显著提高学生的学业成绩以及提高学生的学习热情。

二、学生访谈

笔者挑选了 5 位实验班学生作为调查对象进行访谈（如附录 F），根据学生的回答做了详细的记录，目的在于更加全面地了解基于 APOS 理论下的三角函数概念变式教学对学生产生的效果。

1、学生访谈记录

问题 1：基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学课的哪一部分对你的印象特别深刻？

学生 A：我非常喜欢 APOS 理论与变式教学理论的三角函数课，印象最深的是它让我们不再是被动的旁观者，而是主动参与者。

学生 B：通过老师的情景教学，我对三角函数概念课的内容产生了浓厚的兴趣，从而唤醒了我学习的欲望，情景教学印象最深。

学生 C：APOS 理论的三角函数变式教学课给学生带来了一种全新的学习体验，让我全面了解了 APOS 理论的活动、过程、对象、图式四个阶段，全新的学习体验印象最深。

学生 D：教师通过运用网络画板，让我可以实时观察角度、边长以及单位圆的坐标，从而更加清晰地理解三角函数的各种变式，并将数学知识融入实际应用中，从而提高学习效果，网络画板的应用印象最深。

学生 E: 印象最深的是过程性变式与概念性变式题组的设计, 因为这些变式题组可以让学生多角度理解三角函数, 加深对三角函数的理解。

问题 2: 对于高中三角函数的学习, 你认为它和初中的三角函数学习存在何种差异?

学生 A: 高中三角函数的学习与初中三角函数学习并无太大区别, 就是高中三角函数范围更大。

学生 B: 在高中阶段, 教师一直在整理知识, 每堂课结束后都会进行整理。同样, 教师也会对练习题和考试题的解答方式进行整理, 我在高中学习期间整理能力有了很大的提高。

学生 C: 老师会定期安排我们进行知识梳理, 以便让我们能够理解知识的连贯性, 这样不仅可以让我们减少做题数量, 而且能够让我们更深入地剖析问题的解决方法, 学习效率比初中高。

学生 D: 加大对教师的教学策略的解读, 我会密切关注考试中的题目所运用的三角函数哪些新知识和旧知识, 学习理解能力更强了。

学生 E: 在高中三角函数教学中, 我应用了 APOS 理论与变式教学理论来理解三角函数概念。

问题 3: 在学习了 APOS 理论和变式教学理论后, 你觉得自己对三角函数的相关概念理解了吗? 这种理解主要表现在哪些方面?

学生 A: 理解, 对于三角函数性质和图像, 我能够自行进行推理, 无须依赖阅读资料或教师的引领。

学生 B: 理解, 当我在考试解答三角函数题目时, 几乎每一道题都能解答, 期待着教师能够更多地运用 APOS 理论和变式教学理论来授课。

学生 C: 基本理解, 对于一些复杂的三角函数问题, 我虽然可以通过大量寻找资料或老师的帮助来完成, 但是花费的时间较长。

学生 D: 基本理解, 我有能力将三角函数的概念用一个知识框架的方式记忆下来, 但是我的解题能力还是相对较差。

学生 E: 无法理解, 在遇到三角函数问题时, 我几乎无法解答。

问题 4: 对于《三角函数》的学习, 你是如何理解和掌握那些难以理解的知识的呢?

学生 A: 我会选择重新阅读课本, 对于我不明白的知识点进行深入的复习。

学生 B: 我将通过做一些课本上的练习来提升自己的认识, 同时也将购置《必刷题》进行练习, 以此来增强对知识点的领悟。

学生 C: 对老师在课堂上所分享的经典习题进行回顾, 并思索其中所运用的策略和思维方式是否能为我解决问题提供一些支持。

学生 D: 如果用已学习的知识点仍无法解答, 我便向同学请教, 希望他们能提供援手。

学生 E: 在课程结束之后, 通过百度或小猿搜题搜索来寻求解答, 或者向教师请教以

获取援助。

问题 5: 请分享一下高中三角函数与初中三角函数的差异及其关联性?

学生 A: 我可以将高中学习的三角函数视为初中三角函数的进一步扩展或更广泛的表达方式。

学生 B: 在初中阶段, 我们主要探讨的是锐角三角函数, 这实际上涉及直角三角形两个相邻边与斜边的比例关系。然而, 在高中阶段, 对这个三角函数的理解会变得更加深入与复杂。

学生 C: 高中三角函数的应用不仅限于描绘三角形的三边关系, 它还是一种能够描绘事物周期性动态变化的函数模型, 这种变化是随着角度的改变而改变的。

学生 D: 高中三角函数比较复杂, 它具有周期性和规律性, 解答高中三角函数的题目更难。

学生 E: 在高中阶段, 任意角三角函数的变换形式比初中阶段更为丰富, 更具抽象性, 对逻辑思维的要求也更为严格。

2、学生访谈小结

为深入探究学生对 APOS 理论下的三角函数概念变式教学的教学成效, 在教学实验完成之后, 从实验班中随机选择 5 名学生进行采访, 并将采访的内容做出以下梳理。

(1) 5 位学生对 APOS 理论下的三角函数概念变式教学表现出浓厚的兴趣, 学生认为, 利用 APOS 理论和变式理论来教授三角函数, 能使他们的理解更为深入, 也更有利于他们理解学习的内容, 这样的教学方式激发了他们的学习热情。

(2) 学生普遍表示, APOS 理论的变式教学方法相较于传统教学方法具备更大的优越性, 他们可以在上课时能够始终紧随教师的步伐, 而那些较难理解的概念, APOS 理论的变式教学方法可以帮助他们去理解。学生还认为, 高中三角函数学习与之前的函数学习方式存在差异, 而本章的 APOS 理论与变式教学理论的运用, 使得学习效果更明显。

(3) 经过 APOS 理论和变式教学理论的学习, 绝大多数学生已经基本理解了三角函数的概念, 学生还能运用各种手段来阐明未理解的问题。学生都希望, 在接下来的教学过程中, 教师可以更多地运用 APOS 理论和变式教学的方式来授课, 同时他们也期待能将以往的三角函数学习与日常生活的实例相结合, 以便让知识点变得更为简单易懂, 同时也有助于解决实际问题。

(4) 经过对实验班学生的采访总结, 学生普遍觉得高中三角函数的复杂程度远远地超越了初中三角函数, 然而, 这种复杂程度同样带给学生更多的挑战。同时, 也观察到, 学生对 APOS 理论的变式教学仍然非常热衷并愿意去尝试, 学生在理解三角函数概念知识以及掌握问题的解决策略上取得了显著的进步。

第 6 章 研究结论与展望

6.1 研究结论

通过理论分析和多次实践,将 APOS 理论和变式教学理论运用于数学教学指导,探究了如何在高中课堂上进行三角函数概念变式教学研究,结合 SPSS26.0 数据分析和处理,得出以下结论:

(1) 通过对相关文献的研究,建立起一套理论指导教学的方案。将 APOS 理论和变式教学理论有机融合,构建出一套概念变式教学模式。活动阶段,重视引入情境变式和活动变式;过程阶段,依靠网络画板、白板及其他多种多媒体工具的展示,辅导学生在“变化”现象中归纳出概念中不变的本质;对象阶段,形成概念并运用多种概念性变式帮助学生更准确把握概念本质;图式阶段,通过问题的多种变式和概念图、表格、思维导图等多样化的图式形式引导学生构成完整的心理图式结构。

(2) 通过实验前后数学学习非智力因素调查问卷的分析,实验前两个班学生的非智力因素无显著差异;实验后实验班的表现总体显著优于对照班,两者之间在动机、情绪情感、态度、意志方面存在显著差异,在性格方面无显著差异。这表明基于 APOS 理论和变式理论的三角函数概念教学有利于培养学生的数学学习非智力因素,提高学生的学习主动性。

(3) 通过实验前后测试卷的成绩结果分析,实验前两个班学生的前测成绩无显著差异;实验后实验班后测平均成绩与对照班有显著差异,实验班的成绩明显高于对照班。这表明采用基于 APOS 理论和变式教学理论的教学模式能够有效地提升学生的数学学习成绩。

(4) 通过教师教学调查及教师访谈,发现教师对于 APOS 理论与变式教学理论有所了解,但在教学中不常应用,并且教师认为这种教学模式能有效促进学生学习数学概念。

(5) 通过学生访谈,观察到学生对数学有着极高的热情。APOS 理论的三角函数变式教学为课堂带来了新的活力,让学生们在轻松愉悦的氛围中学习数学,课堂气氛更加活跃,学习更加有趣。

6.2 研究反思

通过将 APOS 理论与变式教学理论有机地结合起来,本文提出了一种新的教学模型,以更好地帮助学生理解和掌握三角函数概念。尽管已经采用此模型来构建教学设计,但仍需要进一步探索,以更加全面地实现教学目标,并对其进行更加科学的评估。

根据这个模型,笔者只在江西省抚州市某中学高中进行了教学实验,无法涵盖所有的不同水平的学生。也没有在其他城市获得更多的一线教学经验。尽管已有许多关于理论整

合的探讨,但对于 APOS 理论与变式教学研究理论整合的研究,我仍然停留表面整合前人的理论,缺乏更深入的探索,以了解学生学习过程中的心理变化。

经过深入研究,发现 APOS 理论与变式教学理论的结合是一个重要的课题,但是发现基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学研究的教学硕士论文较少。因此,对于自己的整合能否成功应用于实际三角函数概念教学仍然存在疑虑,本文的研究内容也需要进一步验证。这篇论文的主要目的是探讨一种新的教学方法,它能够帮助学生更好地理解三角函数概念的产生和发展,但也需要进一步探索如何创建一个完整的概念图式。

6.3 研究展望

基于概念二重性的理论框架,提出了一种新的教学模式,以更好地实现理论整合。尽管本文仅涉及两个三角函数概念的教学设计,但考虑到它们各自独特的性质,在这种模式下,如何让课堂活动更具有创意、更具有挑战性,仍然是一个挑战。

APOS 理论与变式理论的结合可以为教师提供有效的教学方法,从而更好地帮助学生理解三角函数的概念,从而提高学习效果。未来的教学中,应该将变式理论与 APOS 理论相结合,努力地提升数学课堂的效率,把 40 分钟的数学课堂做得淋漓尽致,进一步提升学生的基础数学能力。

笔者期望未来能够将一线教学经验与 APOS 理论相结合,创造出更加精准、有趣的情景变式和活动变式三角函数概念的数学课堂。在这种教学模式中,关键步骤需要深入探讨,并需要通过实际操作来积累丰富的经验。

随着数学新课程标准的颁布,教学更注重“淡化形式,注重实质”。将 APOS 理论与变式教学理论有机结合,以更有效的方式指导三角函数概念教学,并通过实践来完善理论的不足之处,期望教师们能够在未来的教学中更好地实现这一目标:

(1) 为了更好地帮助学生掌握三角函数概念,应该根据课程内容的特点,根据 APOS 理论的四个阶段来辅助授课。这样就能够更好地满足不同学生的需求,并且能够最大限度地实现因材施教。

(2) 通过将 APOS 理论与变式教学有机结合,教师可以让教学更加多样化,这样做可以更有效地吸引学生的关注,点燃他们对于学习数学的热情,进一步提高学习成绩。

(3) 为了让学生能够全身心地投入到学习中,应该鼓励学生运用大脑,利用双手和放出眼光,以便让学生的注意力达到最佳状态,通过有效的课堂安排,鼓励学生积极地寻找、探究和激发学生的创新思维,从而提升学生的能力。

(4) 采用 APOS 理论的变式教学模式,将三角函数的概念融入日常生活,使其成为一种可以被实践化的概念,让学生们更加深刻地认识数学的魅力,并从中获得学习数学的乐趣。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] Piaget J. Genetic Epistemology[M]. New York:Columbia University, 1968:321.
- [3] Dubinsky E, McDonald M A. APOS:A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research[J]. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, 2001(7):275-282.
- [4] 姜竹岭.高中数学原始概念和重要核心概念的教学法[D].苏州:苏州大学,2013.
- [5] 尹梦伟,袁璐.基于 APOS 理论的指数函数概念教学设计[J].教育教学论坛,2020, (19):279-280.
- [6] 赵彩青.初高中函数概念教学的衔接现状调查及对策研究[D].天水:天水师范学院,2019.
- [7] 邵瑞珍.教育心理学[M].上海:上海教育出版社,1988:95.
- [8] 顾非石,顾泠沅.诠释“中国学习者悖论”的变式教学研究[J].课程.教材.教法,2016,36(03):86-91.
- [9] 鲍建生,黄荣金,易凌峰等.变式教学研究[J].数学教学,2003(01):11-12.
- [10] 高东月.基于 APOS 理论的数学概念的变式教学[D].大连:辽宁师范大学,2019.
- [11] Dubinsky Ed, Harel G. The Nature of the process Conception of Function[J]. The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, 1991, 85-107.
- [12] Salgado H, Trigueros M. Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory[J]. Journal of Mathematical Behavior, 2015, 39100-120.
- [13] Afgani W M, Suryadi D, Dahlan A J. Analysis of Undergraduate Students' Mathematical Understanding Ability of the Limit of Function Based on APOS Theory Perspective[J]. Journal of Physics:Conference Series, 2017, 895(1):012056-012056.
- [14] Vahid B, Hedyeh E, Vicenç F. A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2019, 51(3):1-19.
- [15] M I A, Yerizon, Nita S. Improvement students' achievement in elementary linear algebra through APOS theory approach[J]. Journal of Physics:Conference Series, 2020, 1567(2):022080.
- [16] Gebeyehu M B, Atnafu M A, Ejigu T W. Implementing GeoGebra integrated with multi-teaching approaches guided by the APOS theory to enhance students' conceptual understanding of limit in Ethiopian Universities[J]. Heliyon, 2021, 7(5):e07012-e07012.
- [17] Hakim R A, Harahap B M. Cognitive structure strengthening students of Smk N 1 Arse class Xii with learning model advance organizer by grant structured LkE based APOS theory[J]. Jurnal Pendidikan Fisika, 2013, 2(1):34-42.
- [18] Martínez-Planell R, Delgado C A. The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses:An application of APOS theory[J]. Journal of Mathematical Behavior, 2016, 43111-133.
- [19] Brijlall D, Ndlovu Z. High school learners' mental construction during solving optimisation problems in Calculus:a South African case study[J]. South African Journal of Education, 2013, 33(2):1-18.
- [20] Mudrikah A. Problem-Based Learning Associated by Action-Process-Object-Schema(APOS)Theory to Enhance Students' High Order Mathematical Thinking Ability[J]. International Journal of Research in

Education and Science, 2015, (1):125-135.

- [21] Siyepu W S. Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions[J]. International Journal of STEM Education, 2015, 2(1):
- [22] Arnawa M I, M I A, Yanita, et al. Improvement a positive attitude towards abstract algebra through APOS theory approach[J]. Journal of Physics:Conference Series, 2020, 1503(1):012008.
- [23] 郑秀云.APOS 理论指导下的高中数学概念教学[D].福州: 福建师范大学,2003.
- [24] 曹丽娟.基于 APOS 理论下的高中函数概念教学方式探究[D].西安: 陕西师范大学,2012.
- [25] 林晓君,付娟.基于 APOS 理论的“完全平方公式”的教学设计[J].中学数学研究(华南师范大学版),2020,(12):3-5.
- [26] 苗昱.基于 APOS 理论的高中平面向量概念教学研究[D].天津: 天津师范大学,2022.
- [27] 苏蕾.基于 APOS 理论的初中数与代数概念的微课设计研究[D].济南: 山东师范大学,2023.
- [28] 乔连全.APOS:一种建构主义的数学学习理论[J].全球教育展望,2001,(03):16-18.
- [29] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京: 高等教育出版社,2004.
- [30] 鲍建生,周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海: 上海教育出版社,2009.
- [31] 畅伟杰.数学概念学习中变式教学与 APOS 理论的整合研究[D].西安: 陕西师范大学,2017.
- [32] 李琛.基于 APOS 理论下的对数概念教学现状探究[D].西安: 陕西师范大学,2018.
- [33] 焦锬.APOS理论观点下的对数概念教学与评析[J].教学管理与教育研究,2019,(19):97-100.
- [34] 谢青秀.APOS理论下的三角函数教学设计实施研究分析[D].武汉: 华中师范大学,2021.
- [35] 赵婉婷.基于APOS和学习迁移理论的三角函数教学研究[D].大连: 辽宁师范大学,2022.
- [36] 李丹丹.基于APOS理论的高中数学概念的变式教学研究[D].大连: 辽宁师范大学,2022.
- [37] 仲昭琳.基于APOS理论的高中数学概念变式教学研究[D].哈尔滨: 哈尔滨师范大学,2022.
- [38] Annie Y S T. Applying the Theory of Variation in Teaching Reading[J]. Australian Journal of Teacher Education, 2012, 37(10).
- [39] Samuelsson P I, Pramling N.Variation Theory of Learning and Developmental Pedagogy:Two Context-related Models of Learning Grounded in Phenomenography[J]. Scandinavian Journal of Educational Research, 2016, 60(3):286-295.
- [40] Jing T J, Ahmad R T, Abu K B, et al.The Adoption of Variation Theory in the Classroom:Effect on Students' Algebraic Achievement and Motivation to Learn[J]. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 2017, 15(2):307-325.
- [41] Kullberg A, Kempe R U, Marton F. What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?[J]. ZDM, 2017, 49(4):559-569.
- [42] 顾冷沅著.学会教学[M].北京: 人民教育出版社,1991.
- [43] 王志宝.变式教学——研究性学习的一种模式[J].太原城市职业技术学院学报,2004,(S3):77-78.
- [44] 徐薇.核心素养视角下高中数学变式教学的研究[D].哈尔滨: 哈尔滨师范大学,2023.
- [45] 程慧.高中数学变式教学的研究与实践[D].武汉: 华中师范大学,2007.
- [46] 艾尔肯·吾买尔,王守哲.论APOS视角下的概念性变式教学[J].长春大学学报,2016,26(06):94-97.
- [47] 孟秋廷.变式教学应用于高中数学教学的现状调查和实验研究[D].西安: 陕西师范大学,2019.
- [48] 莫翠霞.基于APOS理论和变式教学整合的高中数学概念教学研究[D].桂林: 广西师范大学,2020.
- [49] 李法玉.基于APOS理论和变式教学整合的圆锥曲线教学研究[D].上海: 上海师范大学,2021.
- [50] 刘亚倩.变式教学在高中数学教学中的应用策略研究[D].延边: 延边大学,2022.

- [51] 安慧珍.APOS理论与变式教学结合的三角函数教学设计研究[D].兰州：西北师范大学,2023.
- [52] 伍绮玲.APOS理论与变式教学理论整合下的数学概念教学探究[D].福州：福建师范大学,2020.
- [53] 王光明,宋金锦,王兆云.高中生数学学习非智力特征调查问卷的编制[J].数学教育学报,2015,24(03):17-27.

附 录

附录 A

高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验前）

亲爱的同学：

您好！非常感谢您抽出宝贵的时间来完成本次调查，本次调查问卷目的是深入了解学生的数学学习非智力因素，它主要包括学生的学习动机、情绪情感、学习态度、学习意志以及性格等，因此，诚挚地邀请您参加本次调研。请根据您的个人情况和真实想法进行如实填写，本人将确保所有的回答信息绝对保密。本问卷采用匿名方式进行，且仅供硕士论文写作提供参考，不作其他用途，请放心参与。在阅读每一个问题时，请认真作答每个选项，谢谢。

根据题目所提供的信息，请各位同学根据内心的真实想法选出符合自己情况的答案。答案分为五个不同的等级，分别为 A、B、C、D 和 E。A. 完全一致 B. 大体上一致 C. 不确定 D. 少部分一致 E. 完全不一致

1	我偏爱学习数学中引起我好奇心的内容，即使它们很难懂。	A	B	C	D	E
2	我认为数学成绩的高低，主要取决于自身学习态度、努力程度等。	A	B	C	D	E
3	在数学学习中，我相信“有志者事竟成”。	A	B	C	D	E
4	在数学课堂上，我不能表现得比其他同学差。	A	B	C	D	E
5	上数学课时我总是聚精会神地听老师的讲解，学习效率比较高。	A	B	C	D	E
6	如果数学老师教的不好，我就不太想学习数学。	A	B	C	D	E
7	我很愿意参加各种数学活动，展示自己的数学能力。	A	B	C	D	E
8	在上数学课时，我觉得自己轻松自如。	A	B	C	D	E
9	数学作业的答案不仅仅是答案正确就行，解题过程、工整的字迹都很重要。	A	B	C	D	E
10	在数学教师没有明确要求的情况下，我也会要求自己在每章结束时进行梳理、复习。	A	B	C	D	E
11	上数学课时，我能够认真听讲，并且保持旺盛的精力。	A	B	C	D	E
12	与教师或同学交流、讨论一些数学问题时，我不敢反驳他们的观点。	A	B	C	D	E
13	我认为代数、三角、立体几何等门类的知识是相互联系的，在思想方法上也有共通之处，它们不是独立门类的知识。	A	B	C	D	E
14	在数学考试时，如果老师走过来我会很紧张。	A	B	C	D	E
15	当我的数学考试成绩比同学差时，我会努力学习，争取尽早赶上并超越同学。	A	B	C	D	E

附录 B

高中学生数学学习非智力因素调查问卷（实验后）

亲爱的同学：

您好！非常感谢您抽出宝贵的时间来完成本次调查，本研究的目的在于了解基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学在实验班实验之后，对于学生的学习动机、情绪情感、学习态度、学习意志以及性格等数学学习非智力因素影响情况，因此，诚挚地邀请您参加本次调研。请根据您的个人情况和真实想法进行如实填写，本人将确保所有的回答信息绝对保密。本问卷采用匿名方式进行，且仅供硕士论文写作提供参考，不作其他用途，请放心参与。在阅读每一个问题时，请认真作答每个选项，谢谢。

根据题目所提供的信息，请各位同学根据内心的真实想法选出符合自己情况的答案。答案分为五个不同的等级，分别为 A、B、C、D 和 E。A. 完全一致 B. 大体上一致 C. 不确定 D. 少部分一致 E. 完全不一致

1	当我在学习数学时遇到不明白的地方，我会自己查找资料，直到彻底弄明白为止。	A	B	C	D	E
2	数学是一门非常重要的基础学科。	A	B	C	D	E
3	对于数学学习，我会制定学习计划，并且会按计划完成。	A	B	C	D	E
4	数学考试后，我对全班最好的成绩是多少分、是谁取得的特别感兴趣。	A	B	C	D	E
5	即使我花费再多的时间学习数学，数学成绩还是很难提高。	A	B	C	D	E
6	如果数学考试成绩比较高，经常得到老师或同学的认可，我会更加努力。	A	B	C	D	E
7	学数学让我有成就感。	A	B	C	D	E
8	数学考试成绩没有达到预期时，我真想把试卷扔掉。	A	B	C	D	E
9	如果今天的数学作业教师不检查，我就不会认真完成，甚至不完成。	A	B	C	D	E
10	有的数学内容不需要老师讲解，我能自主学习。	A	B	C	D	E
11	即使数学老师讲课不太生动，不符合我的胃口，我也会坚持认真听讲，努力理解。	A	B	C	D	E
12	对于感到困惑的数学公式或定理，我会主动向教师询问。	A	B	C	D	E
13	数学是一门很有价值且有必要的学科。	A	B	C	D	E
14	当我数学考试考得较差时，我会总结学习方法，争取下一次考好。	A	B	C	D	E
15	我总会担心自己的数学学习，例如担心学习内容太难而学不会、担心听不懂老师讲课、担心考试失败等。	A	B	C	D	E

附录 C

初中水平三角函数测试卷（前测卷）

一、选择题（每题 5 分，共 50 分）

1. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ ，则下列选项正确的是（ ）

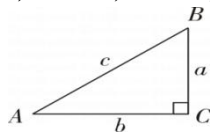


图 1

- A. $\sin A = \frac{b}{c}$ B. $\cos B = \frac{b}{c}$ C. $\tan A = \frac{a}{c}$ D. $\tan B = \frac{b}{a}$

2. 等腰三角形的底边长为 10cm，周长为 36cm，则底角的正切值是（ ）

- A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. 无法确定

3. 如果 $\tan \alpha = 1.732$ ，那么锐角 α 的度数大约为（ ）

- A. 30° B. 50° C. 60° D. 70°

4. 如图 2，正六边形的边长是 1cm，则线段 AB 和 CD 之间的距离为（ ）

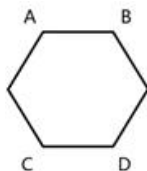


图 2

- A. $2\sqrt{3}$ cm B. $\sqrt{3}$ cm C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm D. 1 cm

5. 如图 3，点 A, B, C 在正方形网格的格点上，则 $\sin \angle BAC =$ （ ）

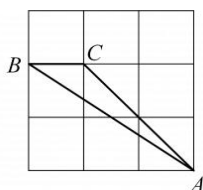


图 3

- A. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{26}}{26}$

6. 已知一斜坡的坡比为 1:2，斜坡长为 15 米，则斜坡上最高点离地面的高度为（ ）

- A. 7.5 米 B. $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ 米 C. $3\sqrt{5}$ 米 D. $6\sqrt{5}$ 米

7. 三个身高一样的孩子甲、乙、丙在放风筝，风筝的线长分别是 300 米，250 米，200 米。线与地面的夹角分别是 30° ， 45° ， 60° （假设风筝的线是直的），那么这三个孩子放的风筝（ ）

- A. 甲的最高 B. 乙的最低 C. 丙的最低 D. 乙的最高

8. 一小球从斜坡的顶端沿斜坡向下滚落到斜坡底端, 行了 100 米, 下落的铅直高度为 50 米, 则该斜坡的坡度为 ()

- A. 30° B. $1:\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 如图 4, AB 是 $\odot O$ 的直径, 且经过弦 CD 的中点 H, 已知 $\cos \angle CDB = \frac{4}{5}$, $BD = 5$, 则 OH 的长为 ()

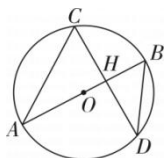


图 4

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{6}$ C. 1 D. $\frac{7}{6}$

10. 如图 5, 在矩形 ABCD 中, $DE \perp AC$ 交 BC 于点 E, 点 F 在 CD 上, 连接 BF 分别交 DE, AC 于点 G, H. 若 $BG = GF = DF$, 则 $\sin \angle FBC$ 的值是 ()

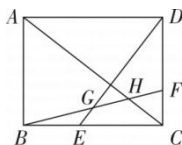


图 5

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

二、填空题 (每题 5 分, 共 25 分)

11. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $AC = 6$, 那么 AB 的长是 _____。

12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $AB = 6$, 则 $\tan A =$ _____。

13. 已知 α, β 均为锐角, 且满足 $|\sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}| + (\tan \beta - 1)^2 = 0$, 则 $\alpha + \beta =$ _____。

14. 如图 6, 人字梯为现代家庭常用的工具. 如图, 若 AB, AC 的长都为 $1.5m$, 当 $\alpha = 50^\circ$ 时, 人字梯顶端离地面的高度 AD 为 _____ m. (结果保留小数点后 1 位) (参考数据: $\sin 50^\circ \approx 0.77$, $\cos 50^\circ \approx 0.64$, $\tan 50^\circ \approx 1.19$)

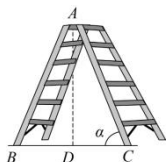


图 6

15. 如图 7, 已知在矩形 ABCD 中, M 是 AD 边的中点, BM 与 AC 垂直, 交直线 AC 于点 N, 连接 DN。

则四个结论中：① $CN=2AN$ ；② $DN=DC$ ；③ $\tan \angle CAD=\sqrt{2}$ ；④ $\triangle AMN \sim \triangle CAB$. 正确的有_____。

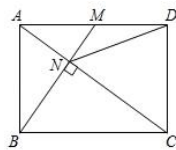


图 7

三、解答题 (75 分)

16. 计算下列三角函数的值。(15 分)

(1) $\sqrt{2}\sin 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ + \tan^2 45^\circ$ (2) $(\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ) \times \tan 60^\circ$

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2\sin 60^\circ - \sqrt{12} + (1-\sqrt{3})^0$

17. 暑假期间, 小明与小亮相约到某旅游风景区登山, 需要登顶 600m 高的山峰, 由山底 A 处先步行 300m 到达 B 处, 再由 B 处乘坐缆车直达山峰 D 处, 假设点 A, B, D, E, F 在同一平面上, 山坡 AB 的斜度为 30° , 缆车运路线 BD 与水平面的夹角为 53° (如图 8)。(换乘登山缆车的时间忽略不计)

(1) 求登山缆车上升的高度 DE; (8 分)

(2) 若步行速度为 $30m/min$, 登山缆车速度为 $60m/min$, 计算从 A 山脚下到 D 山巅的时间大概是多少分钟? (精确到 $0.01min$) (12 分) ($\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$)

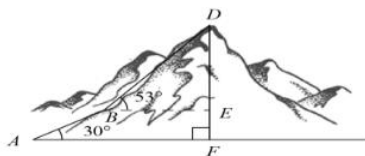


图 8

18. 如图 9 左边, 是一辆小汽车与墙平行停放的实物图片, 图 9 右边是它的俯视图, 汽车靠墙一侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 米, 已知小汽车车门宽 AO 为 1.2 米。

(参考数据: $\sin 40^\circ \approx 0.6428$, $\cos 40^\circ \approx 0.7660$, $\sin 41^\circ \approx 0.6561$, $\cos 41^\circ \approx 0.7541$, $\sin 42^\circ \approx 0.6667$, $\cos 42^\circ \approx 0.7431$)

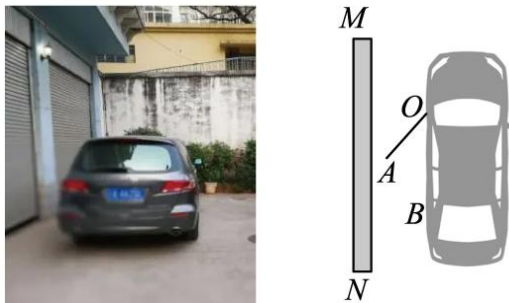


图 9

(1) 当车门打开角度 $\angle AOB$ 为 40° 时, 车门是否会碰到墙? 请说明理由。(20 分)

(2) 若车停在原地不动, 靠墙一侧的车门能打开的最大角度约为多少? (20 分)

附录 D

高中水平三角函数测试卷(后测卷)

一、单项选择题(每题 5 分, 共 50 分)

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(1, -2)$, 则 $\sin\alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

2. 360° 化为弧度是 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

3. 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 则 $\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} =$ ()

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{4}$

4. 若 $\sin\alpha > 0$, 且 $\cos\alpha < 0$, 则角 α 是 ()

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

5. 角 α 是以 Ox 为始边, 其终边与单位圆 O 在第四象限点 P 处交汇, 并且点 P 的横坐标是 $\frac{4}{5}$, $\tan\alpha$ 的值是 ()

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

6. 已知 $f(x) = \cos x + 1$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 的周期为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

7. 最小正周期为 π 的偶函数为 ()

- A. $y = \sin x$ B. $y = \sin 2x$ C. $y = \cos x$ D. $y = \cos 2x$

8. 如果把函数 $y = \sin 2x + \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 那么图象的函数解析式是 ()

- A. $y = \sqrt{2} \cos 2x$ B. $y = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
C. $y = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ D. $y = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $-\pi < \varphi < 0$) 的图象如图 1 所示, 则 φ 的值是 ()

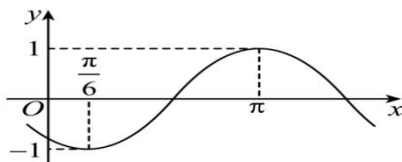


图 1

- A. $-\frac{7\pi}{10}$ B. $-\frac{9\pi}{10}$ C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $-\frac{\pi}{5}$

10. 在三角形 ABC 中, 已知 $\cos 2A = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin A =$ ()

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、多项选择题 (每题 5 分, 共 20 分)

11. 下列三角函数值为负数的是 ()

- A. $\tan(-\frac{3\pi}{4})$ B. $\tan 505^\circ$ C. $\sin 7.6\pi$ D. $\sin 186^\circ$

12. 已知 $\theta \in (0, \pi)$, $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ B. $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ C. $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ D. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$

13. 已知 $\cos \theta = \frac{4-2m}{m+5}$, $\tan \theta = \frac{m-3}{4-2m}$, 且 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 下面选项正确的是 ()

- A. $m = 8$ B. $m = 0$ 或 $m = 8$
C. $\sin \theta > \cos \theta$ D. $\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{95}{169}$

14. 通常, 在平面直角坐标系中, 对于任意角 α , 假设 α 的终点 P 不同于原点, 其坐标为 (x, y) , 并且它与原点之间的距离是 r . 我们定义: 比值 $x/y, r/y, r/x$ 被称为角 α 的余切、余割和正割, 分别被记作 $\cot \alpha$, $\csc \alpha$, $\sec \alpha$, $y = \cot x, y = \csc x, y = \sec x$ 被称为余切函数、余割函数和正割函数。以下描述正确的是 ()

- A. $\cot \frac{7\pi}{4} = -1$ B. $\sin \alpha \cdot \sec \alpha = 1$
C. $y = \sec \alpha$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ D. $2\sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\csc^2 \alpha + \cos^2 \alpha \geq 9$

三、填空题 (每题 5 分, 共 20 分)

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin A =$ _____。

16. 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$, 则 $\sin \theta - \cos \theta =$ _____。

17. 如果点 $P(\sin \alpha, \cos \alpha)$ 在第四象限, 则角 α 是第_____象限角。

18. 已知角 α 的终边经过点 $M(1, -2)$, $\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____。

四、解答题 (每题 20 分, 共 60 分)

19. 已知角 α 满足 $\cos \alpha + 7\sin \alpha = 0$ 。

(1) 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 求 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 的值; (10 分)

(2) 若角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称, 求 $\frac{\sin \beta - 3\cos \beta}{2\sin \beta + \cos \beta}$ 的值。 (10 分)

20. 已知 $\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} = 2$, 求下列各式的值。

(1) $\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha}$; (10 分)

(2) $\sin\alpha\cos\alpha + 2$ 。(10 分)

21. 如图 2 所示, 悬挂在弹簧上的小球正在进行上下的振动, 它在 t (单位: s) 时相对于静止时的平衡位置的高度 h (单位: cm) 由关系式 $h = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ 确定, 其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $t \in [0, +\infty)$. 在这个过程中, 小球两次触及顶点的最短时间间隔为 1s, 同时, 顶点与最低点间的距离是 10cm。

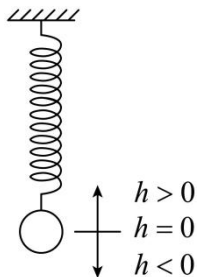


图 2

(1) 求小球相对平衡位置的高度 h 和时间 t 之间的函数关系; (10 分)

(2) 若小球在 t_0 s 内经过最高点的次数恰为 25 次, 求 t_0 的取值范围。(10 分)

附录 E

三角函数概念教师教学现状调查问卷

尊敬的老师:

您好!非常感谢您抽出宝贵的时间来完成本次调查,本次调查问卷目的主要是为了了解学生学习三角函数的情况、APOS 理论及变式教学理论的应用情况等,因此,诚挚地邀请您参加本次调研。请根据您的个人理解和真实想法进行如实填写,本人将确保所有的回答信息绝对保密。本问卷采用匿名方式进行,且仅供硕士论文写作提供参考,不作其他用途,请放心参与。在阅读每一个问题时,请认真作答每个选项,谢谢。

一、教师基本信息

A1、您所教的年级是高中几年级?(可多选)()

A. 高一 B. 高二 C. 高三

A2、您的教龄是多少年?()

A. 0—6 年 B. 6—12 年 C. 12—18 年 D. 18 年以上

A3、您的最高学历是什么?()

A. 大专 B. 本科 C. 研究生及研究生以上

二、教师教学现状

B1、您认为在三角函数概念教学中采用变式教学重要吗?()

A. 非常重要 B. 比较重要 C. 一般 D. 不重要

B2、您认为,学生的数学成绩与他们对三角函数概念的理解和掌握情况有关系吗?()

A. 关系很大 B. 关系不太大 C. 有一点关系 D. 没有关系

B3、您认为在教授三角函数概念课时,采用 APOS 理论教学重要吗?()

A. 非常重要 B. 比较重要 C. 一般 D. 不重要

B4、您在三角函数概念教学中,采用 APOS 理论与变式理论教学次数多吗?()

A. 非常多 B. 比较多 C. 一般 D. 几乎没有

B5、您在阅读三角函数概念数学期刊,是否会经常学习相关的数学 APOS 理论与变式教学理论?
()

A. 经常 B. 一般 C. 偶尔 D. 从来没有

B6、您应用 APOS 理论与变式理论教学后,您认为它们是否适用于高中数学的三角函数概念教学?
()

A. 非常适用 B. 适用 C. 一般 D. 不适用

B7、您会通过丰富多样的变式教学活动来帮助学生更好地理解任意角三角函数?()

A. 一定会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 不会

B8、在教授三角函数概念时,您会设计探究变式教学理论,引导学生自己主动探索与挖掘“ $y = \cos x$ ”的图像吗?()

A. 一定会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 不会

B9、您会在三角函数备课时，会利用 APOS 理论和变式理论进行吗？（ ）

A. 一定会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 不会

B10、您会采用 APOS 理论，让学生主动发现三角函数的“周而复始”的循环规律吗？（ ）

A. 一定会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 不会

B11、对于公式“ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ”，了解 APOS 理论后，您是否会让学利用 APOS 理论自己主动推导出公式？（ ）

A. 一定会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 不会

B12、您在教授任意角三角函数时，是否会经常应用 APOS 理论的四个不同阶段变式理论进行教学？（ ）

A. 一定会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 不会

B13、通过采用 APOS 理论与变式理论教学方法，是否能更有效地唤醒学生的学习热情，帮助他们更好地理解、掌握和运用知识？（ ）

A. 非常有效 B. 有效 C. 有时有效 D. 没有效果

B14、经过前后测试成绩的评估，您认为实验班学生的表现是否优秀？（ ）

A. 非常优秀 B. 优秀 C. 不太优秀 D. 不优秀

B15、您认为实验班学生在理论深入探究方面是否表现出色？（ ）

A. 非常出色 B. 比较出色 C. 不太出色 D. 根本就不出色

B16、将 APOS 理论与变式教学理论有机融合教学，是否能够有效地帮助能力较强的学生在学习三角函数概念课方面取得更优异的表现？（ ）

A. 非常优异 B. 优异 C. 比较优异 D. 不优异

B17、将 APOS 理论与变式教学理论有机融合教学，对于学习能力较弱的学生来说，是否也有着明显的改善作用？（ ）

A. 非常明显 B. 明显 C. 比较明显 D. 不明显

B18、经过一段时间的教学评估，您认为，APOS 理论与变式教学理论有机融合教学模式是否可以使得整个实验班的课堂教学效果大大改善？（ ）

A. 改善很大 B. 改善一些 C. 改善较小 D. 没有改善

附录 F

实验后访谈提纲

一、对教师的访谈

- 1、您认为基于 APOS 理论下的三角函数变式教学方式效果如何？对提高学生学习三角函数的兴趣和成绩是否有效果？
- 2、您在授课过程中，是否会刻意地把各个知识点划分为不同层次进行讲解呢？
- 3、你是否会有意识地帮助学生构建知识网络图？你对 APOS 理论有深入的了解吗？
- 4、对于“单位圆定义法”与“终边定义法”在任意角三角函数的教学，您是采用哪一种方式进行教学呢？会应用 APOS 理论与变式教学理论吗？
- 5、教授三角函数的挑战在哪里？学生在学习过程中容易遇到哪些问题？

二、对学生的访谈

- 1、基于 APOS 理论的三角函数概念变式教学课的哪一部分对你的印象特别深刻？
- 2、对于高中三角函数的学习，你认为它和初中的三角函数学习存在何种差异？
- 3、在学习了 APOS 理论和变式教学理论后，你觉得自己对三角函数的相关概念理解了吗？这种理解主要表现在哪些方面？
- 4、对于《三角函数》的学习，你是如何理解和掌握那些难以理解的知识的呢？
- 5、请分享一下高中三角函数与初中三角函数的差异及其关联性？