

学校代码: 11658
分类号: G633.62

研究生学号: 202213045104016
密 级: _____



海南师范大学
HAINAN NORMAL UNIVERSITY

硕士学位论文

基于网络画板的高中数学教学实践研究 ——以函数单调性为例

论 文 作 者	袁 琰
指 导 教 师	苏 建 伟 李 玉 玲
专业学位领域	学科教学（数学）
申请学位类别	教育硕士
提 交 日 期	二〇二四年五月

**Research on High School Mathematics Teaching
Practice Based on Network Drawing Board
——Taking Function Monotonicity as an
Example**

A Dissertation Submitted for the Degree of Master

Candidate: Yuan Yan

Supervisor: Su Jianwei

Li Yuling

Hainan Normal University

Haikou, China

摘 要

近年来,为加快我国教育现代化和教育强国建设,推进教育教学与信息技术的深度融合,我国致力于促进教育内容、方法和观念的改革与创新。因此,学科工具软件融入课堂教学仍是当代教育研究热点。将信息技术融入学科教学不仅可以将抽象晦涩的知识直观化呈现,有效提升课堂教学效果和学生学习兴趣,还可以丰富教师教学方式,培养学生数学抽象、直观想象、逻辑推理和数学运算等方面的数学核心素养和分析探究能力。本研究在建构主义理论、布鲁纳发现学习理论和视听教学理论的基础上,以“函数单调性”知识点为教学案例,探究网络画板辅助高中数学教学的一般策略和有效性。研究内容包括:(1)根据网络画板特点和函数单调性教学要素制定相关教学原则、策略和框架;(2)以网络画板为教学工具,对“函数的单调性”和“不同函数增长的差异”进行教学设计;(3)将教学设计运用于实践,探究网络画板融入课堂的教学模式是否比传统教学模式具有更好的教学效果。

本研究主要采用文献研究法、访谈法、问卷调查法和对照实验法。首先,笔者通过线上与线下多渠道查阅相关文献和资料,对函数单调性教学和网络画板教学研究现状进行分析整理。其次,对网络画板的功能、特点等进行研究,分析高中数学人教A版教材中关于函数单调性的章节内容,总结网络画板融入函数单调性的教学策略与教学框架。接着,基于网络画板设计出“函数的单调性”和“不同函数增长的差异”的教学设计。最后,在此教学设计的基础上,利用对照实验法在海南某高中的高一年级两个班级开展教学实验,并通过对比学生前测和后测成绩分析教学效果,通过问卷调查和教师访谈了解学生及教师对网络画板教学的态度和建议。

研究表明,基于网络画板的函数单调性教学模式比传统教学模式的效果更好。从学生学习看,网络画板融入数学课堂能提高学生的学习兴趣 and 积极性,激发学生的自主探究水平,培养学生数学核心素养与数学能力。从教师教学看,网络画板教学能活跃课堂氛围及提高教学效率,培养和提高教师信息化素养、教学水平和专业能力。因此该教学模式可以在高中数学课堂中推广应用。

关键词: 网络画板; 函数单调性; 高中数学; 教学策略; 教学设计

Abstract

In recent years, in order to accelerate the modernization of education and the construction of an education powerhouse in China, promote the deep integration of education and information technology, China is committed to promoting the reform and innovation of educational content, methods, and concepts. Therefore, integrating subject tool software into classroom teaching remains a hot topic in contemporary education research. Let the integrating information technology into subject teaching can not only make the abstract knowledge visually present, effectively enhance classroom teaching effectiveness and student learning interest, but also enrich teacher teaching methods, and cultivate students' mathematical core literacy and analytical and exploratory abilities in areas such as mathematical abstraction, intuitive imagination, logical reasoning, and mathematical operations. Based on constructivist theory, Bruner's discovery learning theory and audio-visual teaching theory, this study takes the knowledge point of "monotonicity of functions" as a teaching case to explore the general strategy and effectiveness of using network drawing boards to assist high school mathematics teaching. The research contents include: (1) Develop relevant teaching principles, strategies and frameworks based on the characteristics of the online drawing board and the teaching elements of monotonicity of functions; (2) Using online drawing boards as teaching tools, design teaching on "monotonicity of functions" and "differences in growth of different functions"; (3) Applying teaching design to practice, exploring whether the integration of online drawing boards into the classroom teaching method has better teaching effects than traditional teaching methods.

This study mainly adopts literature research method, interview method, questionnaire survey method and control experiment method. Firstly, the author conducted an organization of the current research status on function monotonicity teaching and online drawing board teaching through multiple channels of online and offline literature and materials. Secondly, the author researched the functions and characteristics of the online drawing board. And

analyzed the chapter content on function monotonicity in the textbook, summarized the teaching strategy and framework. Thirdly, designed teaching designs for "monotonicity of functions" and "differences in growth of different functions" based on the network drawing board. Finally, based on this teaching design, a control experiment was used to conduct a teaching experiment in two classes of a high school in Hainan. The teaching effect was analyzed by comparing the test scores of students, and the attitudes and suggestions of students and teachers were understood through questionnaire surveys and teacher interviews.

The research results indicate that the function monotonicity teaching mode based on the network drawing board is more effective than the traditional teaching mode. From the perspective of students, using online drawing boards for teaching can enhance their interest and enthusiasm in learning, stimulate their exploration and self-learning skills, and cultivate their core mathematical literacy and mathematical abilities. From the perspective of teachers, online drawing board teaching can improve the classroom teaching atmosphere and efficiency, cultivate and improve their information literacy, teaching level and professional ability. Therefore, it can be promoted and applied in high school mathematics classrooms.

Key words: Network Drawing Board; Monotonicity of Functions; High School Mathematics; Teaching Strategies; Instructional Design;

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.1.1 教育信息化的发展.....	1
1.1.2 《普通高中数学课程标准(2020 修订版)》的要求.....	1
1.1.3 函数的单调性在中学数学中的地位与作用	3
1.1.4 中学函数的单调性的教与学存在的问题	4
1.2 研究目的.....	5
1.3 研究意义.....	5
1.3.1 理论意义.....	5
1.3.2 现实意义.....	5
1.4 研究内容与方法.....	6
1.4.1 研究内容.....	6
1.4.2 研究方法.....	6
1.5 研究思路与论文框架.....	7
1.5.1 研究思路.....	7
1.5.2 论文框架.....	8
第二章 概念界定和文献综述	10
2.1 相关概念界定.....	10
2.2 文献综述.....	11
2.2.1 关于网络画板的研究.....	11
2.2.2 关于函数单调性的研究.....	14
2.2.3 总结.....	17
第三章 研究基础	18
3.1 理论基础.....	18
3.2 网络画板软件概述.....	19
3.2.1 网络画板软件的简介.....	19
3.2.2 网络画板软件的特征和与其它数学教学软件的对比	20
3.2.3 网络画板软件的作用.....	24
3.3 函数单调性教学要素研究	25
3.3.1 函数单调性的教材内容编排.....	26
3.3.2 函数单调性内容的学情分析.....	27
3.3.3 数学核心素养在函数单调性教学的体现	27
第四章 基于网络画板的函数单调性教学设计	29
4.1 基于网络画板的高中数学教学设计原则	29

4.1.1 基于网络画板的高中数学教学内容选择原则	29
4.1.2 基于网络画板的高中数学教学设计原则	32
4.2 基于网络画板的函数单调性教学策略	34
4.3 基于网络画板的函数单调性教学设计框架	37
4.4 基于网络画板的函数单调性教学设计	37
4.4.1 网络画板在函数的单调性相关教学中的优势分析	37
4.4.2 《函数的单调性》教学设计.....	39
4.4.3 《不同函数增长的差异》教学设计.....	52
第五章 基于网络画板的函数单调性教学效果调查分析	68
5.1 调查设计.....	68
5.1.1 调查目的与假设.....	68
5.1.2 调查对象.....	68
5.1.3 调查方法.....	68
5.1.4 实验变量.....	69
5.1.5 研究工具.....	69
5.2 课例实施过程.....	69
5.2.1 《函数的单调性》教学片段实录和教学反思	69
5.2.2 《不同函数增长的差异》教学片段实录和教学反思	75
5.3 课例实施效果分析.....	81
5.3.1 实验前测成绩分析.....	81
5.3.2 实验后测成绩分析.....	82
5.3.3 学生问卷调查.....	84
5.3.4 教师访谈分析.....	91
第六章 研究结论与展望	96
6.1 研究结论.....	96
6.2 研究创新.....	97
6.3 研究不足.....	97
6.4 研究展望.....	99
参考文献.....	100
附录 1 网络画板辅助数学教学的满意度调查问卷	104
附录 2 教师访问提纲	106
附录 3 前测试卷	107
附录 4 后测试卷	110

第一章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 教育信息化的发展

2018年4月13日,为加快我国教育现代化和教育强国建设,促进我国教育信息化的融合与创新,中华人民共和国教育部正式发布《教育信息化2.0行动计划》通知。该行动计划的主要任务是推进教育教学与信息技术的深度融合,全面提高教师和学生的信息素养,促进教育内容、方法和观念的改革与创新^[1]。因此考虑如何将学科工具软件融入学科教学仍是当代教育研究热点,信息技术融入学科教学也在不断地丰富教学方式,革新教学理念。

网络画板与几何画板、GeoGebra等数学工具性软件类似,在数学学科教学上具有广泛的应用和实用的价值。它不仅具有强大的绘图、测量等功能,还能实现资源的共享,实现多环境、多平台的使用,在方便操作的同时,更利于教师将其用于日常教学中,实现课堂的高效性、互动性、共享性和动态性,丰富课堂教学方式,提升教学效率。网络画板作为国内第一款领先的移动互联网环境下的动态数学学科教学工具,它的存在不仅促进了教师教学方式的信息化和学生学习方式的自主化,将学生被动接受知识的学习方式,转变为主动探究的学习模式,将课堂更多的交给学生,促进了学生思维的发展和合作意识的提高^[1],还使我国对数学学科教学软件的开发与研究得到进一步深化,促进了我国信息化教育的发展。因此,选用网络画板作为本研究的教学工具,不仅是看重它的功能特点对数学教学的帮助,还是进一步验证我国自主研发的数学学科软件的实用性和功能性,为我国信息化技术的发展提供帮助。

1.1.2 《普通高中数学课程标准（2020修订版）》的要求

一、对教学方式的要求

《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》中指出需要重视信息技术的

运用,实现信息技术与数学课程的深度融合。在现代数学教育中,信息技术不仅是教师教学和学生学习的辅助工具,还为教师和学生之间的交流互动搭建平台^[2]。因此,教师需要注重对自身信息技术能力的提升,重视对信息技术进行有效使用,利用信息技术实现传统教学难以达到的效果,实现课堂教学模式的优化,发展更为有效、自主的教学与学习方式。

张景中院士于2015年开发出的新一代互联网动态数学软件“网络画板”拥有动态几何、智能推理、符号运算和网络交互等技术,是国内第一款领先的移动互联网环境下的动态数学学科教学工具,其功能特点能帮助实现信息技术与数学课程的深度融合。因此,选用网络画板可以进行不同于传统的信息技术教学,探究课堂教学新模式。

二、函数的单调性课程要求

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中根据必修课程和选择性必修课程的内容排布将与函数的单调性有关的教学内容分成五部分,并对这五部分教学内容提出具体的课程要求,具体如表1^[3]:

表1 函数单调性教学内容

课程性质	课程内容	课程要求
必修课程	函数概念与性质	借助函数图象,会用符号语言表达函数的单调性、最值,理解它们的作用和实际意义 ^[3] 。
	幂函数、指数函数、对数函数	<ol style="list-style-type: none"> 1. 通过具体实例,结合一次函数、反比例函数和二次函数的图象,理解它们的变化规律,了解幂函数; 2. 能用描点法或借助计算工具画出具体的指数函数图象,探索并理解指数函数的单调性与特殊点; 3. 通过具体实例,了解对数函数的概念,能用描点法或借助计算工具画出具体的对数函数图象,探索并了解对数函数的单调性与特殊点^[3]。
	三角函数	<ol style="list-style-type: none"> 1. 借助单位圆理解三角函数的定义,能画出这些三角函数的图象,了解三角函数的周期性、单调性、奇偶性、最值; 2. 借助函数图象理解正弦函数、余弦函数、正切函数的性质; 3. 借助图象理解三角函数参数的意义,了解参数的变化对函数图象的影响^[3]。

	函数应用	<ol style="list-style-type: none"> 1. 结合学过的函数图象，了解函数零点与方程解的关系； 2. 结合现实情境中的具体问题，利用计算工具，比较对数函数、一元一次函数、指数函数增长速度的差异，理解“对数增长”“直线上升”“指数爆炸”等的现实含义^[3]。
选择性必修课程	一元函数 导数及其应用	<ol style="list-style-type: none"> 1. 结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系，能利用导数研究函数的单调性； 2. 能利用导数求出某些函数的极值、最值，体会导数与单调性、极值、最值的关系^[3]。

从表 1 中函数单调性的教学内容可知，函数单调性这个知识点贯穿整个高中，具有十分重要的作用，而《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》提出要借助计算工具画出函数图象，利用几何直观的形式理解函数单调性内容。因此，利用信息技术研究函数单调性也是课程发展的要求。

1.1.3 函数的单调性在中学数学中的地位与作用

通过《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》可以看出函数单调性的知识在高中学习中应用广泛，是高中数学学习的重要知识点，是函数理论的基础，它能帮助学生深入理解函数图象的变化规律。通过学习函数的单调性，学生可以掌握函数增减性、极值点和拐点等重要概念，帮助学生巩固初中一次函数、二次函数等函数知识的同时，为学生理解其它高中函数图象特征，解决不等式、方程、数列和导数等问题提供帮助^[3]，将复杂、抽象的问题以直观化、形象化的方式呈现，提高学生的学习效率和解决问题的能力。

笔者通过搜集海南省近六年（2018 年—2023 年）的高考理科数学试卷，并对试卷中出现和运用函数的单调性知识点的相关试题进行整理，得到函数单调性涉及的知识点以及其在试卷中的占比情况，具体如下表 2：

表 2 函数单调性内容试卷占比情况

卷类	题号、题型	考查内容	合计分值	比重
2018 年 海南卷（理）	3 选择题	函数图象	5+5+12+10	21.33%
	10 选择题	函数的单调性，最大值		

	21 解答题 23 选考题	导数及其应用, 最大值, 零点 不等式应用, 最值		
2019 年 海南卷 (理)	6 选择题 11 选择题 20 解答题 23 选考题	函数的单调性 函数的单调性, 最大值 函数的单调性, 函数零点 函数单调性与不等式	5+5+12+10	21.33%
2020 年 海南卷 (理)	7 选择题 8 选择题 11 选择题 22 解答题	函数单调性 函数单调性 函数图象 导数及其应用	5+5+5+12	18%
2021 年 新高考 II 卷	7 选择题 22 解答题	函数单调性 函数单调性, 零点	5+12	11.33%
2022 年 新高考 II 卷	9 选择题 14 填空 22 解答	函数图象 导数及其应用, 函数零点 函数的单调性, 导数及其应用	5+5+12	14.67%
2023 年 新高考 II 卷	6 选择题 11 选择题 22 解答	函数单调性, 最小值 导数及其应用, 极值 导数及其应用, 极值, 不等式	5+5+12	14.67%

通过对上述高考试卷进行分析与整理, 可以发现函数的单调性在高考中占有较大比重。对于函数的单调性知识点的常见的应用主要有: 能利用函数的单调性比较几个函数值的大小; 能利用函数的单调性解相关不等式或比较不等式的大小; 能利用函数的单调性确定函数的值域、最值; 能利用导数求相关函数的单调性、零点以及极值等。

综上所述, 函数的单调性知识点不仅在高中数学教学中具有重要地位, 还在高中试题编制中具有广泛应用, 是中学数学的一个重要知识点, 掌握其内容对学生的学习具有必要性。

1.1.4 中学函数的单调性的教与学存在的问题

函数的单调性是中学数学学习的重要知识点, 它涉及的内容应用性广, 在多方面产生作用, 是教师教学的一大重点。但是在如今的函数的单调性相关教学上, 教师常用静

态图片来直接给出函数的增减性情况，很少使用动态数学教学软件来表示增减的动态性过程，这使学生对概念的理解停留表面，因此并不利于学生的直观理解。并且当今对于函数的单调性的教学研究多以概念教学为主，主要是讨论定义的生成过程，缺乏对建立数学模型类问题的具体教学与学习，这不利于学生数学建模核心素养的培养与发展^[4]。

因此在函数的单调性教学方面，教师不仅要注意知识点的传授，还要思考教学环节的内容设计与工具使用，加强对建立模型的探究式教学的思考与研究，改进教学方式，丰富教学案例。

1.2 研究目的

本文的研究目的主要有以下三点：

一、探讨基于网络画板的高中数学教学设计理论、原则、模式和策略，为网络画板融入数学教学和函数单调性的教学提供一些理论参考；

二、通过网络画板与函数单调性教学内容融合，开展教学实践，改进教师教学方法，改变学生学习方式，提高教学与学习的效率，促进师生信息素养的培养与提高；

三、通过对学生进行前后测成绩分析和发放调查问卷，并对教师进行访谈，探究网络画板融入函数单调性的教学效果和建议，提供实践与数据参考。

1.3 研究意义

1.3.1 理论意义

本文研究通过对文献进行搜集与查找，得到基于网络画板的函数单调性教学理论基础，提出网络画板融入函数单调性教学的原则、模式和策略。同时结合网络画板的特点进行函数单调性教学设计，探索出一种网络画板与函数单调性教学相融合的教学模式，为一线教师提供理论参考，从而达到培养学生数学核心素养、提高学生学习效率的目的。

1.3.2 现实意义

本文利用网络画板的交互式特点，在课堂上实现教师与学生之间的互动与交流，并利用网络画板资源共享的功能实现教师对学生的课后个性化辅导以及学生之间的交流学习，从而改变教师的教学方法与学生的学习方式。同时，网络画板通过图象和动画的

形式将抽象的符号化语言直观化，在增加趣味性的同时将问题简单化，有利于激发学生学习兴趣，提高学生参与度和学习效率，创造良好的课堂氛围。函数单调性知识在高中阶段以符号化语言进行叙述，因此知识抽象，而利用网络画板对函数单调性的数学模型进行建立，不仅在概念学习上给学生创造合适的情境，同时也在探究性学习上提供助力，更利于学生理解函数单调性的概念并进行利用。

1.4 研究内容与方法

1.4.1 研究内容

本文的研究内容为基于网络画板的函数单调性教学，主要包含以下几个方面：

一、分析网络画板与函数单调性的教学案例以及函数单调性在教材方面和学生方面的情况，形成基于网络画板的函数单调性教学设计、教学策略和教学框架。

二、基于网络画板进行与函数单调性相关的教学实践，使网络画板融入高中数学，为信息技术融入数学学科教学提供更多案例。

三、对基于网络画板的函数单调性教学实验进行效果分析，探讨网络画板对于数学教学的帮助。

1.4.2 研究方法

本文基于研究内容选择了文献研究法、访谈法、问卷调查法和对照实验法，并利用这四种研究方法对研究内容展开分析与实验^[5]。

一、文献研究法

通过线上与线下多渠道收集与网络画板教学和函数单调性教学相关的文献和资料，分别对函数单调性教学研究现状和网络画板教学研究现状进行分析整理。对网络画板的功能、特点等进行整理与阐述，分析高中数学人教A版教材中关于函数单调性的章节内容，得出网络画板融入函数单调性的教学策略与教学框架，设计合适的教学设计。

二、访谈法

在研究过程中，通过访谈法了解实验学校中高一数学教师对于函数单调性教学方面的看法与意见，以此调整教学设计与教学策略。教学后再次应用访谈法了解教师对于使用网络画板进行函数单调性教学的看法与建议，便于后续教学方案的修改。

三、问卷调查法

在进行函数单调性概念教学实验和不同函数增长的差异探究实验后，对学生发放与网络画板辅助教学相关的态度调查问卷，调查学生对于应用网络画板进行教学的态度与看法，了解该教学模式是否有助于学生数学能力和数学核心素养的培养，以此为今后教学模式的修改与完善做好准备。

四、对照实验法

选取海南某一所高中的高一年级相同水平的两个班级作为对照组，教学内容、教学课时和教师等因素保持一致，只改变课堂教学方式，实验组采用网络画板辅助函数单调性的概念教学，对照组则采用传统静态图片进行授课。实验前对两个班级进行前测成绩分析，了解水平情况是否一致，实验后对两个班级发放后测试卷，并进行成绩分析，了解成绩是否产生了差异，以此确定网络画板辅助教学是否有助于学生提高对知识点的理解。

1.5 研究思路与论文框架

1.5.1 研究思路

本文从理论和实践两个角度出发，选定高中数学人教 A 版必修第一册中函数单调性的相关章节作为教学内容，研究网络画板在高中数学函数单调性的教学实践和应用，具体思路见图 1。首先通过搜集和查阅文献了解网络画板的教学现状，确定本文研究所要选取的内容；其次搜集和查阅与函数单调性教学相关的文献，了解函数单调性的教学现状、重要性和教学要素；接着根据函数单调性章节的内容特点和学生情况，通过资料查询和与教师交流，制定基于网络画板的函数单调性教学原则、策略和教学设计；最后，选定同一水平的两个班级开展基于网络画板的函数单调性教学实验，并在实验后对教师进行访谈，对学生进行问卷调查和前后成绩检验，以此了解网络画板对于高中数学教学的影响和作用，并根据教师意见对教学设计和策略进行相应的改善。

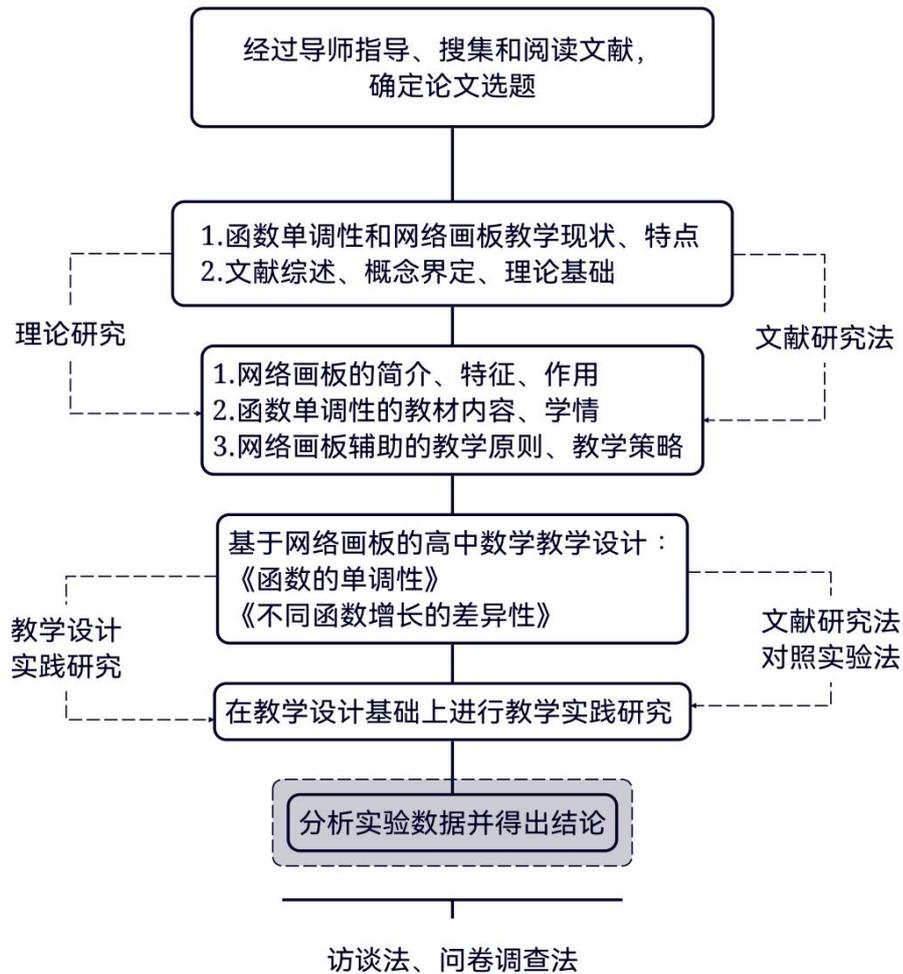


图1 研究思路框架

1.5.2 论文框架

本文从理论和实践两个角度出发，选定高中数学人教A版必修第一册中函数单调性的相关章节为教学内容，研究网络画板在高中数学函数单调性教学中的应用，对于本研究的思路、过程和结果主要分成六章来进行阐述和说明，具体如下：

第一章是绪论，主要是通过对文献进行查阅和分析来说明本文的研究背景、目的、意义、内容、方法和思路。

第二章是概念界定和文献综述，通过搜集和阅读文献，总结并分析网络画板教学现状和函数单调性教学的研究现状，得出本文研究思路。

第三章是研究基础，从网络画板的特点、用途以及函数单调性的教学要素出发，阐述函数单调性重要性的同时，说明网络画板融入中学数学教学的可行性。

第四章是基于网络画板的函数单调性教学设计，主要包含基于网络画板的函数单调

性教学的原则、策略和教学设计，并为网络画板应用于函数单调性教学提供相应的案例，主要围绕“函数的单调性”的概念教学和“不同函数增长的差异”的探究教学展开论述。

第五章是基于网络画板的函数单调性教学实录和教学效果调查分析，通过设计对照试验，对教学设计展开实践教学，并根据学生的前后测成绩分析了解网络画板用于函数单调性的教学效果，通过问卷调查和访谈法得到相关认知态度和教学建议。

第六章是研究结论和展望，根据第五章中对实验数据进行分析得到的结果，对教学效果进行合理的分析，并针对实验过程、结果和教师访谈结果进行反思，给出相应的建议，并针对本研究的不足提出后续可继续深入研究的方向。

第二章 概念界定和文献综述

2.1 相关概念界定

一、教育信息化

“信息化”一词早在 20 世纪 60 年代就已经诞生，“教育信息化”的概念是在 20 世纪 90 年代的美国被提出，但我国关于“信息化”的普及则是在 20 世纪 90 年代末随着网络的发展而开始兴起，并逐渐得到重视^[6]。2018 年 4 月 13 日，我国教育部正式发布《教育信息化 2.0 行动计划》，该行动计划旨在以教育信息化全面推动教育现代化，开启智能时代教育，它对深化教育改革，实施素质教育，培养创新型人才具有着重大意义。

教育信息化是指运用网络多媒体等信息化工具来促进教育改革的过程，具有科技化、信息化和现代化的特点，其最终结果也是形成一种全新的教育形态——信息化教育。教育信息化具有两层含义：一方面是将提高信息素养纳入教育目标之中，促进教师和学生信息化素养的提高，以培养适应信息化时代的人才；另一方面是在教学管理与教学教研中融入信息技术，并注重对教育信息资源的开发和利用^[7]。由此可见，教育信息化是从技术属性和教育属性两方面出发的，如何将教学信息化，利用如计算机、多媒体、人工智能和网络通讯等信息技术工具进行教学，使教学方式、手段和传播形式都得到信息化与科技化发展，教学效果和教学效率得到发展与提升成为教育信息化的目的和要求。

二、函数的单调性

函数是一种描述变量间存在某种确定性的模型，可以表征和描述自然规律，它是联系数学世界与现实世界的桥梁。函数的单调性也叫做函数的增减性，是指函数的因变量随着函数的自变量的大小变化而产生增减变化的性质，它是函数的基本性质之一，是对函数中变量呈现的某种状态的描述与反映^[8]。函数在其定义域内的某个区间上的单调性主要分为三种情况：一是单调递增，即函数的因变量随着自变量的增大（减小）而增大（减小）的性质；二是单调递减，即函数的因变量随着自变量的增大（减小）而减小（增大）的性质；三是不具有单调性，即函数的因变量随着自变量的增大或减小不产生变化

的性质。在高中数学人教 A 版教材中，函数的单调性定义是将变化看成不等关系，利用代数关系式给出的，具体定义如下^[9]：

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，区间 $D \subseteq I$ ，如果对任意 $x_1, x_2 \in D$ ：

当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增。特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时，则称它为增函数^[9]；

当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减。特别地，当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时，则称它为减函数^[9]。

三、数学核心素养

数学核心素养是指具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现，是学生在数学学习与应用中需要逐步培养与发展的核心素养^[10]。它主要包括六个方面，分别是数学抽象、数学建模、数学运算、数据分析、逻辑推理和直观想象^[3]。而这六方面核心素养的掌握，不仅关注学生对于课堂知识和技能方面的掌握，还关注学生对于知识的应用和迁移能力，关注学生是否能在现实生活中利用自己所学的知识与技能去实现四能，达到发现、提出、思考并解决问题的目的，使学生的知识储备得到提升的同时，切实应用知识，形成真正的数学素养。

2.2 文献综述

2.2.1 关于网络画板的研究

随着教育信息化的发展和智慧教育的推进，信息技术与学科融合逐渐得到普及，成为教师学者们研究的主要内容之一。目前被广大教师广泛使用的数学学科工具主要有“几何画板”、“GeoGebra”、“超级画板”和“网络画板”。考虑“超级画板”和“网络画板”是国内自主开发的动态教学软件^[11]，在国外并没有得到普及，因此对国外更早普及的“几何画板”和“GeoGebra”的相关文献进行分析研究。

一、国外研究现状

1991 年美国研发的“几何画板”作为首款数学学科软件问世，开始了数学学科与学科软件融合的研究。1990 年代中后期，随着计算机硬件性能的提升和图形处理能力的增强，诸如“几何画板”与“GeoGebra”的几何绘图软件开始逐渐流行。如何将几何绘图软件融入教学以及信息技术辅助教学是否有助于促进学生思维能力成长成为教育研究

热点。

2001年 Chang Kyung Yoon、Whang Woo-Hyung 和 Lee Joong Kwoen 学者利用几何画板开发欧式几何的调查和探索活动,提到几何画板可以提供精确的构造和测量帮助猜想和发现定理,视觉图像及操作有助于发现证据,深化学生活动^[12]。同年, Leping Liu 和 Rhoda Cummings 也针对几何画板是否有助于激励孩子对几何概念的思考方面展开研究,并建立适宜学生学习的几何学习模型^[13]。

2008年 Rohani Ahmad Tarmizi 将“二次函数”作为教学内容,比较传统方法与使用几何画板和绘图计算器进行教学的效率是否存在差异^[14],结果表明几何画板有助于学生程序性知识的提高。

2012年,国外一名学者将几何画板用于探索黄金分割比,对金色矩形、螺旋、三角形和五边形^[15]。

2014年 Leong Kwan Eu 采用准实验对马来西亚一所中学六年级学生中使用几何画板软件进行图形函数教与学的效果,结果表明在数学课堂中使用几何画板对学生的数学成绩有积极的影响,对函数图形的学习态度也有所提高^[16]。

2018年 Decy Dhayanti 等学者采用字符观察表和试卷测试对学生学习《几何画板的显示属性教育》的效果进行收集与分析^[17],得到几何画板可以培养学生批判性和创造性思维,提高学生的品德的结论。

2020年 Zambak 和 Tyminski 利用几何画板考查教师的 MTK 能力,并将所得数据对 MTK 能力进行分类,提出建议数学教师教育者注意 PSMT 在教学和学习数学中使用动态几何软件的程度^[18]。

综上可知国外在信息技术融入教学方面的研究是比较早的,其关注的不仅仅是教学软件在课堂教学是否起积极作用,还关注学生是否能适应信息化教学和得到相应提升,同时也注重教师的信息技术运用能力。

二、国内研究现状

我国于 1996 年正式引入“几何画板”,开启了对数学学科工具的研究与应用。随着信息技术的发展与教育信息化的深入,我国张景中院士带领他的研究团队于 2004 年开发了我国独有的数学学科工具软件“超级画板”,并在“超级画板”的基础上,于 2015 年开发出新一代互联网动态数学软件“网络画板”。因此,对 CNKI 中国知网输入“网络画板”进行检索,检索得学术期刊 17 篇,学位论文 13 篇,会议 10 篇。

经过对文献的梳理分析,发现关于网络画板的研究主要分成三方面:一、应用于中

学教材知识的教学；二、辅助题目讲解；三、提升学生学习兴趣、思维能力和培养数学核心素养。下面从这三面进行阐述：

（一）应用于中学教材知识的教学

经过对期刊及学位论文梳理，可知在课堂教学上，网络画板主要应用于中学几何和函数方面。

彭艳梅和侯小华（2020）利用网络画板对双曲线的简单几何性质进行探究式教学，提出网络画板功能完善，操作便捷，可以为学生提供直观的感知，有利于学生的学习^[19]。伍雪莲（2020）选择几何与函数部分内容进行教学设计与实践，对教学效果进行分析，认为网络画板有助于初中探究式教学的开展^[20]。卢怡和李玉叶（2022）两位学者利用网络画板动态演示功能对多边形内角和内容进行教学，提出网络画板有助于教师突破几何教学重难点，丰富学生想象力与创造力，起到事半功倍的教学效果。方王洋（2022）根据二次函数知识特点与学生学习情况，运用网络画板绘制二次函数图像并对二次函数性质展开梯度式的综合实践教学，降低学生学习难度^[21]。

针对网络画板辅助几何与函数的教学，学者们也研究出一定的教学策略，提出相应的教学建议。

刘正章（2018）以正弦函数图像为例进行网络画板辅助教学，提出：“方法迁移，作图验证；任务驱动，操作探究；综合应用，掌握技能”的三步骤^[22]，将教学直观动态化。樊甜甜（2022）基于智慧环境设计了网络画板的“三段十环”教学流程，并以二次函数章节为素材进行教学实践与效果分析，提出教师应加强信息技术与学科融合的能力^[23]。赵阳、李赵容和张传军（2022）等学者根据网络画板和高中数学概念的特点，结合学生情况与知识结构特征，提出创设直观性生活情境、设置探疑性操作实验、强化概念的多元表征、具象结合、数形结合和动静结合的教学策略^[24]。吴勇（2023）提出随着新课程与新教材的深入实施，高中课堂教学需与信息技术有效整合，切实转变学习方式，以学生为主体^[25]。顾洪斌（2023）通过阐述网络画板在教学过程的优势，以及网络画板在中学函数、概率方面的教学应用，提出教师要合理进行教学设计，使教学内容与网络画板最大限度结合。

（二）辅助题目讲解

为了方便学生对于一些问题的理解，有学者利用网络画板题目中的抽象化语言进行直观化的演示教学与讲解。

何艳芳（2021）通过网络画板解决二次函数不同类型问题，阐述二次函数在初高中

衔接的方法策略，提出实际应用问题的解决需要学生建立相应的函数模型的能力。王玉柳（2021）利用网络画板将部分几何与函数题型进行直观展示与动态演示，为网络画板进一步应用提供依据。付小华、幸世强（2022）等人通过网络画板辅助构造丹德林双球模型，进行圆锥曲线的证明，提出要充分利用教育信息技术提供的工具和环境。李鸿与王宗德（2022）将网络画板运用与一元高次不等式的求解，用网络画板辅助“穿根法”的教学应用，提出网络画板辅助可以使知识与学生经验相结合，深化学生理解，提高学生兴趣^[26]。

（三）提升学生学习兴趣、思维能力和培养数学核心素养

许多学者针对网络画板教学，探讨其对学生的影响，可知网络画板辅助数学教学，不仅可以使知识点更加直观简洁，方便学生理解，提高教学与学习效率，还能提高学生的学习兴趣与积极性，达到培养和提高数学能力与核心素养的目的。

邱雪莲（2019）将网络画板在教学中进行应用，并对效果进行分析，发现网络画板辅助教学有助于提升学生的分析、综合、评价和创造的高阶思维能力^[27]。李赵容（2021）利用网络画板对高中三角函数内容进行微型教学实验，发现基于网络画板可提升高中生的直观表达与数形结合能力、培养高中生的数学直观想象素养^[28]。巩江源（2021）提出网络画板培养初中生逻辑推理素养的四条策略：动态情境创设策略、探究操作感悟策略、合作交流展示策略和干预前后期支架策略^[29]，实证研究发现这四条策略有助于学生逻辑推理素养的培养。张景中院士（2022）提到学生可以利用网络画板功能可以帮助自己理解概念，启迪思路，探索疑问，检验答案，达到丰富教学场景、激发学生学习兴趣和探究欲望的目的^[1]。

2.2.2 关于函数单调性的研究

在CNKI中国知网上输入“函数的单调性”进行检索，检索出学术期刊90篇，学位论文19篇，会议3篇。通过搜索和阅读国内关于函数单调性的文献，可知国内学者在函数单调性方面展开了大量研究工作，主要集中在函数单调性的教学和函数单调性的应用，少部分是关于函数单调性教材内容以及学情的研究，下面分别进行阐述说明：

一、基于函数单调性教学方面

针对函数单调性教学方面的研究，学者普遍重视关于函数单调性概念的教学，并提出许多教学模式与教学结构，以契合教学内容与学生情况，提升教学效率与效果。但是

也有学者指出对于函数单调性的概念教学缺少数学性学科工具辅助,更多依赖PPT教学。

涂荣豹(2004)按照“教与学对应”和“教与数学对应”的原理,对函数单调性的教学过程采用七阶段教学模式^[30]。李兴贵(2014)根据六环节教学模式设计函数单调性的概念教学,将概念教学分为:感知——想象——概括——固化——应用——结构几个环节,并在每个环节采用“问题——师生活动——预设——设计意图”的过程表述,结构清晰,重点突出^[31]。周祝光(2016)提出以“提出问题——具体事例、引入概念,解决问题——本质属性、概括特征,反思提升——语言描述、获得定义,应用反馈——辨析运用、形成结构”四个环节为建构的教学策略^[32]。李秀萍和赵思林(2017)两位学采用“画”——“看”——“说”——“描”——“定”——“懂”——“用”——“悟”^[33]八步对函数单调性定义进行教学设计,使学生感受从图象到抽象化再到符号化的过程。

也有学者从教学目标出发,选择以问题链的形式对教学内容进行处理,以此深化学生对函数单调性知识的认识,达到由浅入深的学习目的。

吴丹红和唐恒钧(2016)两位学者以数学问题链为基础,对函数单调性进行教学探索^[6]。通过构建3个符合学生认知的主干问题和若干子问题,进行层层推进与不断精细化^[34]。杨勇(2019)以教学目标为出发点,结合学生最近发展区用问题驱动探究模式进行教学,让学生在一系列问题串中感悟、体验和理解数学,潜移默化中提升数学核心素养^[35]。方立新和刘新春(2023)提出以问题设计的形式对函数单调性进行复习,通过问题链来组织和推动教与学,将知识问题化,问题思维化,思维实践化,以此促进学生高阶思维能力的发展^[36]。

针对函数单调性内容的重要性,学者们从学生认知、课堂教学、教材内容及教学手段提出相应的教学策略,其中有学者提到建议使用信息技术软件辅助教学。

钱珮玲(2008)强调课堂教学的整体性和联系性,提到函数单调性的学习分为两阶段:一是几何直观理解函数单调性定义并理解其在函数变化中的作用;二是函数单调性的应用^[37]。赵昕(2016)提到函数的单调性定义形成过程是培养学生抽象思维的重要素材^[38],要求教学要从意识上重视单调性概念的产生过程,以初中增减性知识为桥梁连接高中单调性概念。邓翰香和吴立宝(2020)两位学者以理解数学、理解学生、理解技术和理解教学这“四个理解”为基础对函数的单调性进行教学设计与研究,强调着眼数学本质、关注学生发展、提倡技术应用、回归教学,构成“四维一体”的数学教学结构^[39]。王圣荣和黄涵(2020)两位学者利用几何画板对函数单调性习题进行教学设计,认为通过信息技术呈现知识建构的课堂,抽象知识得以提升,发挥了教学内容的整合优势和学

生的主观能动性优势，倡导教师将信息技术与教学资源高度融合^[40]。

二、基于函数单调性应用方面

尽管是研究函数单调性的应用，但是许多学者对于此应用研究的基础是放在对函数单调性概念理解的基础上，认为定义的掌握是解题的关键所在。

刘璐（2015）通过对三种教材的函数单调性的定义进行比较分析，归纳总结了函数单调性的判断方法，并通过函数单调性解决不等式、方程、求值等实际问题。李广修（2017）以函数的单调性为例，提及函数单调性概念对相关题目解决的影响，认为概念可以对解题起到发散、导发、形式化推理的作用^[41]。

通过对函数单调性应用的研究，可以发现函数单调性在高考具有重要地位，且与上下位知识联系密切，是贯穿初中、高中和大学的重要知识点。

吕秀娟（2013）阐述函数的单调性在高考的重要地位，并利用函数的单调性的定义和特点对大小比较、解不等式、求函数值域、求参数取值范围、作图和数列等问题进行解决^[42]。何佳庚（2019）通过例题说明函数单调性在解方程与解不等式问题中的应用，说明函数单调性知识点是高中数学教学的重点。

三、基于函数单调性教材内容及学情方面

学者们针对函数单调性内容进行教材分析，从教材的整体性与知识的联系性出发，认为要把知识从教材转化到教学，需从教学内容、重难点、学习方法以及核心素养培养方面入手。认为教学要以学生为主，可以以探究式教学进行展开。

黎栋材、龙正武和王尚志（2015）三位学者提到函数单调性是一种工具，也是高考每年必考内容之一，函数单调性定义的教学要把重点放在单调性的图形语言过渡到自然语言，再翻译成符号语言上，要做到内容的整体把握^[3]。史嘉（2015）对高中六套教材中函数的单调性内容进行对比研究，发现各教材对单调函数表述略有差异^[43]，认为教材转化到教学要注重知识的衔接及重难点的突破，提出课堂教学应以学生为主，可辅以信息技术的教学建议。殷洪丽和王新民（2018）两位学者提到函数单调性概念在不同发展阶段表征方式不同，而高中阶段的表征方式是不等式定量表征和导数定量表征^[44]。因此需要学生以数形结合思想构建函数单调性的“符号量化模型”，达到学习、认知、素养的有机融合发展。谢发超（2019）提出可从教材知识编排、知识学习方法、培养数学核心素养三个角度看函数单调性学习过程，并阐明设计符合深度学习的数学教学目标要做好课程标准、教材内容和学生的深度分析，这是培育学生数学学科核心素养的应然之选^[4]。邓翰香、吴立宝和沈婕（2019）三位学者以数学抽象素养的教材分析框架为基准对人教

A版“函数单调性”一节进行教材剖析，四方面阐释函数单调性的教学是如何培养学生，提出四点建议：抓教材数学内容本质、设数学探究活动、悟数学思想方法和展教材数学抽象之美^[45]。

2.2.3 总结

通过对国内外关于网络画板教学和函数单调性教学方面的文献进行分析研究，可知函数单调性的概念教学以及利用网络画板辅助几何与函数的教学是当今教学研究热点。然而，关于如何运用信息技术来辅助函数单调性的概念教学以及对函数单调性相关知识点进行的探究式教学却是比较少的；而针对网络画板的应用，学位论文也更加集中于几何或函数的教学或研究其对学生核心素养的培养，缺少对某个具体知识点的教学探究。

因此，笔者认为针对网络画板教学可以更加集中于对某个知识点的挖掘，而函数单调性的相关内容也可以尝试使用网络画板进行探究式的教学和学习。

第三章 研究基础

3.1 理论基础

一、建构主义学习理论

建构主义学习理论的创始人是皮亚杰，维果斯基、斯滕伯格和卡茨等人是该理论的奠基者，建构主义学习理论是认知心理学派的一个分支，内容丰富，主要包含四个要素：图式、同化、顺应和平衡。建构主义学习理论强调以学生为中心，将课堂归还给学生，让学生主动展开对知识的探索和发现，以此形成有意义的主动建构，反映人类学习过程的特点和认知规律。建构主义学习理论的基本内容主要包含两个方面：一是学习的含义，即什么是学习。建构主义认为，知识是学习者在一定情境中，借助教师或他人的帮助，利用相应的学习资料，通过有意义的建构方式而获得的，而不是由教师传授得到的，它强调学生主动的学。二是学习的方法，即如何进行学习。建构主义强调以教师为主导、学生为主体，它认为学习是学生在教师的指导下以学生为中心的主动的学习^[46]。

基于网络画板的高中数学教学实践以建构主义理论为依托，强调教师引导学生主动探究的教学方式。教师先在“图式”的基础上构建情境，然后通过引导学生观察直观动态的图象或引导学生小组进行“协作”达到从已学知识中找到“同化”的目的，教师再进一步引导学生进行“会话”，使知识得到顺应，最终使学生的知识进行有意义建构，形成认知结构。

二、视听教学理论

视听教学理论是美国视听教育家戴尔提出的，它主要是利用人们的视觉和听觉的感性认识来加深对知识的理解，提高教学效率和效果，它促进了“视听教学运动”的发生和发展。戴尔作为视听教学理论的提出者和代表人物，其提出的“经验之塔”理论是视听教学理论的核心内容，该理论描述了人类获取知识的主要途径和基本方法，依据获得经验的抽象程度，将经验分为了自下而上由直观到抽象的 10 个层次，大致分为三类：做的经验、观察的经验、抽象的经验^[28]。

基于网络画板的高中数学教学实践是利用视听教育理论提出的具象结合、动静结合、

数形结合、强化图形与图表的表征和结合知识多元表征等相关策略进行的^[28]，教师根据学生的已知经验设置相应的问题情境进行导入，在探究过程中借助网络画板的直观、动态图象让学生进行自主思考或小组探讨，从而将抽象化的知识以直观地形式抽象出来，帮助学生理解知识的同时提高学生的抽象思维能力和观察能力。

三、布鲁纳发现学习理论

美国著名心理学家布鲁纳研究并提出了发现学习理论，该理论指学习的主要内容不以直接呈现的方式教给学习者，而只展示部分内容，让学习者通过部分的内容和线索独立学习、独立思考和探索知识，感受学习与发现的过程，寻找到结论和问题的答案。发现学习是一种学习方式，学生通过自主发现与学习获得知识并发展思维。

基于网络画板的高中数学教学以发现学习理论为基础，通过提供网络画板绘制的图象或函数解析式，引导学生进行自主探究和学习，最终发现知识的规律，总结概括并得出结论。

3.2 网络画板软件概述

3.2.1 网络画板软件的简介

随着信息技术的发展，信息化学科软件的应用逐渐深化，因为缺少自发研制的数学工具软件，我国数学教学主要依赖国外研发的“几何画板”和“geogebra”等学科工具软件为教学提供便利。后来，为了适应互联网、移动互联网环境下教育信息化发展的新趋势，我国张景中院士带领他的研究团队于2004年开发了我国独有的数学学科工具软件“超级画板”，并在“超级画板”的基础上，于2015年开发出新一代互联网动态数学软件“网络画板”。网络画板拥有动态几何、智能推理、符号运算和网络交互等技术，是国内第一款领先的移动互联网环境下的动态数学学科教学工具^[47]。该产品服务于中小学理科教学，无需下载软件，可直接依赖网站进行作图，并通过互联网技术改变教育资源的生成、传播与分享模式，助力中小学教学资源开发，推动基础学科教育信息化的发展，如图2所示。网络画板的诞生，为我国数学教学提供了新的信息化工具，使教师和学生有了更多的选择。



图 2 网络画板主页面

网络画板分为 2D 和 3D 两个操作模式，两个模式的基本操作栏是相同的，主要是导航栏、绘图工具栏、构造工具栏和快捷工具栏，如图 3 所示，基本的操作也依靠这些工具栏进行。与几何画板和超级画板类似，网络画板也通过点、线、面来构造相应的图形，同时利用对应的按钮可以实现图形的变换和动态变化，将图形由静态结果转化为动态过程，实现教学的动态化，使抽象知识直观化。但是对比几何画板需要引入外部插件才能支持三维图形的绘制，网络画板的直接二维与三维界面任意切换就更加便捷，对比 GGB 图象绘制的步骤，网络画板的操作相对也更加简单。

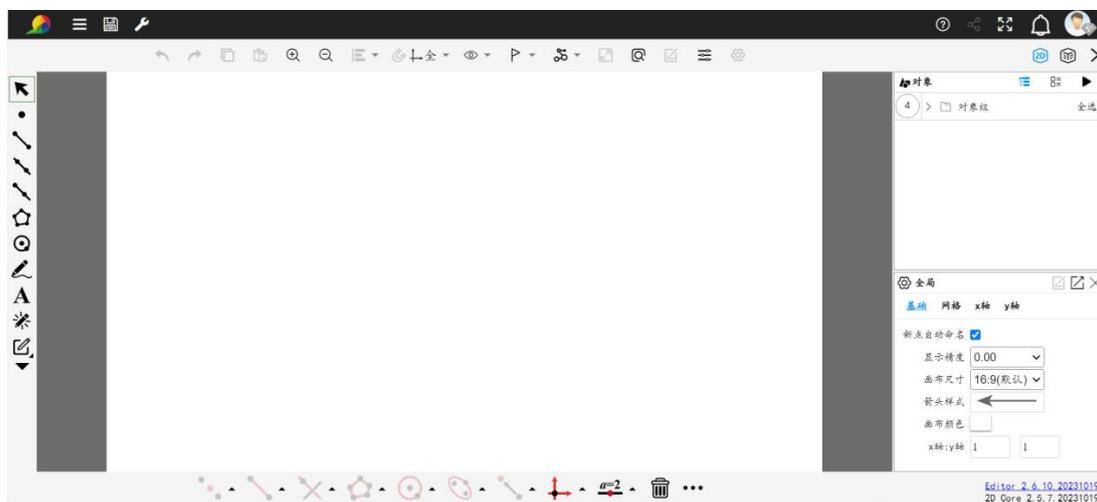


图 3 网络画板作图页面

3.2.2 网络画板软件的特征和与其它数学教学软件的对比

一、网络画板软件的特征

(一) 专业学科信息化工具

网络画板作为动态数学学科教学工具，具有丰富的作图功能，可以对平面几何、立

体几何、解析几何和函数等方面的教学与学习提供直观的模式^[40]，通过信息化技术展现数学学科知识。

第一，具有动态作图功能。网络画板作为动态数学教学软件，在 2D 和 3D 界面的作图可以先通过绘图工具栏和构造工具栏来绘制相应的点、线、面和函数图象，也可在相应图形上构造特殊点、中线和垂线等完善图形结构，最后利用变量、轨迹、迭代等功能实现图象中点、线、甚至整个图象的运动与变化。动态图形的构造，不仅可以让学生了解图形的变换过程，同时可以激发学生数学学习兴趣，培养学生数学核心素养，体会数学之美。

第二，具有图形变换功能。网络画板可以对图形进行平移、旋转、轴对称、中心对称、反演、缩放和仿射等多种变化，每一个变换又可以根据作图者的具体需求来进行修改，比如旋转，作图者可以选择不同的旋转中心、方向和角度，达到绘制不同旋转图形的效果。

第三，具有多坐标系功能。网络画板在不选择坐标系时，默认使用全局坐标系，所有图象都在同一个坐标系上进行展示，在点击构造坐标系按钮时，作图者便可以构造出自定义的直角坐标系，并依据自身需求选择坐标系的个数，实现不同图象不同坐标系。坐标系的尺寸、刻度、颜色等也可以进行修改，且可以对坐标系的原点、刻度、数轴、甚至整个坐标系进行隐藏。

第四，具有构造函数功能。选择函数构造的按钮，构造合适的变量，输入所要构造的函数公式，确定好函数的定义域，便可以构造出相应的函数图象，实现抽象的符号语言转化为形象的图象语言的目的，便于学生观察与理解，操作情况如图 4 所示。

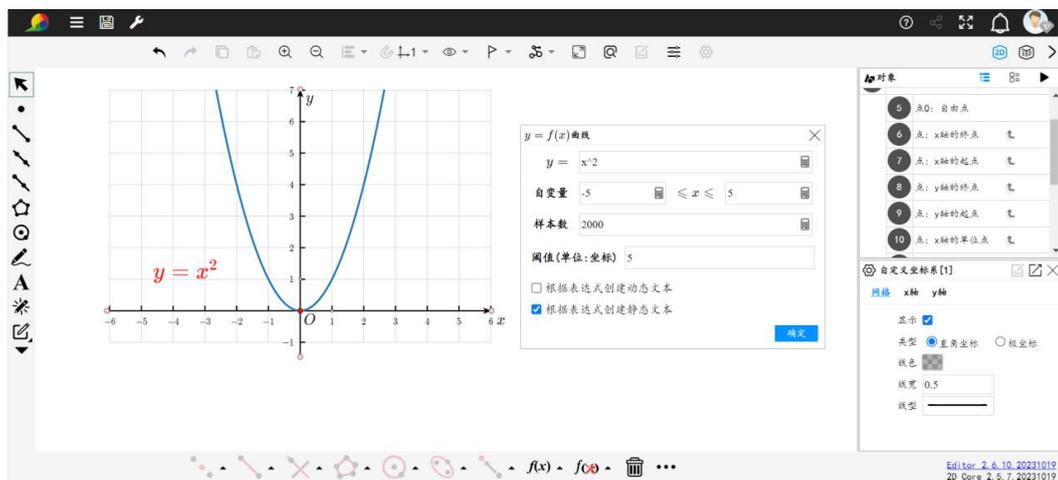


图 4 网络画板函数构造展示

(二) 为教学量身打造

网络画板作为信息化的学科工具，它不仅可以作为独立的个体进行展示，也可以与其它教学工具进行融合使用，比如可以将制作好的网络画板动态图象直接插入 PPT 和希沃白板中，实现不用切换界面就直接展示丰富动态过程，提供丰富的教学环境。网络画板还可以通过制作活页，实现类似 PPT 的翻页与跳转功能，还能利用图形和动态功能，实现如立体图形的翻折、硬币投掷等实验，将实物实验变为信息化模型实验，丰富课堂教学模式^[40]，这些多功能性和灵活性的教学模式是几何画板与 geogebra 软件所缺少的，因为几何画板只能在计算机进行操作，插入 ppt 的形式也只能以静态图片的形式插入，无法在 ppt 上实现动态过程，geogebra 虽然有移动端和电脑端的模式，但是也只能在自身软件基础上实现动态展示，而无法插入 ppt 中。

（三）资源丰富、共建共享

网络画板素材资源丰富，不仅可以由作图者自己作图形成素材，还能依靠网络画板云平台搜集、下载自身所需的素材并进行修改，且所有资源按照知识内容和教学需求进行分类与组织，方便使用。同时，网络画板资源不仅可以通过云平台进行共享，还能通过扫描素材的分享二维码进行多人观看与操作，实现学习资料的共建共享。网络画板的资源共享功能使得用户可以直接寻找自己所需的材料进行适当修改，减少做一整个素材的时间，而丰富资源的共享却是几何画板与 geogebra 软件所缺少的，这也就要求使用者需要自己制作全新的素材，也不太方便小组协作活动的完成。网络画板的资源页面如图 5 所示。

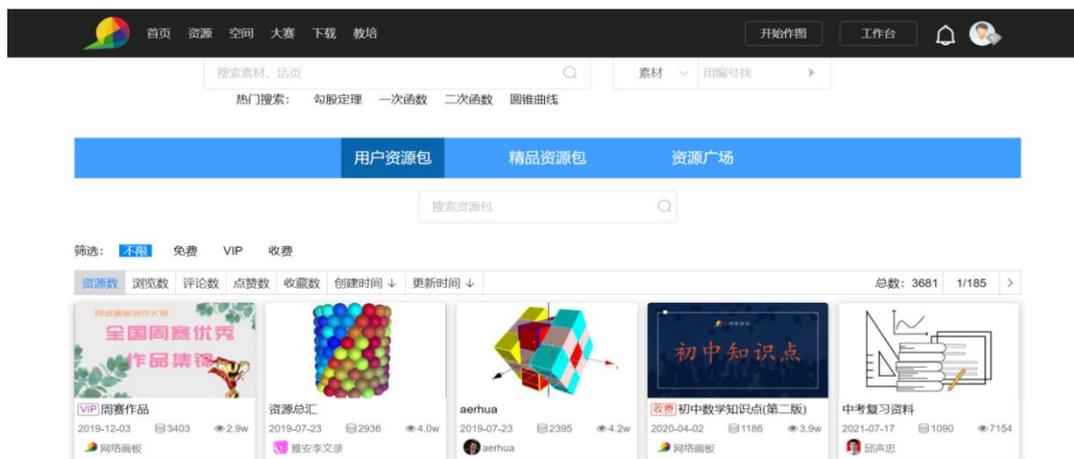


图 5 网络画板用户资源页面

（四）使用便捷、跨平台、多终端

网络画板绘图操作简单，每个按钮都配有文字解释，方便了解如何使用按钮及按钮的用途。针对新手，网络画板网站还提供了丰富的教学视频和介绍文档来帮助学习和操

作,使新手也能很快掌握并进行图形的绘制。同时网络画板在联网状态下只需要进入网页即可使用,不需要安装软件,也不需要下载,还可以直接用手机、平板、安卓等进行操作绘图,与PPT做到无缝衔接^[40],这使得在进行教学实验时,可以方便地选择教学场所,学生也可以有更多的机会直接学习。网络画板同时开发了离线使用的单机模式,方便了无网络情况下的操作。

二、网络画板与其它数学教学软件的对比分析

几何画板、geogebra 和网络画板都是现在常用的数学教学辅助工具,它们都具备构造动态几何图形、几何变换和函数图象等功能,适用于数学课堂前、中、后三个阶段,三种软件既有相似之处,也存在差别。下面从三个软件各自的优势和不足出发,阐述选择网络画板进行教学的原因,具体如表 3^[24]。

表 3 常用数学教学辅助软件的比较

软件名称	优势	不足
几何画板	<ol style="list-style-type: none"> 1. 主要用于几何方面的教学,可以对点、线、圆等元素进行构造、变换、测量、动画和轨迹跟踪等功能,从而绘制出复杂图形; 2. 拥有文本显示,且效果突出; 3. 自定义工具种类多。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 软件内部设置的函数较少,在函数教学方面涉及不多,且在解析几何方面的教学功能较差; 2. 计算、编程、课件等功能较弱,且 3D 构图、符号计算的功能还未实现; 3. 几何画板作图以尺规作图为原理,作图步骤比较复杂; 4. 软件需要安装,且需要收费,更新换代比较慢。
Geogebra	<ol style="list-style-type: none"> 1. 具有绘制 2D 和 3D 图形、符号计算、微积分、统计、函数和圆锥曲线等功能; 2. 免费软件,且可以用于平板和手机等设备,支持跨平台使用,具有较强的交互性和便利性; 3. 能通过脚本和指令进行制作,操作方式灵活。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 没有初中常用几何图形工具库,不利于初中知识点的制作; 2. 文本表现力差,整体作图不如几何画板和网络画板简便。

网络画板	1. 具有 2D 和 3D 界面、动态几何、智能画笔、智能推理和符号运算等功能； 2. 具有跨平台、交互性强、资源库丰富等特点，用户可以分享作品并进行多人协作编辑，同时可以搜索各类所需资源直接插入课件使用； 3. 无需下载安装，使用免费，网络服务较强。	1. 部分网络资源需要收费；
------	--	----------------

通过比较可以发现虽然三种数学教学软件都可以用于数学教学之中，但是每个软件都有自身优势之处和不足之处。综合对比，网络画板比另外两个软件操作更加便捷，更利于放入课件中进行教学，它有更多的教学资源 and 分享方式，也更利于教师和学生的使用与学习，能更好地满足教师对课件的需求和学生自学的要求。

3.2.3 网络画板软件的作用

一、日常学习工具，提高学习效率

网络画板作为动态数学学科工具，在教师的日常教学和学生的学习中可以作为信息时代的计算器、画板、书写板和展示板等使用，它不仅展示各种静态化的抽象图象，还能将该图象的变换过程进行动态化的呈现，对于计算方面也能展现出动态的计算过程，使学生掌握的不仅仅是知识的结果，还形成对生成过程的思考，强化学生的认知，锻炼学生的思维^[48]。网络画板还能更轻松简单的进行数学实验，比如在没有实物教具的情况下，可以直接利用网络画板的动画进行相应的概率实验，增加课堂趣味性的同时，方便学生理解，提高学生学习和教师教学的效率。

二、课件制作平台，实现资源共享

利用网络画板制作课件，方便快捷。一个课件的制作不需要太长的时间，甚至可以在讲课的时候对课件进行修改和制作，或者在师生的交流讨论中共同完成，这就具备开放性。学生可以在知识的学习过程中对改动课件上的新对象重新进行观察，进行进一步的观察思考，并且制作的课件也不是普通文字和图片的堆砌，主要是教师根据教学内容将其动态性的过程进行呈现，使学生对于知识产生的过程和要展现的性质有一个更加完整且深刻的理解。比如对于正弦曲线、余弦曲线和正切曲线的学习，就可以先制作出正

弦曲线的图象，让学生观察其特点和性质，后续再让学生根据余弦曲线和正切曲线的公式来修改课件，画出新的函数曲线并进行观察与对比，并针对得出的结论进一步完善课件。

制作好的课件也可以通过共享发放到网络画板的云平台上，教师也能将课件二维码保存发送，使学生在家中也可以通过扫描二维码对知识进行复习和思考，达到资源共享的目的。

三、实验探索环境，促进师生交互活动

网络画板平台不仅是一个绘图平台，同时也为学生提供了网络实验室，提供了实验探索的环境^[40]。学生可以利用网络画板进行动态绘图、计算、测量和编程功能来帮助自己理解概念、探索疑问、开发思路和检验结果，并用直观化的动态图象表现抽象化的数学语言与数学公式。教师可以通过设置环环相扣的问题让学生进行思考与实验，在这个过程中不仅促进学生个体或小组之间的交流讨论，也促进教师与学生的交流和互动。如投掷硬币实验，该实验要求投掷次数足够多，但是在课堂上并没有足够的条件进行成百上千次实验，教师便可以利用网络画板进行模拟实验，使学生之间进行讨论，并在较短的时间得到理想的结果。

四、促进创新思维的发展

网络画板软件可以将一个静态的图象进行动态的展示，在这个变化过程中，往往会出现新的现象和问题，引发出新的思考与启示，形成思维上的创新。比如对于圆锥曲线的第一定义和第二定义的给出，可以从圆锥曲线的图象生成进行考虑，什么样的条件下可以画出对应的圆锥曲线，又是否存在其它的思路去绘制圆锥曲线图象，多角度思考绘图也是一种创新思维的发展。

五、提供欣赏数学之美的平台

网络画板拥有多种绘图功能，利用变换、轨迹、迭代和跟踪等功能可以创造出千变万化的图象，而利用参数则可以调整图形进行各种变化得到不同的结果^[40]。比如勾股树，当参数小的时候，就是一个数学求解问题的模型，但是当参数变大时，便会形成一颗美丽而充满生气的勾股树。在各种奇妙图形的绘制过程中，学生不仅仅学会和巩固了数学知识，同时也感受到了数学的奇特与美妙之处，增加了学生对于数学学习的兴趣。

3.3 函数单调性教学要素研究

3.3.1 函数单调性的教材内容编排

根据海南省的高中数学教学情况,本文选择以高中数学人教A版教材作为研究对象,对教材中涉及函数单调性的知识进行梳理,以此了解函数的单调性在此教材中的编排情况,明确函数单调性知识点的整体布局,为基于网络画板进行函数单调性的教学内容的选择做准备。函数的单调性作为函数的重要性质之一,其教学与学习是由直观到抽象,由简单到复杂,呈现“螺旋式”上升。在初中阶段,学生通过学习教材中的一次函数、反比例函数和二次函数的图象对函数的单调性进行直观化理解,形成初步认识。在高中阶段,函数单调性的教学更加深化和具体,而高中数学人教A版教材将其内容主要分成以下五个步骤进行^[49],具体如表4:

表4 人教A版教材中函数单调性体现情况

教材	章节	内容
必修一	第三章 第二节	函数单调性的定义: 利用符号语言来刻画几何直观,通过在区间任取 x_1, x_2 , 建立不等关系,用精炼化的语言与代数表达式将函数单调性的定义进行表达,使定义从直观感知变为抽象形式。
必修一	第三、 四、五章	初等函数: 通过对幂函数、指数函数、对数函数和三角函数性质的探索与学习,将函数单调性从概念性知识转为具体应用,并利用生活情境进行数学建模,在选择合适数学模型的练习上进一步加深函数单调性的学习。
选择性 必修二	第四章	数列: 数列作为一种特殊的函数,是在前面所学的连续函数后又学的离散函数,等差数列与等比数列两种特殊数列的刻画是通过描述其固定的增加或减少率而给出,进一步体现了函数的增减性。
选择性 必修二	第五章	导数: 利用瞬时变化率和斜率对导数进行描述,将函数单调性利用导数的形式进行刻画与描述,通过导数的符号即可判断函数的增减性,导数绝对值的大小即可判断函数的增减大小,得出

		函数在一定区间的极值或最值。
高中数学人教A版教材	整体	利用函数单调性的定义与特性研究数列、不等式、方程与导数等问题，将单个知识融入整体的学习中，明白函数单调性在比较大小、解不等式、证明不等式和探讨其他应用所具有的作用，深化对函数单调性的认识。

3.3.2 函数单调性内容的学情分析

从身心特点看，高一阶段学生刚刚从初中阶段迈入高中阶段，对新知识的学习存在不适应与不理解的情况，因此对新知识充满好奇心与探究性，渴望困惑得到解决。

从认知基础看，学生在初中阶段就已经学习了一次函数、二次函数和反比例函数^[50]，通过观察函数图象的变化趋势，直观地感受函数增减性的特点，已经为高中函数的单调性学习奠定了基础，并且对函数的概念以及函数的性质也有了初步的认识。同时学生在学习函数的单调性这一节之前已经学习了集合、不等式和函数的概念等知识，对于如何利用不等关系刻画函数的单调性，利用抽象化的符号语言来描述直观化图象有了一定认知基础。

从学习障碍看，函数单调性定义的刻画经历了由具体到抽象，由定性到定量，由图象语言到符号语言的转化过程，而高一阶段的学生缺乏逻辑推理能力与抽象概括能力^[51]，对于如何应用精炼和严谨的代数和符号语言刻画并总结函数的单调性存在一定困难。

从学生可能的发展角度看，函数单调性的学习不仅是一个概念式的学习，还为后续函数、导数等的学习奠定基础，具有较强的跨越性，且在函数单调性的学习与应用中，学生可以培养与发展相应的数学核心素养，建构良好的认知结构。

3.3.3 数学核心素养在函数单调性教学的体现

函数单调性的概念教学是函数性质教学的第一课时，该内容是探讨与学习函数其它性质的基础，其中蕴含的思想方法也为研究函数的其它性质提供了思路。函数单调性的应用是对函数性质的拓展与深化，其过程的探索对培养和提升学生的数学核心素养起到重要的作用^[30]。笔者结合教材对函数单调性的教学进行研究，得出数学核心素养在函数单调性知识点教学的体现，总结发现函数的单调性教学内容可以培养学生数学抽象、直观想象、数学运算、数学建模和逻辑推理等方面的数学核心素养。具体内容见表 5:

表 5 函数单调性教学中核心素养体现

教学内容	数学六大核心素养
根据直观函数图象描绘图形变化特征,用符号语言与不等关系表示函数单调性的概念	数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算
函数单调性的概念形成中使用逻辑用语,利用代数方法证明函数的单调性	逻辑推理、数学运算
利用直观图象与函数表达式研究几种初等函数的单调性	直观想象、逻辑推理、数学运算
利用函数的单调性刻画现实问题,对生活问题进行实际应用与解决	数学建模、逻辑推理、数学运算
利用导数的性质特点研究函数的单调性,求函数的单调区间	逻辑推理、数学运算、数学抽象
梳理函数的单调性与其它数学内容的内在联系,如:函数图象、函数最值与极值、函数零点与方程的根、不等式大小比较、数列问题等	直观想象、逻辑推理、数学抽象、数学运算

通过查阅和总结函数单调性的教材编排情况、学生学情和数学素养表现,可知函数单调性内容的重要性,选择函数单调性作为教学实践的研究内容不仅因为该内容承前启后的重要性,还可以为函数单调性教学提供新的教学思路,促进函数单调性教学实践的发展。

第四章 基于网络画板的函数单调性教学设计

4.1 基于网络画板的高中数学教学设计原则

4.1.1 基于网络画板的高中数学教学内容选择原则

网络画板作为数学学科类工具软件，对数学教学起到辅助作用，但是和其它数学教学软件如几何画板和 geogebra 一样，网络画板也并非适用于所有的数学教学过程，对于教学内容、教学环节是否使用网络画板需要根据具体教学内容进行考虑。比如：有的数学探究活动需要使用白纸进行绘画，这比使用网络画板更加简便且更利于学生的动手操作与参与，也不局限和要求操作的环境和设备；还有的知识具有较强的抽象性，利用网络画板进行探究也不一定能让探究出结果，相反可能因为操作步骤比较复杂而浪费时间。由此可见，对于教学内容是否适合使用网络画板也需要进行仔细的考虑和斟酌。

笔者通过对信息技术辅助教学的相关文献进行收集和查阅，并根据网络画板的特点、学生身心发展情况和高中数学知识的教学要素总结得出以下教学内容的选择原则，并根据教学内容的选择原则选择本次研究所需的关于函数的单调性的教学内容：

一、教学内容要具有可操作性

用网络画板绘制动态图象虽然简单且方便上手，但是在日常数学教学中会发现并不是所有的数学内容都适合使用网络画板进行教学，如果对一个本不需要利用网络画板辅助教学的内容加以网络画板操作教学，不仅会消耗教师课前准备的精力，还会浪费课堂教学时间。比如高中数学的预备知识“集合”，就很难进行网络画板的相关制作，也不方便用网络画板来进行操作和展示。

因此合理的选择网络画板进行辅助教学是很有必要的。首先，选择的内容要方便进行操作和理解^[20]，比如在“函数的单调性”概念教学中可以选择两个甚至多个动态的点来展示函数图象上升和下降的趋势，从中抽象出单调性的概念。在这个教学过程中教师只需要利用网络画板画板先画出一个函数，再利用变量和动画来制作动态的点便可以完成，这个过程不仅制作简单还方便学生理解。其次，教学内容应提供实践机会，即网络画板不仅仅是教师的操作和讲解，学生也应该能够亲手进行操作和实践，从主动性接触

和学习中理解知识和巩固知识，比如对“不同函数增长的差异”一节，其知识点是简单的，但是对于内容的生成仅仅采用讲授法却是不够的，可以再让学生尝试操作网络画板来进行理解，这时候就要求操作的过程是学生可以掌握的。

二、教学内容要具有趣味性

教学内容的趣味性讲究的不仅是知识点本身的吸引力，还强调将网络画板选择的教学内容注入趣味性^[20]，从趣味性的教学过程中激发学生的学习热情和学习兴趣，提高学生的参与度和学习效果。知识点在教材书上的呈现是简单的，但是教师对于教学过程的设计却可以千变万化而不离其宗。网络画板的融入不仅仅是简单图象的展示，更突出的是一个动态的过程，通过网络画板的个性化功能，教师可以制作动态化的图象，通过特殊的展示方式来增加学生学习过程的趣味性和乐趣，同时也能让学生利用网络画板合作完成比赛和展示的方式来激发学生的积极性和参与度。比如对于单调性定义的讲解，一般情况下，教师倾向于采用 PPT 中的静态图象让学生观察，尽管这种观察方式学生也能得到答案，但是却缺少生成过程的直观性且千篇一律，而当教师使用网络画板进行动态化展示，不仅能让概念生成更加简单，同时也更加吸引学生的注意力。

三、教学内容要有探究性

课堂教学是教师与学生互动成长的过程，它不仅看重教师的教学效果，还关注学生的学习状态。具有探究性的教学内容可以激发学生主动探索的欲望，培养他们独立思考和解决问题的能力，使他们在深入理解和掌握知识与技能的同时培养自身的创新意识和团队协作能力^[34]。面对适合教师以讲授为主的探究性教学内容，教师可以通过网络画板提出和构造一些引导性的问题或情境，比如“函数的单调性”概念推导过程中，教师可以对二次函数图象上的两个动态点进行移动，让学生考虑其自变量与函数值的变化关系，使学生从开放性的问题情境中进行深入的观察与思考，从而进行主动的学习。面对探索性的实验，教师可以通过设置实验环节，将课堂放手给学生，让学生通过做网络画板实验来亲身经历问题的提出、假设的建立、假设的检验和结果的展示等过程。比如探究“不同函数的增长差异”就可以分为三个小实验，教师先带领学生做第一个实验，再鼓励学生以小组为单位探究完成剩下实验，得出相应的结论，在这个过程中学生不仅掌握了基础知识，而且培养了自主学习意识和探索思考的精神。

四、操作内容要具备适度性

操作内容的适度性主要强调教师对于学生身心发展状态要有充分的认知，操作的内容要满足学生的需求，并且确保操作内容的难度是学生可以接受和完成^[21]，课堂上利用

网络画板展示过多和过复杂的内容有时候可能并不能达到良好的教学效果,反而会影响实际教学效率和学生满意度。因此在内容选择上,首先需要考虑学生的知识水平、学习背景、学习兴趣和风格等,通过对学生的了解适当的调整操作内容,使之适应学生的需求和认知;其次,利用网络画板进行操作的内容要在难度适中的基础上具备一定的挑战性,这样才能引发学生探究的兴趣,体现使用网络画板的意义;接着,操作内容不应该一股脑的传递给学生,而应该循序渐进,通过由易到难、由简到繁的操作过程使学生由浅入深的理解知识内容;最后,网络画板的操作应该是教师和学生都能进行的,当教师展示时,应让学生明白其原理,而当学生操作时,教师也要对其操作的内容和过程进行恰当的指导和反馈,帮助学生将所学知识应用到实际的问题解决中去。比如对不同函数增长的差异这一节,教师不仅可以通过自身讲授让学生明白三种函数增长的差异,还可以让学生根据特殊的函数进行自主的探究,从探究活动中掌握知识点,从被动的接受转换为主动的学习,促进学生对知识的接收与理解。

五、教学过程要体现知识形成过程

网络画板作为数学辅助工具,可以为学生提供创造性表达和可视化呈现的机会,促进学生知识的形成与思考^[21]。知识的形成过程反映在教学过程中是知识的引入、探索和发现、合作与交流、反思与总结、知识拓展与应用以及学生学习效果的反馈与评估^[31]。在教学过程中融入网络画板也不能忽视上述教学与学习过程,要让网络画板的使用是自然而然的,是有必要的,是为了促进知识点的深入,帮助知识点环环相扣的,而不是为了使用画板而设计不必要的教学环节。

笔者通过调查了解到海南省高中数学教学所选取的教材都为人教 A 版教材,该版本总共有 5 册课本,其中包括 2 册必修课本和 3 册选择性必修课本,根据课程标准,其内容主要分为预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动共五部分内容^[3]。函数是高中数学学习的重要知识,也是高一学生开始高中数学学习的基础知识,理解与掌握函数的概念与性质对后续数学学习具有深远意义,函数的单调性作为函数的其中一个性质,对后续初等函数、数列和导数的探究起铺垫作用。

函数的单调性的概念教学是高中函数性质的一大起点,也是学生尝试用符号语言描述世界的开始,如何生动的讲好这节课,让单调性的概念自然的由文字语言到符号语言是教学的重中之重,而探究的过程仅仅依靠 PPT 上的静态图片是不够生动的,而采用网络画板加以辅助则能使内容更加直观和生动。因此该内容具备使用网络画板的操作性,在学生探索的过程中内容也具备趣味性、探究性和适度性,整个探究过程也通过动画的

形式展现符号语言的生成过程。不同函数增长的差异性函数单调性知识点的延伸，也是在学习了指数函数和对数函数之后对三种函数的进一步挖掘，其内容涉及特殊函数之间的比较和对一般函数的概括，仅仅依靠书本的图片和文字语言的描述，学生比较难发现和确定它们的增长特点。但是用网络画板进行函数的绘制则使得操作简单，即使是学生也能轻松上手，同时内容本身的探究也是三个类似的探究活动，只要教师指导学生第一个探究，学生也能很好的进行后续类似的两个探究，在探究的过程中学生也能从趣味画图中逐渐明白知识的由来。所以该知识内容也满足操作性、探究性、趣味性、适度性和知识生成性。因此本文以人教版 A 版数学必修一教材为例，根据网络画板的特点与应用范围，结合本文所提到的内容选择原则，选择以“函数的单调性”与“不同函数增长的差异”两节作为教学内容，对如何使用网络画板进行高中数学教学提供案例与思考。

4.1.2 基于网络画板的高中数学教学设计原则

对课堂教学过程进行合理的设计是教师上好一节课的关键，因此了解相应的教学设计原则是进行教学设计的前提与基础。笔者通过查阅文献，明确新课标教学要求，再结合网络画板的特点、高中数学知识要素和学生特点总结出以下基于网络画板的高中数学教学设计原则：

一、主体性与主导性相结合原则

主体性与主导性相结合原则是指在课堂教学中，教师既要注重培养学生的主体性，做到以学生为中心，又要发挥教师的主导作用，在师生互助过程中激发学生的学习兴趣，帮助和引导学生进行有效学习^[25]。因此，在教学设计中，教师应该以学生的需求、兴趣和能力为出发点，通过考虑学生的学习特点，以启发式提问、小组合作等方式进行课堂教学，指导学生学习的同时促进学生自主思考探究。

采用网络画板进行辅助教学的课堂形式主要有两种，一种是只有教师个人操作网络画板，而学生负责对教师抛出的有层次性的问题和展示的图象进行分析、探究和解释，在这个过程中学生可以通过自主思考和小组讨论来发挥主体性作用。还有一种是针对探究性活动每一位学生都有设备进行网络画板操作，此时教师作为课堂的主导需要对学生问题进行问题的抛出和引导，也可以适当的进行部分操作和示范，方便学生后续可以对问题进行动手实践、合作交流和论述结果等等，在探究活动中发挥主体性。网络画板的应用为学生的学习创造了乐趣、提供了便利，通过使用网络画板进行教师引导和学生主动探究的教学活动，能培养学生动手实践和自主探究能力，提高创新意识和合作精神。

二、情境性原则

在日常教学过程中，情境导入、问题导入和复习导入是常见的教学导入方式。网络画板可以利用图象在导入环节制造适当的情境或问题，激发学生的求知欲，同时也可以根据制作的数学模型在新授环节提出合适的问题，通过问题串的形式对学生进行逐步引导，使学生在层层递进的探究中发现问题、分析问题和解决问题，进而明确自身的主体地位，达到收获知识和提高能力的目的。

三、开放性原则

网络画板的显著特点之一是开放性，它可以体现在两个方面。在课堂中，教师可以通过问题串的形式为学生提供一些开放性的问题，并引入多样化的教学方式引导学生进行学习，比如自主探究、合作交流、小组辩论等，最后再采用自评与他评的评价方式使学生从开放性的课堂环境中得到充分发挥与思考。在课外活动中，教师应鼓励学生对部分数学问题进行探索与思考，可以利用网络画板平台进行数学建模与沟通交流，实现课外自主探究和小组合作，达到激发学生学习的目的。

四、循序渐进原则

学生对于数学知识的学习是由浅到深、由具体到抽象的，在高中数学知识体系中，相较于之前小学和初中的文字语言和简单的符号语言，数学知识内容逐渐抽象化和符号化，这也使得数学学习愈发具有挑战性^[24]。因此，对数学抽象内容进行层层剖析，将教学内容逐步递进，对学生的数学学习是很有帮助的。网络画板利用其直观性的特点，不仅能将抽象知识利用数形结合思想进行直观化和具体化，还能将知识的抽象过程以动态化的形式进行展示与剖析，帮助学生产生更加清晰地认知，构建更为完善的认知结构和知识体系，培养抽象思维能力。学生对知识的探索过程，需要教师引导他们从简单经验开始积累，逐步深入到知识内部，在不断探究、不断思考、不断分析的过程中提高自我抽象意识和探索精神。

五、因材施教原则

每一个学生都是独特的人，他们都有自己的个性和特点，因此在学习方式、能力和兴趣爱好方面也存在差异^[38]。因此，教师在教学过程中要注意学生的差异性，根据学生的不同年龄阶段和能力特点布置不同任务，同时鼓励学生采用多样化的方式解决问题和发表见解，并针对学生的特点进行针对性的引导和评价。教师在使用网络画板进行教学的过程中，对于学生的合作探究活动，要学会采用同组异质和异组同质的分配方法，使每一个学生都能加入到小组活动中并做出贡献。同时也要注意对学生探究技能的培养，

要使每一位学生都能使用网络画板进行探究式教学，避免有同学出现无探究结果的情况。

六、参与性原则

课堂需要师生的共同参与，因此教师应该使每个学生都参与到课堂活动之中。在日常教学中，教师可以利用提问的方式使全体学生进行独立思考或交流讨论，比如根据网络画板绘制的图象寻找某个函数的特征。如果在探究学习中有足够的设备支持，教师可以使每个学生、小组都有机会进行网络画板操作和想法表达，并且在这个过程中，教师要确保引导每个学生都能进行探究活动，使每个学生都可以有自己的成果，提高学生数学学习兴趣与成就感，培养数学学习能力。

4.2 基于网络画板的函数单调性教学策略

将网络画板融入函数单调性的相关知识点的教学中，一方面能帮助教师提高课堂教学效率，帮助学生将抽象知识进行直观化展现，另一方面能促进学生的自主学习意识，提高自主探究和实践能力。将网络画板应用于形如“函数单调性”的概念教学中，不仅能给学生展示丰富的静态图象，创设出良好的学习情境，而且能根据动态图象变化特点帮助学生提出猜想并进行验证，使学生的学习过程更加直观化，更加轻松地剖析出函数单调性的定义。将网络画板应用于形如“不同函数增长的差异性”的探究性教学中，不仅能给学生提供有效且便利的工具，使学生进行自主的探究与实践，而且能锻炼学生的动手操作能力，提高学生的逻辑思维。因此，基于网络画板的函数单调性的教学设计既要利用网络画板将抽象知识直观化，提高学生对数学学习的兴趣，更要在此过程中培养学生的各项数学核心素养。

一、扎实基础，掌握操作技能

课堂中要使用网络画板进行教学，教师不仅自身要掌握如何操作网络画板以及网络画板的功能，还需要指导学生掌握其操作步骤与操作原理，这样才能使教学活动正常进行。因此，教师需要在正式的探究活动前带领学生学习网络画板，使学生了解网络画板特点与功能并获得一些基本的技能与操作要领，具体如下：

首先，了解如何进入网络画板页面，明白如何从资源界面阅览和下载其他优秀教师的优质课件，以便后续自主学习的使用和引导。

其次，了解绘图界面中简单图标的基本功能，学会建立直角坐标系，并尝试利用部分操作功能进行简单绘图。比如：1. 点击对应的点线面图标，绘制点、线（直线、射线、

线段)和基本平面图形(圆、多边形);2.从基本图形出发,利用相应图标绘制特殊的点(中点、坐标点、自由点等)、线(中线、垂线、平行线、中垂线、角平分线等)和面(等边三角形、等腰三角形等);3.特殊图标的使用与操作(图象的平移、旋转、对称、迭代和缩放,函数图象的绘制、表达式的显示,测量、变量、动画、显示与隐藏、轨迹等)。

最后,学会对各种基础操作进行混合使用,尝试根据自身需求绘制合适动态图象。考虑到课时原因,有些技能并未对学生进行详细的介绍和说明,技能讲解更加针对于函数图象的绘制、测量功能的运用、参数变量的使用和显示隐藏图标的应用,更多的技能操作鼓励学生课后进行主动的探索和学习。

二、情境创设,探究培养直观想象素养

教师根据教学内容的需要和教学要求,采用网络画板绘图进行情境的创设,使学生有直观的图象进行理解和对照^[28],提高学生学习兴趣的同时,能够将所学知识与提出问题相联系,从而有针对性的开展探究活动。例如,在进行函数的单调性概念讲解时,可以先用网络画板展示三个特殊的函数图象:一次函数、二次函数和反比例函数,让学生利用初中所学知识描述它们的变化趋势,接着再使用三个函数的动态化图象,根据动点的变化趋势,请学生描述图象函数值随自变量变化的趋势。通过静态图和动态图,使学生对变化趋势的描述从简单文字语言到逻辑性数学语言,引发学生学习的兴趣,吸引学生的注意力,为后续符号语言的描述做铺垫。因为函数单调性的符号语言并不是学生马上就可以掌握的,因此教师可以根据图象的变换将之前所学知识一一剖析呈现给学生,让他们从观察对比中深化概念,培养数形结合思想意识和直观想象素养。

三、自主探究,化“被动”为“主动”,培养逻辑推理素养

经历情境导入后,学生参与到课堂探究之中,此时学生要能从探究过程中发现问题,并根据教师的指导进行自主学习或小组合作,保证学生能在环环相扣的问题串中完成对知识的探索与学习。通过教师的引导,学生在探究活动中感受到自己的主体地位,对于知识的学习也由被动的接受转为主动的探索,学生的逻辑推理素养和抽象思维都得到培养与提高^[29]。例如,教师先利用三个动态点的二次函数图象说明所有点的情况,再让学生思考如何过渡到任意两点的情况,并尝试用符号语言描述二次函数图象的变化趋势。在这个探究过程中,学生的思维由直观到抽象,逻辑体系得到完善与加强,学生更加明白概念的由来。在学生自主探究的过程中,教师除了让每个学生都参与到课堂之中,还要注意不同学生的差异,根据学生存在的困难与问题提供帮助和修改,引导学生得到正

确的概念。

四、逐步建构函数的单调性知识体系，培养数学抽象素养

单一知识的学习能为知识体系的构建做铺垫，教师引导学生通过对某个知识点概念的学习逐步深化到性质和应用，并在这个过程中积累学习经验，培养数学核心素养，提高解决问题和归纳概括的能力。例如，函数的单调性学习是从概念入手，但是其作为函数性质的一种，后续与多种函数相联系，同时单调性涉及变化趋势和变化率，又与导数产生紧密的联系。在对函数单调性进行学习与应用的过程中，学生对其知识体系的认识得到逐步完善，逐步掌握了函数单调性的应用技巧和应用场景，培养了数学抽象素养。

五、协作交流，合作共享

教学过程中，不仅需要教师主动的教，学生独立的学，还需要协作交流。因为在学生以小组为单位进行合作交流的过程中，他们可以传递彼此的想法，在学习和思考他人经验的同时完善自己的结论，尤其对于一些基础薄弱的学生，协作学习有利于他们更好地融入课堂之中，在生生交流中对知识有更加清晰地认识。例如，在探究不同函数增长的差异性问题时，并不是每一位学生都能快速且正确的完成实验并得到结论，但是若以小组为单位进行合作学习，每个学生都能发挥自己的作用，并在共同探索中得到结论并完善和细化结论。因此，协作交流与合作共享不仅有利于学生学习，还有利于团体意识的培养，使学生得到更好的成长。

六、追踪训练习题，发展学科核心素养

课堂学习以后，教师需要为本节课所学的知识内容提供针对性的练习，练习题不仅要具有层次性^[35]，让学生在由易到难的习题中逐步深化所学知识，还要具有全面性，通过多样化的问题全面认识知识，并将知识与实际生活相联系，体会数学与生活的联系。在这个过程中，对于简单的问题，教师可以引导全班一起回答，对于中等难度的问题，教师可以让学生独立思考后回答，对于偏难的题，教师可以鼓励学生以小组为单位进行探讨，最后让小组代表发表意见，这可以使学生扎实基础，提升自身解决问题的能力，多方位发展数学学科核心素养。

七、点评方式多样化，促进交互行为

课堂的结束伴随着总结与归纳，知识的总结对学生知识体系的形成是很有必要的，所以教师需要鼓励学生发表自己的看法，比如“本节课的学习内容包括什么？本节课的学习路径是怎样的？从这节课中你认为自己哪些能力得到了提高？”让学生自主回忆和思考课堂的教学思路和学习收获。除此之外，教师还需要对学生课堂学习进行评价，这

其中包括学生参与探究活动的积极性，课堂学习的投入程度，对课堂知识的掌握程度以及对问题的思考等等。其他学生也可以从这些内容入手，对同学进行评价，同时被评价学生自己也要对自身表现进行评价，了解自己的优缺点，从客观评价中有针对性的进行改善，提升自身认知能力，获得有效的学习评价效果。

4.3 基于网络画板的函数单调性教学设计框架

根据以上教学设计原则与设计策略，笔者针对函数的单调性教学内容中的教学环节进行教学模式框架设计。首先，在函数单调性概念课教学之前，教师熟悉网络画板操作并制定合适的网络画板课件，在不同函数增长的差异性探究课前，教师指导学生进行网络画板操作，为学生后续的自主探究做准备，使网络画板不仅用于教师的讲授，还用于学生自主的探索。其次，教师利用情境或问题进行导入，通过生活化的问题或直观化的图象吸引学生注意，激发学生对课堂学习的兴趣。再次，教师抛出探究性过程，通过教师指导促进学生对知识点的循序渐进的思考与探索，并在指导过程中根据学生情况有针对性的提问，使每位学生都能参与问题思考或网络画板绘图的探究活动中，从探究过程中掌握概念和性质并进行深化。接着，教师给出针对性课堂习题，鼓励学生自主思考与发言，促进学生对知识点的进一步吸收与理解。最后，教师请学生总结评价本节课的知识内容以及自身表现，让学生从自我反思中总结自身收获。具体教学框架设计如图 6 所示：

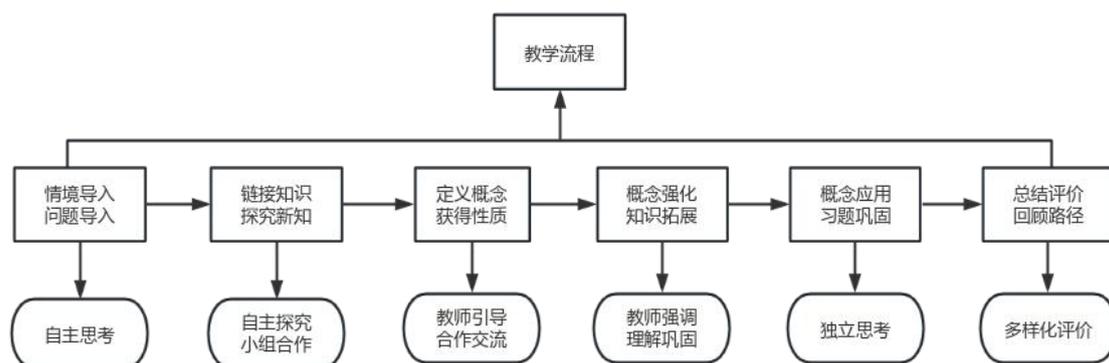


图 6 教学框架

4.4 基于网络画板的函数单调性教学设计

4.4.1 网络画板在函数的单调性相关教学中的优势分析

一、激发学生学习兴趣，促进学生对函数性质的理解

将网络画板融入高中函数的单调性教学之中，通过动态化的图象展示函数单调性的内容可以使学习内容更加直观生动。教师在函数的单调性概念教学之前，可以先制作相关函数的动态图象，通过下载离线文档或者插入 PPT 的方式进行课堂播放，并通过实际操作按钮进行拖动和测量，让学生观察分析自变量与函数值变化的关系，最终得到一般的概念。网络画板通过动态化的图象，将抽象的知识内容进行展示和剖析，学生在学习的过程中，不仅能更好地理解函数的单调性的概念，还能提高其学习兴趣，锻炼其逻辑抽象能力，更重要的是从动态的过程中揭示函数的单调性符号语言的由来，促进学生对函数单调性概念的理解和记忆。教师通过层层展示与剖析，利用问题串的形式对学生进行引领，学生能更好地认识到函数单调性概念由文字语言到符号语言的转化，体会到数学语言的精简性、严谨性与逻辑性，激发学生学习兴趣，提高学生学习效率。

二、学生自主绘制函数图象，提高学生探究实践能力

教师要在教学过程中让学生切实理解一些性质概念，体会网络画板的精妙之处，就要给学生提供实践探究的机会，让学生进入数学实验室动手操作，自己绘制相关函数图象，从绘制图象和观察图象的过程中理解函数的概念与性质，提升动手操作能力，提高数学抽象和逻辑推理的数学核心素养。“不同函数的增长差异性”作为一节探究活动课，仅靠教师的讲解是不足以吸引和说服学生的，在这里，教师要通过实际的实验让学生明白其概念及性质的可靠性。教师可以鼓励学生根据教师提供的问题串亲自参与到问题的探索之中，通过观察图象变化规律和对变化率的测量亲身体会不同函数增长的特点和快慢，让学生在实践过程中提出和验证自己的猜想，获得参与感。通过自主探究和小组协作，学生可以从具体图象中体会抽象知识，增强对函数图象的认识，提高数形结合能力，在提高学生自主探究和合作交流能力的同时，培养学生的自主意识和独立思考能力。教师还应鼓励学生不仅参与到课堂实践探索中，还参与到课外自主探索中，通过网络画板的功能，自主研究感兴趣的实际问题并找到相应的解决方法。

三、动态展示函数图象，化抽象为直观

函数作为中学重要知识点，其学习思路一般是先学习概念，然后通过解析式画出图象，由图象了解性质，最后学习其应用。因此，在函数的学习中，要了解好函数的性质，对于函数图象的观察和理解是很重要的。利用网络画板绘制函数图象，可以构造函数图象上的自由点，通过拖动自由点来观察函数值随自变量变化的情况，还可以设置变量，通过改变变量，将特殊的函数推广到一般，发现函数图象随参数变化的规律情况。同时，

网络画板的动态功能可以更方便快捷的展示多种图象，而其动态化过程也有利于学生对内容和性质的理解，避免了教师满堂灌的情况，使课堂教学更加有趣。利用网络画板进行函数知识的教学，不仅促进了学生对于函数图象和性质的理解，提高了学生数形结合能力，培养了学生数学抽象核心素养、想象力和创造力，同时也加强了师生对话，提高了课堂教学效率。

四、改变传统探究模式，培养数学建模核心素养

在传统的数学探究活动中，一般由教师引导学生利用实物进行探索，面对无法用实物展示的探究课，比如函数，教师只能通过静态图象让学生理解。但是，实物探究活动一般都费时费财，大部分材料还要进行课前准备，普通讲授课又很难让学生切实体会到探究过程，降低了学生学习兴趣。网络画板作为动态数学软件，不仅可以为教师教学提供动态化图象，还可以让每个学生都有实践的机会，学生只要利用电脑就可以在短时间内进行重复实验，且实验数据可以进行保存，学生只要重新登录账号或者保存自己文件的二维码就可以进行查看。利用网络画板进行探究实验，虽然受设备原因的限制，但是探究过程却可以让学生受益匪浅，使学生的观察、分析、归纳能力都得到提高，培养了学生的数学建模的核心素养。

4.4.2 《函数的单调性》教学设计

一. 教材分析：

“函数的单调性”是人教A版高中数学必修一第三章第2节的内容，该节内容包括函数的单调性的定义与判断、证明以及函数的最大（小）值。在初中的函数学习中，有借助图象的直观性研究了一些简单函数的增减性，这节内容是在初中学习基础上的巩固、深化、延伸和提高。

函数的单调性是函数的重要性质之一，是对本章第一节中“函数的概念和图象”知识点的延续，它和函数的奇偶性，合称为函数的简单性质，是今后研究幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及其它函数单调性的理论基础^[50]，在解决函数值域、定义域、不等式、比较两数大小等具体问题中均产生重大用途。利用函数图象来研究函数性质的数形结合的思想也将贯穿我们整个高中数学教学和学习。因此，函数单调性在数学内外都有着重要的应用。

二. 学情分析：

1. 学生已经掌握了函数的概念, 并且在初中学习了一次、二次函数的图象。

2. 对函数单调性这个知识点, 学生的主要存在以下困难: (1) 数学符号语言的使用使学生思维由直观转为抽象, 难以做到用准确的数学符号语言去描述和刻画图象的上升与下降; 因此, 利用网络画板进行教学能够动态化的刻画图象的升降情况, 更好地反映符号语言中任意点存在的必要性。(2) 单调性的证明是学生在函数内容中首次接触到的代数论证内容, 而学生在代数方面的推理论证能力比较薄弱^[52]。

3. 学生对于数形结合的思想方法理解的不够透彻。

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型, 要注重提高学生的思维能力, 学生在学习数学运用数学解决问题时, 要经过直观感知、观察发现、类比归纳、空间想象、符号表示、数据处理等思维过程。因此, 应该重视学生的亲身体验、重视学生的发现过程、重视课堂问题的设计, 引导学生解决问题。利用网络画板进行教学, 更利于抽象问题的直观化, 促进学生数形结合思想的提升。

三. 教学目标

1. 通过具体实例, 经历函数单调性概念的抽象过程, 能准确地说出单调递增(增函数)、单调递减(减函数)定义及其图象特征; 能用例子说明“任意”“都有”等关键词的含义; 发展数学抽象素养。

2. 能说出用函数单调性定义证明函数单调性的步骤, 能用函数单调性的定义解决问题, 发展逻辑推理、数学运算素养。

四. 教学重难点

教学重点: 函数单调性的定义及其应用。

教学难点: 用符号语言表达函数的单调性, 证明函数的单调性。

五. 教学过程

(一) 创设情景, 导入新课

导语: 在之前, 我们接触了函数的定义及其表示法, 知道函数 $y = f(x), x \in A$ 描述了客观世界中变量之间的一种对应关系。今天起, 我们要进一步学习函数, 研究函数的性质, 如随着自变量的增大函数值增减性如何, 是否存在最值, 函数图象有什么特征等, 这是认识客观规律的重要方法。我们也可以通过研究函数的变化规律来把握客观世界中事物的变化规律^[53], 利用函数“预测未来”。

问题 1: 下图是某地某日一天 24 小时内气温随时间变化的曲线图(图 7)。



图7 气温图

观察图形，你能得到什么信息？

【生成预设】

- (1) 当天当地的最高温、最低温及达到的时刻；
- (2) 在某时的温度；
- (3) 某些时段温度升高，某些时段温度降低。

师生活活动：教师说明在生活中我们关心很多数据的规律，了解这些规律对我们的生活很有帮助，比如燃油的价格、艾宾浩斯遗忘曲线等，并给出相应情境图片，如图8。并以此引出：从函数的观点看，这些例子反映的是函数值随着自变量的变化而变化的规律。学生根据图象说明其特点。

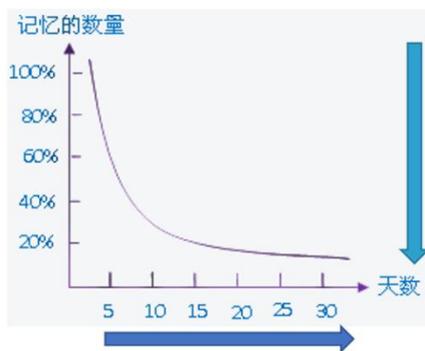


图8 艾宾浩斯遗忘曲线

师：上述函数图象的升与降、最高点、最低点等都是函数性质在图象上的反映，除此之外，函数还有许多其它的性质。今天我们从如何精确地描述函数图象的上升与下降所反映的性质开始。

【设计意图】采用情境导入的方式，将生活与数学知识相联系，激发学生学习兴趣。并使学生从函数图象整体感知函数的性质，明确本节课的学习任务，了解本节课的地位与作用。

(二) 新课讲授

环节一：归纳探索，形成概念

师：对于函数从左到右图象上升或者下降的变化规律，在初中阶段我们称为增减性，那时候还没有严格的定义，而在高中我们称为“函数的单调性”。今天我们首先就是建立函数的单调性的严格定义，并学会用符号语言刻画函数的单调性。

问题 2：请同学们画出函数 $f(x)=x+2$, $f(x)=x^2$, $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象，并尝试根据函数自变量与函数值的关系描述图象从左至右的变化规律。

师生活动：学生根据初中学习经验画出图象并对图象进行观察，通过分析图象回答 PPT 上的问题。教师给出网络画板绘制的静态图象（如图 9 所示）并引导学生从左往右看，也就是当 x 如何变化时， y 会如何变化，又是在什么范围内发生变化？以此引导学生给出文字语言，并进行板书。

【生成预设】

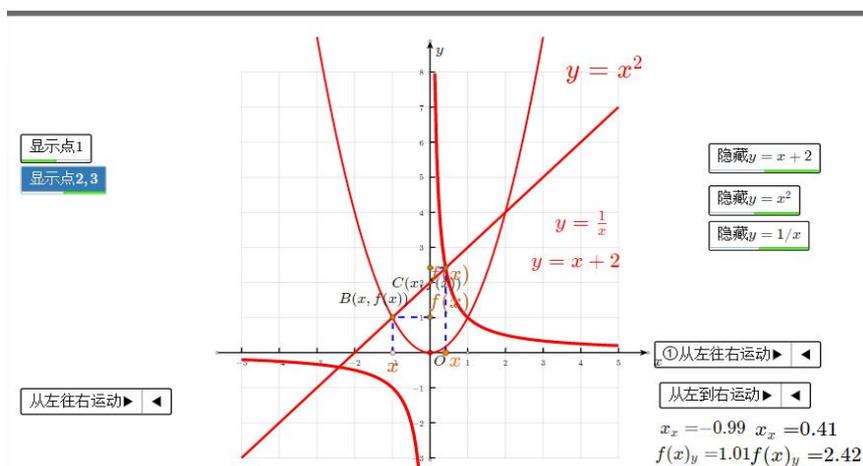


图 9 网络画板展示三个函数图象

- (1) 函数 $f(x)=x+2$ ，在整个定义域内函数值随 x 的增大而增大；
- (2) 函数 $f(x)=x^2, x \geq 0$ ，函数值随 x 的增大而增大， $x \leq 0$ ，函数值随 x 的增大而减小；
- (3) 函数 $f(x)=\frac{1}{x}, x \geq 0$ ，函数值随 x 的增大而减小， $x \leq 0$ ，函数值随 x 的增大而减小。

追问 1：以函数 $f(x)=x^2$ 为例，如何用符号语言描述函数图象的变化趋势？如何用符号语言描述函数 $f(x)=x^2, x \in (-\infty, 0]$ 时，函数值随 x 的增大而减小？

师生活动：教师提示学生如何描述“ x 的增大”？又如何对应描述函数值的变化？

通过网络画板取点进行动态展示过程（如图 10 所示），可以尝试取特殊值来看过程。但是可以发现自变量是无限的，因此这样表示过程是说不完的。

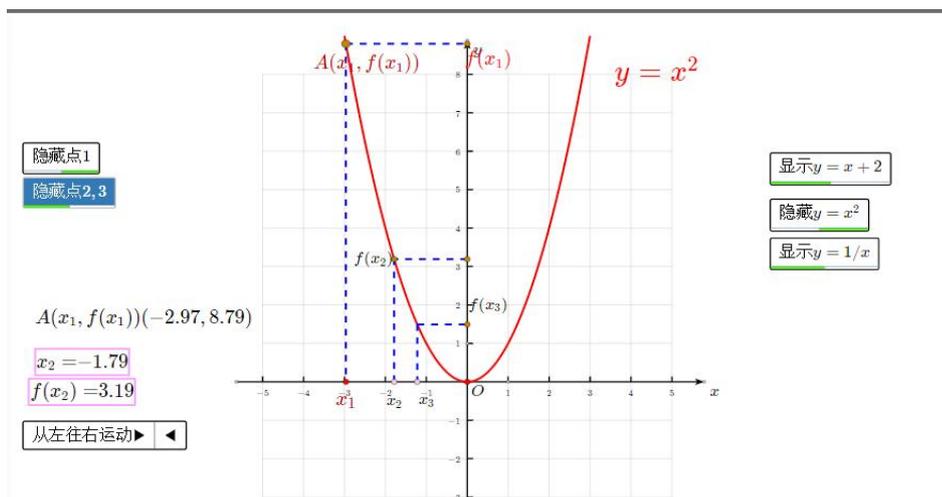


图 10 网络画板展示动态过程

追问 2: 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 中有无数的自变量 x ，使得当 $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ ，有 $0 < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n) < \dots$ ，此时有函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上递减，如何简洁的表示所有函数值随自变量 x 的变化情况？

师生活动: 教师通过语言的指导以及网络画板中函数 $f(x) = x^2$ 的纵轴左半轴动态图象的直观表示（如图 10 所示），提示学生借助字母、符号归纳刚才所说的变化的共同点，发现只要归纳成 $x_1 > x_2$ ，就有 $f(x_1) < f(x_2)$ 。还要引导学生从反例明白要取所有点，所以取的这两个点做比较要具备任意性，从而带领学生共同完成表 5 的左半栏部分。

【设计意图】通过教师的引导，让学生逐步完成从图象直观到文字语言描述再到符号语言表达的过程，了解函数单调性的符号语言表达方式，使学生体会知识生成过程。利用网络画板展示的动态图象可以更好的进行取点，更方便学生理解符号语言的由来，明白为何可以用任意两个点代表所有点的情况，体会数学语言的精简性。

表 6

	$f(x) = x^2, x \leq 0$	$f(x) = x^2, x \geq 0$
图象特征	如图，图象在 y 轴左侧部分从左往右是上升的。	
文字语言	y 随 x 的增大而减小。	

符号语言	任意取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ，得到 $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$ ，那么当 $x_1 > x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ 。	
结论	函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是 单调递减的。	

追问 3：对于函数 $f(x) = x^2$ ，请仿照表格左半栏内容写出右半栏。

师生活动：学生根据网络画板给出的另外一半图象（如图 11 所示），按要求完成任务，并展示交流。

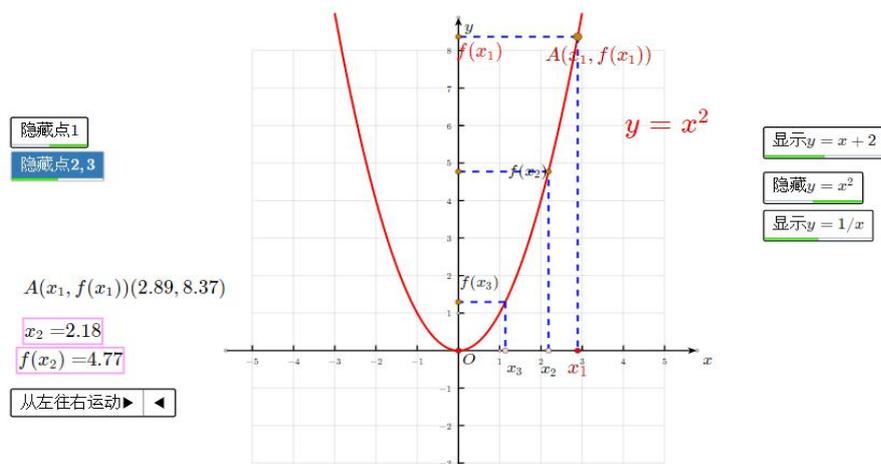


图 11 函数 $f(x) = x^2$ 的右半部分图象

追问 4：能否利用全称量词命题解释上表中的“符号语言”并判断其真假性？（以单调递减为例）

师生活动：学生独立思考，作答，后小组之间交流讨论。教师提示可以利用不等式的性质，或者作差法来进行判断。

【生成预设】

方法一（利用不等式性质）： $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0], x_1 < x_2$ 时，有 $-x_1 > -x_2$ ，所以 $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$ ，即 $x_1^2 > x_2^2$ ，所以 $f(x_1) > f(x_2)$ 。

方法二（利用作差法）： $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0], x_1 < x_2$ 时，有 $x_1 - x_2 < 0, x_1 + x_2 < 0$ ，所以 $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$ ，即 $x_1^2 > x_2^2$ ，所以 $f(x_1) > f(x_2)$ 。

【设计意图】通过教师引领，使学生初步感受用符号语言刻画函数单调性的方法，不同层次的学生也能依据网络画板的图象进行思考，从动态过程中一步步深化体会；让学生学会用全称量词表述函数的单调性并给出命题正确性的证明，让学生明白这样定义的合理性与简洁性，成功将所有点变成任意两个点。

问题 3：用符号语言表示函数 $f(x) = x + 2, f(x) = \frac{1}{x}$ 的单调性，归纳它们的共性，总结出单调性的概念。

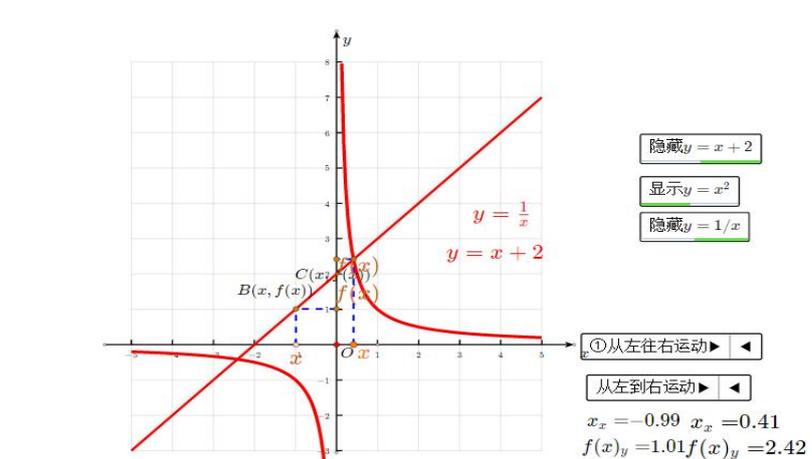


图 12 函数 $f(x) = x + 2, f(x) = \frac{1}{x}$ 的函数图象

师生活动：教师给出如图 13 所示的区间内单调递增与单调递减的函数图象，教师引导学生根据图象以及归纳所得经验说出函数单调递增的概念，教师进行补充和板书，后引导学生类比得出函数单调递减的概念。教师再根据函数 $f(x) = x + 2$ 和 $f(x) = x^2$ 来说明单调性的概念，期间根据不同层次学生考虑利用网络画板给出相应的动态图象（如图 12）进行提示。



图 13 单调性图象

【生成预设】

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 I 包含于 D ($I \subseteq D$)^[9],

如果 $\forall x_1, x_2 \in I$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，我们称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调

递增。特别地，当函数函数 $f(x)$ 在它的整个定义域 D 上单调递增时，我们就称它为增函数^[9]。

如果 $\forall x_1, x_2 \in I$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，我们称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减。特别地，当函数函数 $f(x)$ 在它的整个定义域 D 上单调递减时，我们就称它为减函数^[9]。

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减，那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有（严格）单调性，区间 I 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间^[9]。

【设计意图】通过多个具体函数的单调性的符号语言表达来归纳抽象出一般的函数单调性语言。教师先让学生尝试进行总结归纳，可以看出学生在语言表达上存在的不足，再帮助学生改进，加深学生印象。这整个过程都是学生自主和教师主导，在锻炼学生独立思考能力的同时也兼顾了学生发展方面的不足，使质量和效率有所保障。

环节二：分析概念，加深理解

问题 4：函数 $f(x)$ 在定义域 D 上的某区间 I ，存在 $x_1, x_2 \in I$ ，满足 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ ，那么函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的吗？

师生活动：教师引导学生从反例入手，说明定义中取的两点要具有任意性和一般性，而不是特殊性，学生独立思考后给出答案。

【生成预设】

不一定，如图 14 所示：

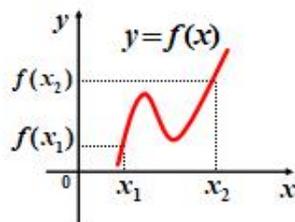


图 14

问题 5：函数的单调性是对定义域内的某个区间而言的，你能举出在整个定义域内是单调递增的函数例子吗？你能举出在定义域内的不同区间都单调递减但在整个定义域内却不是单调递减的函数例子吗？

师生活动：教师引导学生从函数图象入手，学生独立思考后给出答案。

【生成预设】

如图 15 所示：

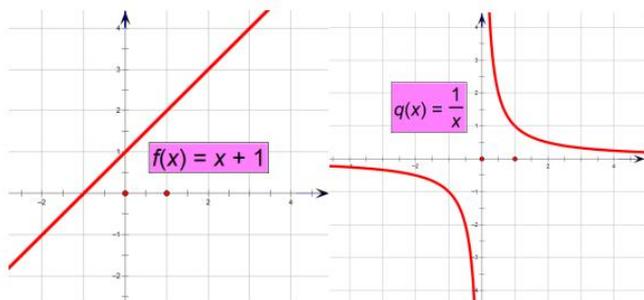


图 15

【设计意图】通过问题 4，使学生辨析定义中的“任意”二字；通过问题 5 使学生区分“单调递增”与“增函数”、“单调递减”与“减函数”等概念，同时也是为了引导学生明白当一个函数在不同区间上单调递增（单调递减）时，在它们的并集上不一定保持单调递增（单调递减）的性质，此时也就不能判断出它们是否为增函数（减函数）。总结出：（1）单调性是一个局部概念，局部单调不一定整体单调，而增函数与减函数是一个整体概念，要看整个定义域的情况；（2）同类区间用逗号隔开，不写成并集形式。

环节三：初步应用，培养技能

例题 1：图 16 是定义在 $[-5,5]$ 上的函数 $y = f(x)$ ，根据图象说出函数的单调区间，以及在每一单调区间上，它是单调递增还是单调递减？

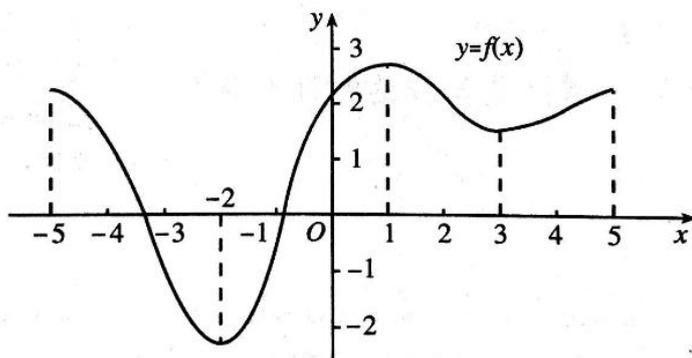


图 16

师生活动：学生独立思考研究思路，后请学生独立给出答案。

【生成预设】

单调递增区间： $[-2,1],[3,5]$ ；单调递减区间： $[-5,-2],[1,3]$

【设计意图】通过课堂练习，学生可以进一步巩固单调性的定义，提高自身解决问

题的能力。教师同时提醒学生：（1）函数在区间端点处有定义时，由于它的函数值是唯一确定的常数，没有增减的变化，所以不存在单调性问题，因此在书写单调区间时，可以包括，也可以不包括；（2）反之，函数在区间端点处无定义时，书写单调区间时就不能包括端点，比如反比例函数。

例题 2：根据函数单调性的定义，研究函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 的单调性。

师生活动：学生先独立思考研究思路，再小组之间进行讨论，确定研究方向，然后给出严格的证明，教师在讨论环节进行适当的指导并根据学生的证明进行板书并进行点评与完善。

教师需要强调：（1）研究一个函数的单调性，需要用到单调性的定义，看函数在定义域的哪些区间上单调递增，哪些区间是单调递减的，尽管我们也能通过作图和观察图象看出其单调性，但是这种方法是不严谨的，况且有时函数复杂则不好进行绘图，此时利用代数运算得出函数单调性更加合理；（2）具体操作要利用作差法、不等式的性质，即当 $x_1 < x_2$ 时，是否有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立。

【生成预设】

解：函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 的定义域是 R ， $\forall x_1, x_2 \in R$ 且 $x_1 < x_2$ ，则

$$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = k(x_1 - x_2) \quad (1)$$

由 $x_1 < x_2$ ，得 $x_1 - x_2 < 0$ ，所以

①当 $k > 0$ 时， $k(x_1 - x_2) < 0$ ，所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，即 $f(x_1) < f(x_2)$ 。这时 $f(x) = kx + b$ 是增函数。

②当 $k < 0$ 时 $k(x_1 - x_2) > 0$ ，所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ，即 $f(x_1) > f(x_2)$ 。这时 $f(x) = kx + b$ 是减函数。

【设计意图】学生在初中阶段已经学习过一次函数，对于这个函数的单调性也有一定的认识，只是那时对于单调性的理解是通过图象直观得来，现阶段是利用定义通过严格的逻辑推理证明结论。在这个简单的推理过程中，不仅锻炼了学生的逻辑思维能力，体现了定义的作用，还让学生理解了用单调性定义研究函数单调性的基本方法。

例题 3：物理学中的玻意耳定律 $p = \frac{k}{V}$ （ k 为正数）告诉我们，对于一定量的气体，当其体积 V 减小时，压强 p 将增大。试用函数的单调性进行证明。

师生活动：学生先独立思考“体积 V 减小时，压强 p 将增大”的含义，将物理知识与数学知识联系起来，再请学生独立思考得出证明，并上黑板进行板书。教师根据学生的思路进行点评与指导。

【生成预设】

证明： $\forall V_1, V_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $V_1 < V_2$ ，则

$$p_1 - p_2 = \frac{k}{V_1} - \frac{k}{V_2} = k \frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2} \quad (2)$$

由 $V_1, V_2 \in (0, +\infty)$ ，得 $V_1 V_2 > 0$ ；

由 $V_1 < V_2$ ，得 $V_2 - V_1 > 0$ ；

又 $k > 0$ ，于是 $p_1 - p_2 > 0$ ，所以 $p_1 > p_2$ 。

所以根据函数单调性的定义，函数 $p = \frac{k}{V}$ （ k 为正数）是减函数，即当其体积 V 减小时，压强 p 将增大。

【设计意图】通过物理公式的探究，使学生将物理与数学进行联系，了解可以通过构建函数模型来刻画现实世界中的现象。

追问：请同学们总结例题2和例题3的解题过程，能否归纳出用单调性定义研究或证明一个函数的单调性的基本步骤？

师生活动：教师指导学生思考并给出解题的一般步骤，并根据学生回答进行完善和板书。

【生成预设】

1. 取数：任取 $x_1, x_2 \in I$ ，且 $x_1 < x_2$ ；

2. 作差： $f(x_1) - f(x_2)$ ；

3. 变形：通常是因式分解和配方；

4. 定号：判断差 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负；

5. 结论：指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 I 上的单调性。

【设计意图】通过两个例子，让学生总结得出解题的一般思路与方法：（1）确定函数的定义域；（2）对 $\forall x_1, x_2 \in I$ ，设 $x_1 < x_2$ ，将 x_1, x_2 代入 $f(x)$ 中，得 $f(x_1), f(x_2)$ ；（3）

利用作差法将 $f(x_1) - f(x_2)$ 进行代数变形, 转化为可以直接用实数大小关系、不等式的基本性质等判断符号的式子; (4) 写出相应的单调区间。

(三) 总结归纳

问题 6: 回顾本节课的知识, 思考以下问题:

- (1) 如何用符号语言刻画函数的单调性? 有哪些需要注意的问题?
- (2) 用单调性的定义证明函数单调性的基本步骤有哪些?
- (3) 在本节课的学习过程中, 你对函数性质的研究方法有什么体会吗?

师生活动: 学生独立思考后进行回答, 其它学生和教师根据学生答案进行补充。

【设计意图】(1) 让学生再次回忆本节课的知识点, 做到准确表述单调递增、单调递减、增函数和减函数等定义, 进一步把握单调性的要点与关键; (2) 帮助学生回忆和加深用单调性定义研究和证明函数单调性的基本步骤, 为后续单调性的应用奠定基础; (3) 使学生体会“从定性到定量”的研究思路, 即从图象语言到文字语言再到抽象的符号语言, 在数形结合的思想方法上使函数性质得到更加严谨的数学表达。

(四) 巩固练习

练习 1: 下列函数在 $(0, +\infty)$ 上不是增函数的是 ()

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = x^2 + 1$ C. $y = 3 - x$ D. $y = x^2 + 2x + 1$

【生成预设】

答案选 C。

练习 2: 函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ 的单调减区间是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(2, +\infty)$

【生成预设】

答案选 B。

练习 3: 根据定义证明函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

【生成预设】

证明: $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$y_1 - y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} (x_1 x_2 - 1)$$

由 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ，可知 $x_1 > 1, x_2 > 1$ ，所以 $x_1 x_2 > 1, x_1 x_2 - 1 > 0$ ；

又由 $x_1 < x_2$ ，得 $x_1 - x_2 < 0$ ，

所以 $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} (x_1 x_2 - 1) < 0$ ，即 $y_1 < y_2$ ，

所以，函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

练习 4：根据定义证明函数 $f(x) = -3x + 2$ 是减函数。

【生成预设】

证明： $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，有

$$f(x_1) - f(x_2) = -3x_1 + 2 - (-3x_2 + 2) = 3(x_2 - x_1)$$

又由 $x_1 < x_2$ ，得 $x_2 - x_1 > 0$ ，

所以 $3(x_2 - x_1) > 0$ ，即 $f(x_1) > f(x_2)$ ，

所以函数 $f(x) = -3x + 2$ 是减函数。

师生活动：学生独立思考并进行作答，前两题学生口头回答，后两题学生上黑板进行书写。教师评价学生答案和书写过程，对不足之处进行补充和说明。

【设计意图】检测学生对于函数单调性定义的掌握情况以及利用函数单调性定义进行证明的掌握情况。

（五）作业布置

1. 完成本节内容的相应课时练习册与课后习题；
2. 回顾并总结本节课的知识要点，预习函数的最大值与最小值内容。

六. 板书设计（见表 7）

表 7 板书设计

黑板区域 1	白板区域	黑板区域 2
3.2.1 函数的单调性 ①单调递增： ②单调递减： ③增函数： ④减函数： ⑤单调区间： ⑥用函数单调性定义研究与证明函数单调性的基本步骤：	投射 PPT	习题讲解区域

4.4.3 《不同函数增长的差异》教学设计

一. 教材分析:

“不同函数增长的差异”是人教A版高中数学必修一第四章第4节的内容,该内容是在学习了函数的概念、函数的单调性、奇偶性、幂函数、指数函数和对数函数的基础上,对函数知识的一次梳理与总结,主要是提出了函数增长的快慢问题,并通过对一次函数、指数函数、对数函数的性质以及图象的观察与比较,完成对函数增长快慢的认识。

“不同增长函数的差异”这一节不仅是对三种函数学习的总结,里面反映的函数的单调性、变化率的知识也为后续导数的学习进行铺垫,为之后学生理解导数的概念奠定了基础。在本节学习过程中,通过图象的绘制与观察以及函数性质的应用,培养发展了学生数学核心素养。

二. 学情分析:

1. 学生已经掌握了函数的单调性、奇偶性等基本性质,并且已经学习了一次函数、指数函数、对数函数等函数的概念、图象与性质;

2. 对于不同增长函数的差异,学生的认知困难主要是:(1)要求学生能利用特殊性的例子抽象出一般的规律,这需要利用众多的例子才具有一定的说服力;利用网络画板进行探究,更方便学生迅速得出各类函数图象,丰富案例。(2)不同增长函数的差异性是用代数和图象反映的一个比较抽象的概念,如何将这种函数之间的差异代入到不同类型现实问题中是学生需要掌握的问题。

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型,不同函数的增长差异反映的是现实世界中不同类问题所表现出的不同增长趋势和规律^[31]。因此,要注重提高学生的数形结合能力和抽象思维能力,引导学生发现问题、鼓励学生自主实践、重视课堂问题设计,促进学生自主解决问题。

三. 教学目标与核心素养

(一) 教学目标:

1. 能借助信息技术,通过列表法和图象法,探索并了解一次函数、指数函数、对数函数等不同函数增长速度的各自特点与差异,并总结其中的规律;

2. 通过将一次函数与指数函数、一次函数与对数函数作对比,采用类比的思想研究相互关联的数学对象的方法和过程,从这个过程中使学生学会认识事物部分与总体、特

殊与一般之间的关系，培养学生数学应用意识；

3. 从函数图象中理解“直线上升、指数爆炸、对数增长”等概念，培养学生观察、分析、归纳问题的能力与小组合作的沟通能力。

4. 能利用不同函数的增长的差异性解决现实问题，培养学生数学建模与数学抽象的数学核心素养。

（二）数学学科素养

1. 数学抽象：对函数增长快慢的认识；
2. 直观想象：一次函数、指数函数、对数函数的图象绘制；
3. 逻辑推理：由特殊的函数例子到一般的规律总结；
4. 数学运算：运用变化率看增长速率的差异，并通过指数与对数运算分析现实问题；
5. 数学建模：能运用不同函数增长的差异性解决实际问题，构建合适的数学模型。

四. 教学重难点

教学重点：掌握一次函数、指数函数、对数函数这三类函数的增长特点，了解不同函数增长快慢的比较方法，并能利用其比较函数值的大小。

教学难点：了解影响各类函数增长速度的因素，理解“直线上升”、“指数爆炸”和“对数增长”，并能将几种增长函数模型应用到实际问题。

五. 课前准备

教学方法：讲授法、小组讨论、探究式教学；教学用具：PPT、网络画板。

六. 教学过程

（一）创设情景，导入新课

引导语：在 4.2.1 的例 2 中提到了 A, B 两地的旅游收入，通过对第（1）问的探索与解答，我们知道 A, B 两地的收入变化情况分别呈现一次函数的增长与指数函数的增长，如图 17 所示。虽然这两个函数在问题中都是呈现单调递增的性质，但是因为函数的差异，其增长情况也存在不同。

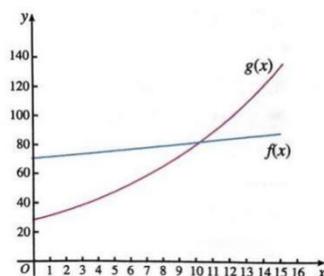


图 17

而在我们的生活中，不同的问题构建不同的函数，反映不同的增长规律。因此，学习不同函数的增长规律对我们选择合适的数学模型以及刻画现实问题具有重大的意义。那么如何研究不同函数的增长情况呢？这就是我们今天所要学习的内容，下面我们就从研究一次函数、指数函数和对数函数的增长差异开始入手。

问题 1：你认为该如何研究一次函数、指数函数和对数函数的增长差异呢？

【生成预设】

- (1) 利用函数的基本性质：单调性、奇偶性；
- (2) 观察函数图象；
- (3) 根据数据计算，分析变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

师生活动：学生思考与交流，给出自己的意见与看法。教师根据学生的答案，对计算变化率的方法进行解释：变化率构成一种线性函数，它是指在自变量的一定范围内，函数值变化量与自变量变化量的比值。教师画图演示，在相同的自变量变化范围内，函数值变化量越大，图象越陡。因此引导学生开始用观察函数图象以及计算变化率的两种方式来看三种函数增长之间的差异。

【设计意图】由前面的例题中一次函数与指数函数增长的差异引出今日的学习内容，通过提问给出两种研究方式，一是图象得来的直观感知，二是变化率的定量刻画。不仅让学生了解本节课应该运用的工具网络画板，也为后续导数的学习进行适当的铺垫。

问题 2：请你利用网络画板在同一个坐标系内画出这几个函数的大致图象：

$$y = kx(k > 0); y = a^x(a > 0, a \neq 1); y = \log_b x(a > 0, a \neq 1)。$$

【生成预设】

- (1) 一次函数：

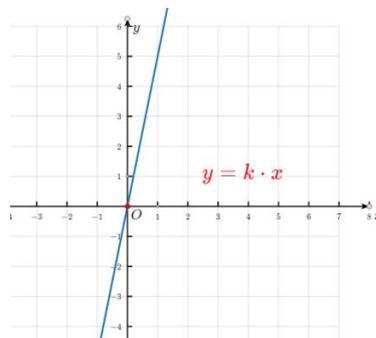


图 18 一次函数图象

- (2) 指数函数：

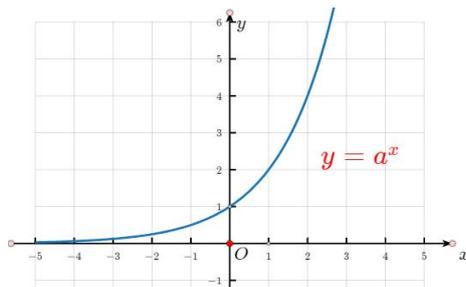


图 19 指数函数图象

(3) 对数函数:

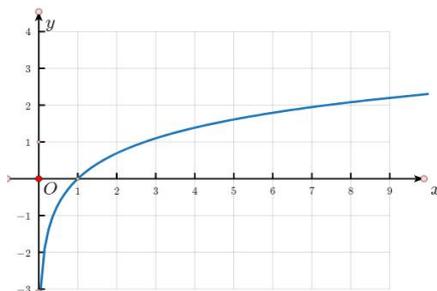


图 20 对数函数图象

师生活动: 教师带领学生利用网络画板进行建立直角坐标系以及函数构建的操作步骤, 通过对一次函数的演示, 让学生分组完成对指数函数和对数函数模型的绘画与构建。

【设计意图】由教师指导, 学生自己动手操作网络画板, 使学生能利用信息技术更加直观地感受函数图象的变化, 体会信息技术的简便与灵活, 为后续学生分组的探究活动进行铺垫。

(二) 新课讲授

探究一: 指数函数与一次函数的增长差异

师: 因为我们探索的一次函数与指数函数在增长方面的差异, 因此我们不妨选取都是单调递增的函数图象来进行研究, 看它们在区间 $[0, +\infty)$ 上的变化规律与差异, 比如:

$y = kx (k > 0)$; $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 它们的变化规律是怎么样的?

【生成预设】

(1) 函数 $y = kx (k > 0)$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上增长速度不变;

(2) 函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 在区间 $[0, +\infty)$ 增长速度变化;

问题 1: 以函数 $y = 2x$; $y = 2^x$ 为例, 请同学们利用网络画板计算器完成下列自变量与函数值的对应表格, 见表 8, 并在同一坐标系下画出相应的函数图象。

表 8

x	$y = 2x$	$y = 2^x$
0		
0.5		
1		
1.5		
2		
2.5		
...		

师生活活动：学生利用网络画板计算函数值，并画出函数在区间 $[0, +\infty)$ 上的图象。教师对于如何计算和如何在一定区间画图进行操作与指导。

【生成预设】

(1) 自变量与函数值对应表格，见表 9：

表 9

x	$y = 2x$	$y = 2^x$
0	0	1
0.5	1	1.414
1	2	2
1.5	3	2.828
2	4	4
2.5	5	5.657
...

(2) 函数图象，见图 21：

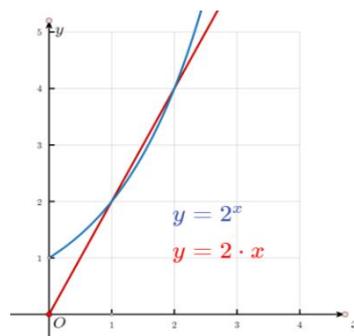


图 21

【设计意图】由教师指导，学生自己动手操作网络画板，使学生进一步灵活使用信息技术。用特殊的例子来进行研究，也为后续一般化的情况奠定基础，更利于学生的理解。

追问 1：观察函数 $y = 2x$; $y = 2^x$ 的函数图象，从左往右看，在区间 $[0, +\infty)$ 上它们的位置有何关系？你又发现了什么？

【生成预设】

(1) 函数 $y = 2x$, $y = 2^x$ 的图象有两个交点 $(1,2)$, $(2,4)$;

(2) 两个交点将区间 $[0, +\infty)$ 分成了三段，函数图象位置在这三段存在差异： $[0,1)$ 函数 $y = 2^x$ 图象在上面， $(1,2)$ 函数 $y = 2x$ 图象在上面， $[2, +\infty)$ 函数 $y = 2^x$ 图象在上面；

(3) 函数虽然都是单调递增的，但是二者递增速度存在差异，一个增速不变，一个增速发生变化。

师生活动：教师提示学生观察函数图象，从图象中反映的信息入手，使学生发现二者增长速度的差异，在小范围内给学生直观的感受。

【设计意图】先从部分图象上小范围的观察两个函数的增长差异，使学生对于两个函数的增长情况有一个更加直观地了解，明白在小范围内，二者的增长差异是比较小的。

追问 2：再观察对比这两个函数的自变量与函数值的对应表格，请你计算它们的变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，从变化率上你又得到了什么信息？

【生成预设】

(1) 变化率相关表格，见表 10：

表 10

x	$y = 2x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$y = 2^x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	0		1	
0.5	1	2	1.414	0.828
1	2		2	1.172
1.5	3		2.828	1.656
2	4		4	2.344
2.5	5		5.657	3.314
...

(2) 函数 $y = 2x$ 的变化率保持不变, 即增长速度不变, 函数 $y = 2^x$ 的变化率越来越大, 即增长速度越来越大。

师生活动: 教师提示学生如何计算变化率, 要求学生将对应的变化率算出, 并观察变化率有何变化。

【设计意图】通过直观图象的观察, 引导学生从数据入手, 以严谨的数据进行进一步分析, 加深学生印象的同时提高学生的运算能力。

追问 3: 在更大的范围内观察函数 $y = 2x$, $y = 2^x$ 图象和变化率, 你认为它们的增长情况如何? 它们是否还会出现更多的交点? 从中你能发现什么?

【生成预设】

(1) 随着自变量的增大, 函数 $y = 2x$ 的图象保持原来的增长速度不变, 函数 $y = 2^x$ 的增长速度越来越快;

(2) 两个函数图象不再产生新的交点, 在点 $(2,4)$ 后, 函数 $y = 2^x$ 的图象始终都在函数 $y = 2x$ 的图象上;

(3) 虽然在 x 的一定范围内, 函数 $y = 2^x$ 的值小于函数 $y = 2x$ 的值, 但是随着自变量的增大, 最终函数 $y = 2^x$ 的增长速度会远远超过函数 $y = 2x$ 。

师生活动: 教师提示学生观察函数图象, 从图象中反映的信息以及计算的变化率入手, 使学生发现二者增长速度的差异, 在更大范围内给学生直观的感受。

【设计意图】由小范围扩大到大范围, 使学生发现在更大的范围内, 两个函数的增长差异已经越来越大, 在某一点, 指数函数图象就已经一直在一次函数图象上方, 为后续一般化的情况做铺垫。

问题 2: 你认为选取不同的指数函数与一次函数, 按照上述的过程进行重复试验, 会出现怎样的结果?

【生成预设】

(1) 一次函数与指数函数在小范围内的增长速度差异比较小, 但是在更大范围内的增长速度差异很大;

(2) 无论选取的一次函数的 k 值多大, 虽然在自变量的一定变化范围内, 指数函数数值比一次函数值小, 但是在自变量达到某值后, 指数函数的图象都在一次函数图象的

上方，即指数函数的增长速度恒大于一次函数。

师生活动：教师将学生进行分组，并让学生利用网络画板画出一般情况下的函数 $y = kx(k > 0)$; $y = a^x(a > 1)$ 的图象，指导学生将其做成动态形式。并且请不同组的学生将 k 值与 a 值固定为不同的值，得到相应的函数图象进行观察，并仿照上述步骤，小组讨论出实验的结果。

【设计意图】选取多组不同的例子进行实验，为后续结论的一般性进行铺垫，同时锻炼了学生的动手操作能力和实践能力，体会动态数学的美妙之处。

追问：通过对几个特殊的一次函数与指数函数例子之间增长速度的比较，你能否将二者的增长差异进行总结，推广到一般的情况？导致它们增长速度差异的因素是什么？

【生成预设】

(1) 文字语言：一般地，指数函数 $y = a^x(a > 1)$ 与一次函数 $y = kx(k > 0)$ 的增长差异与上述情况类似。即选取的 k 值即使远远大于 a 值，函数 $y = a^x(a > 1)$ 的增长速度最终也会远远超过一次函数 $y = kx(k > 0)$ 的增长速度。

(2) 符号语言： $\exists x_0, x > x_0, kx < a^x(a > 1, k > 0)$ 恒成立。

(3) 影响指数函数增长速度的因素是底数 a ，影响一次函数增长速度的因素是系数 k 。

师生活动：教师请学生观察上述案例的特点，总结出一般的情况，并将所得的情况用符号语言进行精简说明。教师同时向学生解释，一次函数的增长一般称为“直线上升”，指数函数的增长称为“指数爆炸”，并让学生从指数函数图象中体会“指数大爆炸”。

【设计意图】通过多组不同的例子进行总结说明得出一般性的结论，在数形结合的过程中抽象出一次函数与指数函数的增长差异。在二者函数图象和变化率的比较中，不仅仅让学生了解二者的增长差异，同时也让学生更加形象且深刻的理解“直线上升”与“指数爆炸”。

探究二：对数函数与一次函数的增长差异

师：仿照探究一，我们依旧选取合适的一次函数与对数函数，看它们在区间 $(0, +\infty)$ 上的变化规律与差异，比如： $y = kx(k > 0)$; $y = \log_b x(b > 1)$ ，它们的变化规律是怎么样的？类比探究一，你想如何研究这个问题？

【生成预设】

(1) 函数 $y = kx (k > 0)$, 在区间 $(0, +\infty)$ 上增长速度不变; 函数 $y = \log_b x (b > 1)$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上增长速度发生变化;

(2) 先取特殊的一次函数与对数函数, 通过特殊的例子总结出一般的经验与规律。

问题 1: 以函数 $y = \frac{1}{10}x$; $y = \lg x$ 为例, 请同学们利用网络画板计算器完成下列自变量与函数值的对应表格, 见表 11, 并在同一个坐标系内画出相应的函数图象。

表 11

x	$y = \frac{1}{10}x$	$y = \lg x$
0		
10		
20		
30		
40		
50		
...		

师生活动: 学生利用网络画板计算函数值, 并画出相应的函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的图象。教师对于如何计算和如何在一定区间画图进行操作与指导。

【生成预设】

(1) 自变量与函数值对应表格, 见表 12:

表 12

x	$y = \frac{1}{10}x$	$y = \lg x$
0	0	不存在
10	1	1
20	2	1.301
30	3	1.477
40	4	1.602
50	5	1.699
...

(2) 函数图象，见图 22：

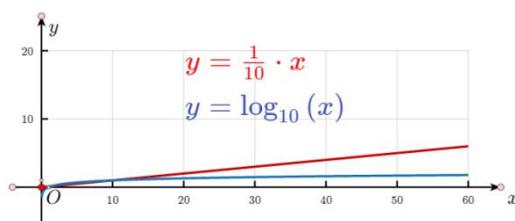


图 22

【设计意图】有了之前探究一的步骤，学生可以类比的去思考该如何研究这个问题，同时也能自己探索如何利用网络画板画出对数函数图象。

追问 1：观察函数 $y = \frac{1}{10}x$ ； $y = \lg x$ 的函数图象，从左往右看，在区间 $(0, +\infty)$ 上它们的位置有何关系？你又发现了什么？

【生成预设】

(1) 函数 $y = \frac{1}{10}x$ ， $y = \lg x$ 都呈现单调递增，但是二者的增长速度存在差异，函数 $y = \frac{1}{10}x$ 的增长速度保持不变，而函数 $y = \lg x$ 的增长速度发生变化；

(2) 随着自变量的增大，函数 $y = \frac{1}{10}x$ 的图象离 x 轴越来越远，而函数 $y = \lg x$ 的图象越来越平缓，像与 x 轴平行。

师生活动：教师提示学生观察函数图象，从图象中反映的信息入手，使学生可以直观地发现二者增长速度的差异。

【设计意图】从直观的函数图象进行观察，在视觉上体会两个函数增长的差异，之所以选择 $y = \frac{1}{10}x$ 与对数函数进行比较而不是 $y = x$ ，是因为 $y = \frac{1}{10}x$ 的增长速度更慢，更能体现出对数函数 $y = \lg x$ 的增长逐渐趋于平缓的特点，更加具有说服力。

追问 2：再观察对比这两个函数的自变量与函数值的对应表格，请你计算它们的变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，从变化率上你又得到了什么信息？

【生成预设】

(1) 变化率相关表格，见表 13：

表 13

x	$y = \frac{1}{10}x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$y = \lg x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	0		不存在	

10	1	$\frac{1}{10}$	1	0.1
20	2		1.301	0.0301
30	3		1.477	0.0176
40	4		1.602	0.0125
50	5		1.699	0.0097
...

(2) 函数 $y = \frac{1}{10}x$ 的变化率保持不变, 即增长速度不变, 函数 $y = \lg x$ 的变化率越来越小, 即增长速度越来越小。

师生活动: 教师让学生采取之前的方式快速计算变化率, 并观察变化率有何变化。

【设计意图】再通过直观图象的观察后, 引导学生从数据入手, 以严谨的数据进行进一步分析, 加深学生印象的同时也提高学生的运算能力。

问题 2: 请你再次选取不同的对数函数与一次函数, 按照上述的过程进行重复试验, 观察图象, 你发现了怎样的结果?

【生成预设】

(1) 无论选取的对数函数前面的系数多大, 虽然在自变量的一定变化范围内, 对数函数值与一次函数值接近, 但是在自变量达到某值后, 对数函数的图象都在一次函数图象的下方, 即对数函数的增长速度小于一次函数。

师生活动: 因为有了之前的经验, 教师只需要将学生进行分组, 并让学生利用网络画板画出一般情况下的函数 $y = kx(k > 0)$; $y = \log_b x(b > 1)$ 的图象, 让学生将其做成动态形式。并且请不同组的学生将 k 值与对数函数系数值固定为不同的值, 得到相应的函数图象进行定性分析即可。

【设计意图】选取多组不同的例子进行实验, 为后续结论的一般性进行铺垫, 同时也让学生可以更加直观地了解对数函数增长性的变化, 锻炼了学生的动手操作能力和实践能力, 体会动态数学的美妙之处。

追问: 通过对几个特殊的一次函数与对数函数例子之间增长速度的比较, 再结合探究一的讨论结果, 你能否将二者的增长差异进行总结, 推广到一般的情况? 并思考导致它们增长速度差异的因素是什么?

【生成预设】

(1) 文字语言: 一般地, 对数函数 $y = \log_b x(b > 1)$ 与一次函数 $y = kx(k > 0)$ 的增长

差异与上述情况类似。即选取的 b 值即使远远大于 k 值，在一定范围内，函数 $y = \log_b x (b > 1)$ 的值会大于函数 $y = kx (k > 0)$ 的值，但最终函数 $y = \log_b x (b > 1)$ 的增长速度会慢于一次函数 $y = kx (k > 0)$ 的增长速度。

(2) 符号语言： $\exists x_0, x > x_0, \log_b x < kx (b > 1, k > 0)$ 恒成立。

(3) 影响指数函数增长速度的因素是底数 b ，影响一次函数增长速度的因素是系数 k 。

师生活动：教师请学生观察上述案例的特点，总结出一般的情况，并将所得的情况用符号语言进行精简说明。教师同时向学生解释，对数函数的增长一般称为“对数增长”，并让学生从对数函数图象中体会“对数增长”的特点。

【设计意图】通过多组不同的例子进行总结说明得出一般性的结论，在数形结合的过程中抽象出一次函数与对数函数的增长差异。在二者函数图象和变化率的比较中，不仅仅让学生了解二者的增长差异，同时也让学生更加形象且深刻的理解“对数增长”的特点。

探究三：同时比较一次函数、指数函数、对数函数的增长差异

师：在探究一与探究二中，分别探索了一次函数与指数函数的增长差异，以及一次函数与二次函数的增长差异，那将一次函数、指数函数、对数函数的放在一起比较，你能得到什么结论呢？

问题 1：请同学们利用网络画板快速在同一个坐标系内画出函数

$y = 2x; y = 2^x; y = \lg x$ 的函数图象，比较它们的增长有何差异？

师生活动：学生利用网络画板在同一坐标系画出相应的函数在区间 $(0, +\infty)$ 上的图象。并根据图象进行交流讨论。

【生成预设】

(1) 函数图象，见图 23：

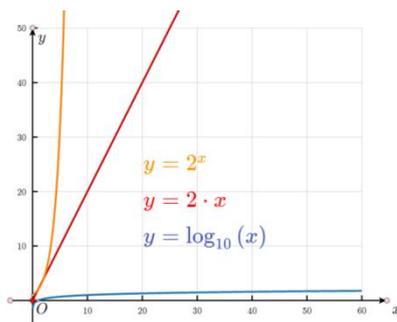


图 23

(2) 三个函数都是单调递增的,但是函数 $y = 2^x$ 的增长速度不变,函数 $y = 2^x$ 的增长速度越来越快,函数 $y = \lg x$ 的增长速度越来越慢。

【设计意图】将三个函数图象放在一起进行比较,使学生直观上有了一个统一的感受,大致明白三者的增长差异。

追问 1: 通过这几个特殊的一次函数、指数函数与对数函数例子之间增长速度的比较,再结合探究一和探究二的讨论结果,你能否将三者的增长差异进行总结,推广到一般的情况? 即 $y = kx(k > 0)$, $y = a^x(a > 1)$, $y = \log_b x(b > 1)$ 三个函数的增长差异如何?

【生成预设】

(1) 文字语言: 一般地,无论 $k(k > 0)$, $a(a > 1)$, $b(b > 1)$ 如何取值,函数 $y = kx(k > 0)$, $y = a^x(a > 1)$, $y = \log_b x(b > 1)$ 都在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,且指数函数的增长速度越来越快,最终指数函数值会恒大于一次函数值,对数函数的增长速度越来越慢,最终对数函数值会恒小于一次函数值;

(2) 符号语言: $\exists x_0, x > x_0, \log_b x < kx < a^x (b > 1, k > 0, a > 1)$ 恒成立。

师生活动: 教师请学生根据函数图象及前面两个探究的结果总结出一般的情况,并将所得的情况用符号语言进行精简说明。教师可以利用网络画板画图演示给学生看,也可以要求学生自己操作网络画板进行绘图理解。

【设计意图】通过网络画板,教师可以快速的展示出三种函数的图象,使学生直观的感受三种函数增长的差异性,从而得出一般性的结论。

追问 2: 如何理解“直线上升”、“指数爆炸”、“对数增长”的含义?

师生活动: 教师引导学生从函数的图象特征、函数值和变化率方面进行思考,从直观和抽象两方面体会其含义,学生之间也可以进行相互的讨论交流。

【设计意图】通过上述探究活动,学生对于三种函数的增长有了一定的认识,在后续的学习中也可以根据函数不同的增长差异而选择合适的数学函数模型解决问题,用“直线上升”,“指数爆炸”,“对数增长”等词语对函数的增长进行描述,不仅可以让学生更加形象地理解其特点,也更加方便学生的记忆,也更有利于学生用于对其它函数增长性的探究。

(三) 总结归纳

问题 1: 回顾本节课的探究过程, 思考我们是如何研究不同函数的增长差异的?

问题 2: 三种函数的增长都呈现出怎样的特点?

问题 3: 研究不同函数的增长差异对我们的现实生活有何意义?

【生成预设】

(1) 由简到难, 先将三个函数进行两两比较, 再将三个函数整体进行比较; 比较的过程先选取特殊的例子进行辨析, 后上升到一般的情况进行总结;

(2) 三种函数的增长如表格 14 所示:

表 14 函数增长情况

函数性质	$y = kx(k > 0)$	$y = a^x(a > 1)$	$y = \log_b x(b > 1)$
在 $(0, +\infty)$ 上的单调性	单调递增	单调递增	单调递增
随 x 的增大的增长速度	不变	越来越快	越来越慢

(3) 掌握了不同函数的增长规律, 就可以选取合适的函数模型去刻画现实问题的变化规律。

师生活动: 学生独立思考后进行回答, 其它学生和教师根据答案进行补充。

【设计意图】(1) 让学生再次回忆本节课的知识点, 做到准确表述不同函数的增长差异; (2) 帮助学生回忆和加深研究不同函数增长差异的方法与步骤, 锻炼学生的逻辑思维能力与动手操作能力; (3) 使学生体会数学模型对现实生活的重要性, 锻炼学生的数学抽象和数学建模的数学核心素养。

(四) 巩固练习

练习 1: 三个变量 y_1, y_2, y_3 随变量 x 变化的数据如表 15:

表 15

x	0	5	10	15	20	25	30
y_1	5	130	505	1130	2005	3130	4505
y_2	5	90	1620	29160	524880	9447840	170061120
y_3	5	30	55	80	105	130	155

其中关于 x 呈指数增长的变量是 ()。

练习 2: 如图 24 所示, 对数函数 $y = \lg x$ 的图象与一次函数 $y = f(x)$ 的图象有 A, B

两个公共点, 求一次函数 $y = f(x)$ 的解析式。

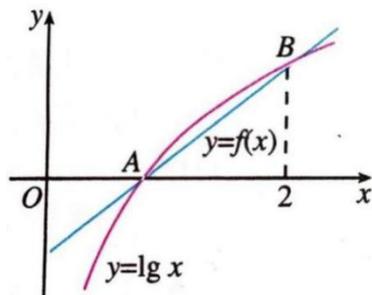


图 24

练习 3: 函数 $y = f(x)$ 的图象如图 25 所示, 则 $y = f(x)$ 可能是 ()。

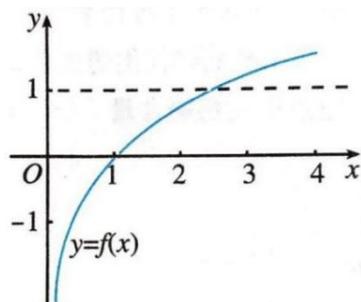


图 25

- A. $y = 1 - x^{-1}, x \in (0, +\infty)$
- B. $y = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in (0, +\infty)$
- C. $y = \ln x$
- D. $y = x - 1, x \in (0, +\infty)$

(五) 作业布置

作业 1: 请同学们课后思考指数函数、对数函数和幂函数之间的增长差异性;

作业 2: 请同学们以小组为单位, 利用网络画板或其它信息技术工具, 继续探究下列函数模型的增长性情况, 并尝试比较它们之间的增长差异性:

- (1) $f(x) = kx + b (k > 0)$;
- (2) $f(x) = ab^x + c (a > 0, b > 1)$;
- (3) $f(x) = m \log_a x + n (m > 0, x > 0, a > 1)$;
- (4) $f(x) = ax^\delta + b (a \neq 0, \delta \neq 1)$;

作业 3：完成本节课的课后练习题与作业习题。

【设计意图】通过课后练习将本节课的知识与实际的数学模型进行联系，使学生的数学抽象得到培养与提高；布置课后小组探究活动，让学生在今日学习的基础上进一步体会更多数学模型，不仅巩固了所学的知识与方法，更多的体会了信息技术对当今数学的影响与帮助，同时锻炼了学生举一反三的发散思维以及小组合作的能力。

七. 板书设计（见表 16）

表 16 板书设计

黑板区域 1	白板区域	黑板区域 2
4. 4. 3 不同函数增长的差异 ①三种函数的单调性： ②一次函数增长速度： ③指数函数增长速度： ④对数函数增长速度： ⑤三个函数的增长差异比较：	投射 PPT 及网络画板界面	习题讲解区域

第五章 基于网络画板的函数单调性教学效果调查分析

5.1 调查设计

5.1.1 调查目的与假设

实验目的：通过对照教学实验，验证使用网络画板辅助函数单调性的教学模式是否比传统教学模式在教学上更加有效果，更有利于学生学习兴趣、思维能力和数学核心素养的培养。

实验假设：基于网络画板的函数的单调性教学模式比传统教学模式的教学效果更好，更有利于学生学习兴趣、思维能力和数学核心素养的培养。

5.1.2 调查对象

高一年级是学生学习函数的关键时期，学生对于数学的学习开始从具体转向抽象，对于概念的描述开始由文字语言转为符号语言，函数的单调性是初中与高中衔接的知识点，也是高一年级所学的函数基本性质的其中一个，所以初步选择海南 H 高中高一年级学生作为研究对象。又通过班级分配规律以及高一 A 班和高一 B 班两个班级实验前不久的第一次月考成绩，发现两个班级的月考测验成绩基本相近，在全年级均属于上层水平，基础差异较小。最终决定将 H 中学的高一 A 班和高一 B 班作为实验对象，高一 A 班作为实验班，共 46 人，高一 B 班作为对照班，共 47 人，其中对照班采用传统的教学模式（无数学工具性软件辅助）进行教学，实验班使用网络画板进行辅助教学。

5.1.3 调查方法

本次实验通过对学生进行问卷调查和成绩测试，以及对教师进行访谈，将所得的结果进行定性与定量分析，了解学生和教师对于使用网络画板进行中学数学教学的态度与看法。通过对两个班的测试卷和对学生问卷调查的数据结果进行定性分析，了解使用网络画板进行教学和传统教学的教学效果差异性，了解网络画板的辅助教学是否有助于培养和提高学生数学核心素养，是否能提升学生数形结合等数学能力。

5.1.4 实验变量

自变量：是否使用网络画板进行辅助教学。

因变量：两个班级在实验后的测试成绩差异。

表 17 实验变量

控制变量	内容
授课教师	同一个教师
教学时长	授课时长一致（2 个课时）
教学内容	高中数学人教 A 版《3.2.1 函数的单调性》 高中数学人教 A 版《4.4.3 不同函数增长的差异》
考试环境	考试环境一致
测试卷内容	函数的单调性测试卷

5.1.5 研究工具

实验所需的研究工具有前测试卷、后测试卷和调查问卷。前测试卷为高一年级的第一次阶段考试卷，共 22 道题，满分 150 分，考试内容为高一数学人教 A 版必修一的第一章、第二章和第三章第一节，主要涉及集合、不等式和函数的概念。后测试卷为《函数的单调性测试卷》，共 13 道题，满分 100 分，涉及单调性的概念、利用单调性求参数范围、利用单调性求特殊值、求单调区间和单调性解决不等式等题型。调查问卷由 20 道题组成，初步划分为四个部分：网络画板辅助学习的学习态度、对知识的理解、数学核心素养的培养和学习效果。

5.2 课例实施过程

5.2.1 《函数的单调性》教学片段实录和教学反思

一、教学片段实录

（一）情境导入

师：同学们，之前我们学习了函数的定义及其表示法，知道函数 $y = f(x), x \in A$ 描述了客观世界中变量之间的一种对应关系。今天起，我们要进一步学习函数，研究函数的性质，如随着自变量的增大函数值是增大还是减小，有没有最大值或最小值，函数图象

有什么特征等，通过研究函数的变化规律来把握客观世界中事物的变化规律，利用函数“预测未来”。

师：请同学们看 PPT 上的这个图，它是某地某日一天 24 小时内气温随时间变化的曲线图。在这个图里面，温度与时间构成函数关系吗？为什么？

生：是函数，因为温度与时间满足函数的定义。

师：很好，那大家仔细观察一下这个图，你们可以发现什么信息？

生 1：我们可以知道最低温大概是 23 度，最高温是 32 度。

生 2：温度有上升有下降。

师：没错，这都是我们可以从图上了解的信息，除此之外，我们还可以知道每个时刻大概的温度。大家再看一下 PPT 上问题 2 的图，它是著名的“艾宾浩斯遗忘曲线”图，描述的是记忆量与时间的关系，那这里的记忆量与时间构成函数关系吗？在这个图上大家又可以发现什么呢？

生 1：它们也满足函数的定义，所以二者也构成函数的关系。

生 2：从图上可以知道随着时间的增加，记忆量逐渐减少。

师：同学们总结的很恰当。大家再观察一下这个图，还能发现记忆量随时间推移是开始下降快，后续下降慢，这也告诉大家要养成及时复习的习惯，这样才能避免所学知识快速遗忘。

师：上述的函数图象的升与降、最高点、最低点等都是函数性质在图象上的反映，除此之外，函数还有许多其它的性质。那如何用数学的观点来解释：温度随时间的上升或下降、“艾宾浩斯遗忘曲线”从左至右是逐渐下降的？大家今天学习完“函数的单调性”就能够解决。

（二）新知探究

师：大家先看 PPT，阅读一下本节课的课标要求和素养目标（学生齐读）。

师：对于函数从左到右图象上升或者下降的变化规律，我们称为“函数的单调性”。其实同学们在初中就对这种性质有一定的认识，但是没有严格的定义，今天我们的学习目标就是建立函数单调性的严格定义，并学会用符号语言刻画函数的单调性。下面请同学们在同一个坐标系上画出函数 $f(x)=x+2$, $f(x)=x^2$, $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象。（教师巡视学生作图情况，ppt 逐一展示网络画板所绘图象，见图 26）

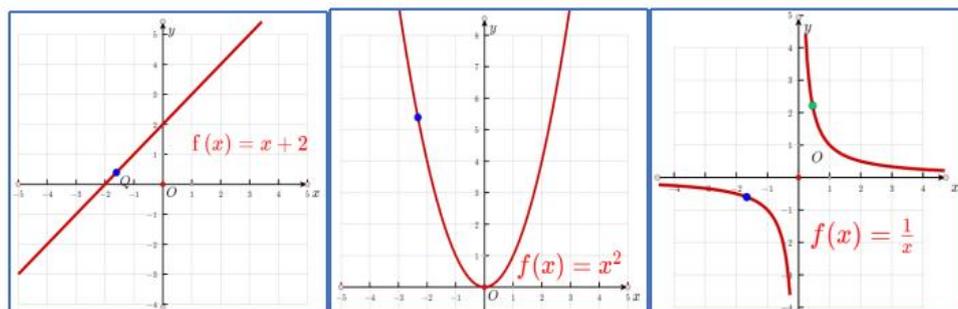


图 26 三个函数的图象

师：大家的画图都没有问题。那从左往右看它们的变化趋势是怎样的？

生：函数 $f(x) = x + 2$ 上升， $f(x) = x^2$ 先上升后下降， $f(x) = \frac{1}{x}$ 是下降，然后又下降。

师：上述是图象的特征，那大家可以再用函数的自变量与函数值的关系描述图象从左至右的变化规律吗？

生 1：函数 $f(x) = x + 2$ ，从左往右看函数值随 x 的增大而增大。

师：这位同学描述的不错，但是我认为我们在描述时还应该加上自变量的范围，这样的描述才能更清楚图象变化的范围。所以我们可以说函数 $f(x) = x + 2$ ，在定义域内函数值随 x 的增大而增大。大家再描述一下剩下两个。

生 2：函数 $f(x) = x^2$ ，它在 $x \geq 0$ 时，函数值随 x 的增大而增大，在 $x \leq 0$ 时，函数值随 x 的增大而减小。

生 3：函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，它在 $x > 0$ 时，函数值随 x 的增大而减小，在 $x < 0$ 时，函数值随 x 的增大而减小。

（教师在学生描述之后展示 PPT 上的答案，进行复述）

师：以上我们是使用文字语言进行描述，那如何用符号语言描述函数图象的变化趋势呢？接下来不妨以函数 $f(x) = x^2$ 为例进行探究。大家先看 y 轴左侧的图象，我们如何用符号语言描述函数 $f(x) = x^2, x \in (-\infty, 0]$ 时，函数值随 x 的增大而减小呢？

师：现在自变量的取值范围已经是符号语言了，我们还需要把哪些文字语言转化成符号语言呢？

生：函数值随 x 的增大而减小。

师：没错，就像现在网络画板展示的动态图象，见图 27，在 y 轴左侧从左往右看，

x_1 在逐渐增大，而 $f(x_1)$ 呢？

生：在逐渐减小。

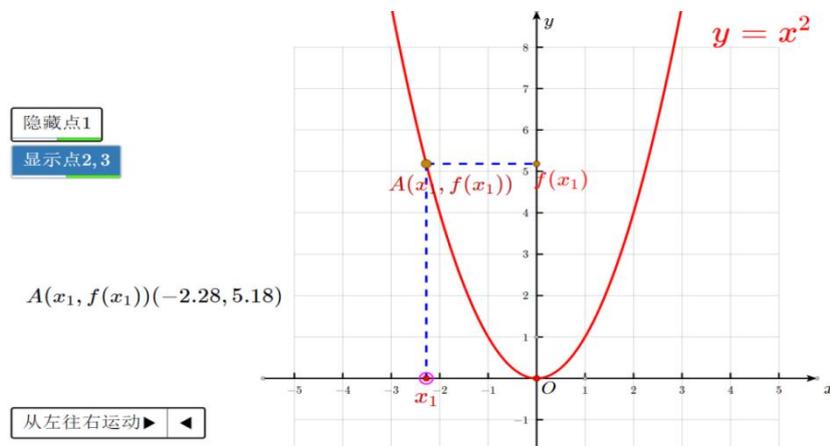


图 27 网络画板展示单个点自变量与函数值变化

师：只从一个点，我们无法很好的用语言进行表示，但是我们知道增大或减小其实就是一个比较的过程，我们不妨把所有的点进行两两比较。比如现在网络画板展示的动态图象，见图 28，将 A 点移到 B 点再移到 C 点，它们的自变量与函数值是如何变化的？

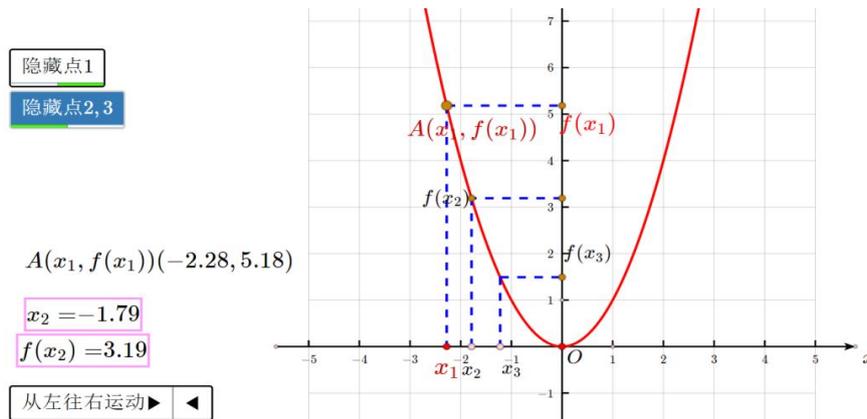


图 28 网络画板展示多个点描述自变量与函数值变化

生：自变量由 x_1 到 x_2 再到 x_3 ，函数值由 $f(x_1)$ 到 $f(x_2)$ 再到 $f(x_3)$ 。

师：说的不错，那它们是不是就可以用大小关系进行比较呢？

生：对，那就是 $x_1 < x_2 < x_3$ ， $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ 。

师：通过这样一种大小比较过程，我们就可以把这个函数左侧上的点的自变量增大和函数值减小的过程全部表示出来，也就有：函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 中有无数的自变量 x ，使得当 $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ ，有 $0 < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(x_n) < \dots$ 。大家觉得还有什么需要补充吗？

生：感觉说一下结论更好。

师：所以我们再最后再强调一下：“此时有函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上递减”。大家看一下 PPT 上这句话就是大家总结出来的符号语言，它的确包含了我们之前文字语言里面的所有信息，但是整个比较的过程却是无限的，而我们数学追求的是精简，也就是精确且简洁的话语，那我们能否把上面的符号语言进行简化呢？

师：我看大家都有点迷茫，那请同学们思考一下，我们在第一章学习了全称量词的“任意”，那现在要求所有点做比较，是不是也就是任意点作比较？那能不能说是范围内任意的两个点做比较呢？

生：可以，“任意”就有“所有”的意思。

师：没错，所以大家认为符号语言现在可以怎样描述呢？

生：函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 中有任意自变量 x_1, x_2 ，当 $x_1 > x_2$ ，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，此时有函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上递减。

师：同学们描述的很棒，把过程与结果都表述出来了，但是这个函数值减小我们是不是通过图象观察得出的，那大家思考一下有没有其它方式证明呢？

生：可以利用作差法证明。

师：那这个证明就留给你们课后完成，同时也请大家思考一下还有没有其它方法呢？

师(PPT 给出, 见图 29): 所以符号语言就是“对函数 $f(x)=x^2$ ，任意取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ，得到 $f(x_1)=x_1^2, f(x_2)=x_2^2$ ，那么当 $x_1 > x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ 。”而这几个划线的部分也是我们理解与记忆的关键：自变量范围、自变量变化过程、函数值变化过程和单调性结果。

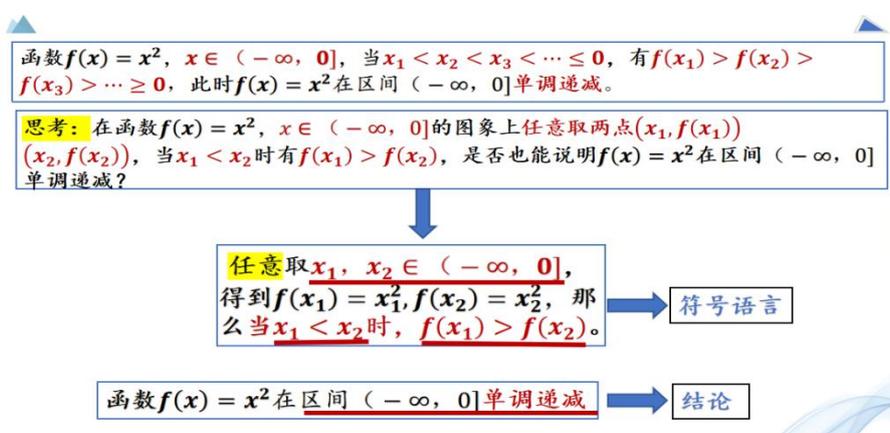


图 29 函数单调性符号语言 PPT

师：请同学们好好理解这句话并完成 PPT 上相应表格，见图 30。（教师先带领学生回答表格左侧的填空，后教师点名请学生回答表格右侧的填空）

生：

	$f(x) = x^2, x \leq 0$	$f(x) = x^2, x \geq 0$
图像特征	图象在y轴左侧部分从左到右是下降的。	图象在y轴右侧部分从左到右是上升的。
文字语言	y随x的增大而减小	y随x的增大而增大
符号语言	任意取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ，得到 $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$ ，那么当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) > f(x_2)$ 。	任意取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，得到 $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$ ，那么当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ 。
结论	函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是 单调递减 的。	函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是 单调递增 的。

图 30 函数单调性表格

师：下面我再来考验一下大家，请同学们仿照函数 $f(x) = x^2$ 单调性的讨论方法，叙述一下函数 $f(x) = |x|$ 的单调性。

生（两个学生回答，见图 31）：

对函数 $f(x) = x $ ，任意取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ，得到 $f(x_1) = x_1 , f(x_2) = x_2 $ ，那么当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) > f(x_2)$ ，函数 $f(x) = x $ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上 单调递减 。
对函数 $f(x) = x $ ，任意取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，得到 $f(x_1) = x_1 , f(x_2) = x_2 $ ，那么当 $x_1 < x_2$ 时， $f(x_1) < f(x_2)$ ，函数 $f(x) = x $ 在区间 $[0, +\infty)$ 上 单调递增 。

图 31 学生回答例题

师：两位同学都回答的很准确，这也说明同学们基本掌握了用符号语言描述函数的单调性。但是上面都是特殊的例子，那下面请大家看 PPT 上两个一般的函数，见图 32，小组讨论得出函数单调性的定义。



图 32 增函数与减函数图象

师：大家只要注意抓住刚刚强调的要点，那么答案也就呼之欲出了。老师先定义一下：一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 I 包含于 $D(I \subseteq D)$ ，这个区间 I 也就是函

数递增或递减的自变量范围。

生 1: 如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 我们就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增^[9]。

生 2: 如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减^[9]。

师 (教师播放 PPT 并口述): 同学们总结的非常到位, 这就是我们函数单调性的定义。同样地, 还有几个概念需要强调: 特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的整个定义域 D 上单调递增时, 我们就称它为增函数, 当函数 $f(x)$ 在它的整个定义域 D 上单调递减时, 我们就称它为减函数。如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有 (严格) 单调性, 区间 I 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间^[9]。

师: 在这里概念比较多, 我们需要牢记增函数和减函数是针对整个定义域而言的, 而单调递增和单调递减是针对单调区间而言的。

二、教学反思

本次教学主要是以教师为主导, 学生为主体, 通过生活的案例与函数的单调性产生联系, 再利用网络画板的动态图象结合特殊的函数例子带领学生层层深入, 由图象特征到文字语言再到符号语言, 最终总结得到函数单调性的一般概念。符号语言是学生进入高中以来需要逐步掌握的知识, 通过符号语言的深化能有效培养学生的数学抽象核心素养和分析概括能力。

在整个教学过程中, 实验班学生的积极性和主动性都很不错, 通过使用网络画板进行引导式教学, 学生能更加注意到概念中对取点的要求, 也能更快的总结出符号语言并进行概括。从课堂反映中能看出实验班的学生对于网络画板教学的方式感兴趣, 也能更多的把目光投入黑板上。在提问时也知道学生对知识点有大致的掌握, 对函数单调性的描述和概念有了深入的理解和记忆。通过两个班级的对比上课, 教师能感受到利用网络画板展示动态性的过程的确更能激发学生学习和探究的欲望, 且更有利于学生对知识的逐步探究与思考, 但是后续也需要教师对学生的知识点进行及时的考察与复习, 避免学生对知识点的遗忘。

5.2.2 《不同函数增长的差异》教学片段实录和教学反思

一、教学片段实录

(一) 情境导入

师：在 4.2.1 的例 2 中提到了 A, B 两地的旅游收入，我们知道 A, B 两地的收入变化情况分别呈现一次函数的增长与指数函数的增长，虽然这两个函数在问题中都是呈现单调递增的性质，但是因为函数的差异，其增长情况也存在不同。而在我们的生活中，不同的现实问题会有不同增长规律的反映，因此，把握好不同增长函数的变化规律对我们选择合适的数学模型以及刻画现实问题具有重大的意义。今天就让我们一起研究一次函数、指数函数和对数函数的增长差异。

师：同学们，你们认为该怎样研究一次函数、指数函数和对数函数的增长差异呢？会从它们的哪些地方入手呢？

生 1：我们可以观察它们的图象，根据图象变化看它们的增长情况。

生 2：可以先看函数的单调性和奇偶性，判断它们是递增还是递减的。

师：同学们给的方法都很好，我们可以从性质入手，也可以从图象入手。同样的，我们其实还可以从变化率入手。那老师先和大家解释一下什么是变化率：变化率它构成一种线性函数，是指在自变量的一定范围内，函数值变化量与自变量变化量的比值。比如函数 $y = 2x$ ，它的自变量取 1 至 3 的变化范围，自变量的变化量就是 $3 - 1 = 2$ ，那大家思考一下它的函数值变化范围是什么呀？函数值的变化量又是什么？

生：函数值的变化范围是 2 至 6，所以函数值的变化量是 $6 - 2 = 4$

师：没错，所以在这个自变量的范围内，我们的变化率就是函数值的变化量除以自变量的变化量，也就是 $\frac{4}{2} = 2$ 。大家再思考，如果我这个变化率越大，这个图象会怎样变化？

生：图象会越来越陡，因为函数值变得更大了。

师：很好，那下面请同学们回顾一下网络画板的基本操作，自己利用网络画板在同一个坐标系上绘制一下 $y = kx(k > 0)$; $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$; $y = \log_b x(b > 0, b \neq 1)$ ，这三个一般的函数图象。（教师在学生绘制的过程中，下台巡视学生的绘制情况，并给予指导）。

师：老师在巡视过程中发现，同学们大多数都能绘制出一次函数、指数函数图象，对于对数函数的一般图象却难以下手。老师不妨提示大家从反函数出发，利用指数函数与对数函数的关系绘图，比如 $y = \log_4 x$ 可以用 $x = 4^y$ 表示。

生:

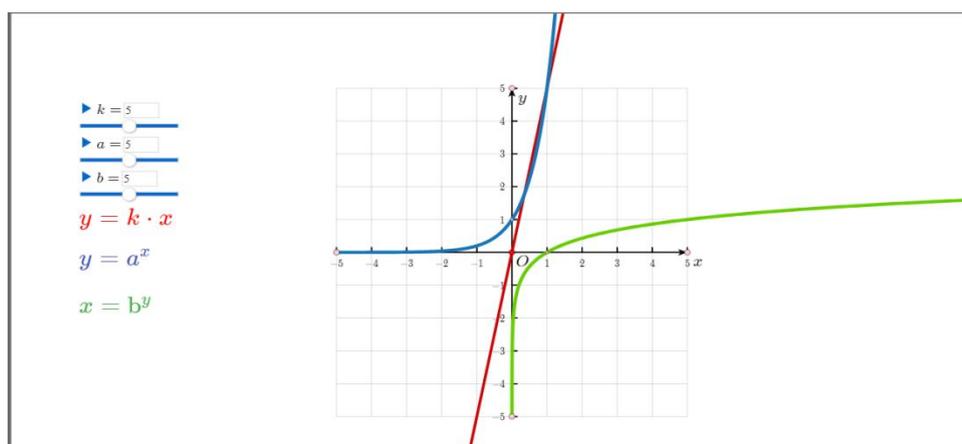


图 33 学生绘图情况

(二) 新知探究

师: 我们先来探索一次函数与指数函数的增长差异情况, 我们不妨选取都是单调递增的函数图象来进行研究, 看它们在 $[0, +\infty)$ 区间上的变化规律与差异, 比如:

$y = kx (k > 0)$, $y = a^x (a > 1)$, 观察刚刚绘制的图象它们的变化规律是怎么样的?

生 1: 函数 $y = kx (k > 0)$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上增长速度不变。

生 2: 函数 $y = a^x (a > 1)$, 在区间 $[0, +\infty)$ 上增长速度有变化, 先慢后快。

师: 从上面看, 两种函数的增长速度的确存在差异, 那具体是怎样的呢? 我们不妨先从特殊的例子入手。请同学们以函数 $y = 2x$, $y = 2^x$ 为例, 利用网络画板计算器 (见图 34) 完成 PPT 上自变量与函数值的对应表格。(教师先展示网络画板的计算器, 见图 34, 再巡视学生计算情况, 并请学生回答计算情况, 见表 17)



图 34 网络画板计算功能展示

生:

表 18 学生因变量计算情况

x	$y = 2x$	$y = 2^x$
0	0	1
0.5	1	1.414
1	2	2
1.5	3	2.828
2	4	4
2.5	5	5.657

师：接下来再请同学们用网络画板在同一坐标系下画出这两个函数的图象，并且注意自变量的取值范围我们规定了只看 $[0, +\infty)$ 的。

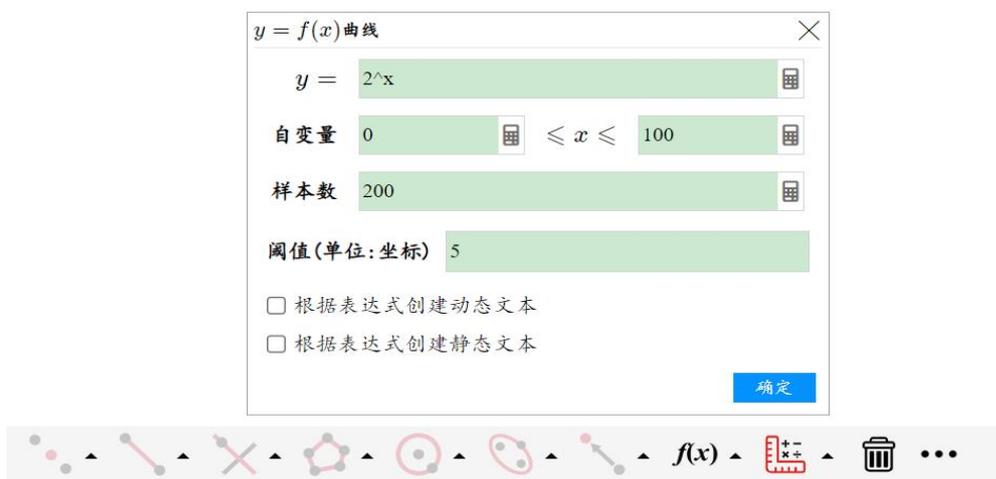
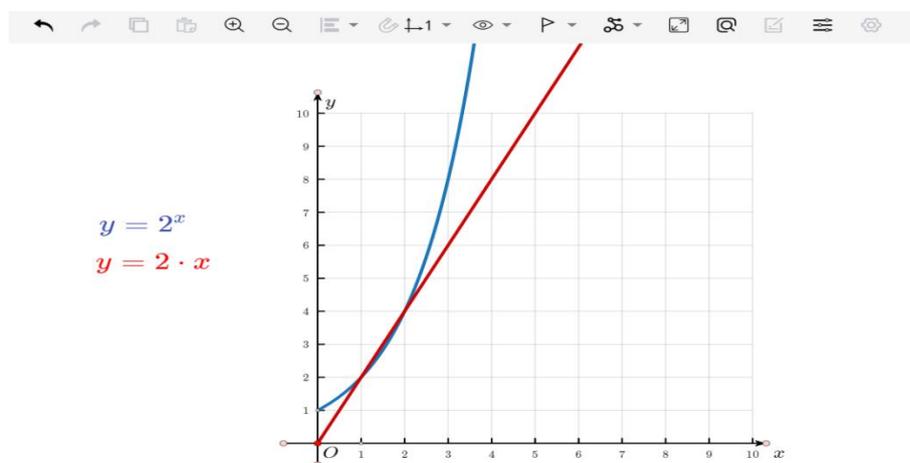


图 35 网络画板控制函数自变量取值范围展示

生：

图 36 学生绘制的 $y = 2x, y = 2^x$ 函数图象

师：同学们，观察函数 $y = 2x$, $y = 2^x$ 的函数图象，从左往右看，在区间 $[0, +\infty)$ 上它们的位置有什么关系？有无特殊点？你们可以发现什么？

生 1：函数 $y = 2x$, $y = 2^x$ 的图象有两个交点 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $y = 2x$ 的一直匀速增长， $y = 2^x$ 在变速增长。

生 2：两个交点将区间 $[0, +\infty)$ 分成了三段，函数图象位置在这三段存在差异： $[0, 1)$ 函数 $y = 2^x$ 图象在上面， $(1, 2)$ 函数 $y = 2^x$ 图象在上面， $[2, +\infty)$ 函数 $y = 2^x$ 图象在上面。

师：同学们观察的很仔细，描述也很准确。这的确是我们从图象上可以发现的信息，从上我们也能看出两个函数的增长情况是不一样的。但数学追求严谨，只靠图象说话是不够的，我们还得看数据，那接下来我们再利用变化率来看看它们的增长情况究竟是怎样的呢？请同学们快速完成出 PPT 上的变化率表格。

生（利用网络画板计算功能计算出表 19 结果）：

表 19 变化率

x	$y = 2x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$y = 2^x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	0	2	1	
0.5	1		1.414	0.828
1	2		2	1.172
1.5	3		2.828	1.656
2	4		4	2.344
2.5	5		5.657	3.314

师：从表格数据看，它们的变化率和增长情况分别是怎样的呢？

生 1：函数 $y = 2x$ 的变化率保持不变，所以它的增长速度不变。

生 2：函数 $y = 2^x$ 的变化率越来越大，所以增长速度越来越大，增长由慢到快。

师：从图象和表格我们知道，随着自变量的增大，函数 $y = 2x$ 的图象保持原来的增长速度不变，而函数 $y = 2^x$ 的增长速度越来越快，甚至慢慢超过函数 $y = 2x$ 。那大家思考两个函数会不会存在第三个交点呢？或者说，后续 $y = 2x$ 的增长速度会不会超过 $y = 2^x$ 呢？

生：不会，因为 $y = 2^x$ 的增长速度越来越快， $y = 2x$ 的增长速度不变。

师：请同学们以小组为单位，利用网络画板再次绘制其它的一次函数与指数函数，当 k, a 两个参数取不同值时，它们的增长情况又如何？

不同小组绘图情况，见图 37：

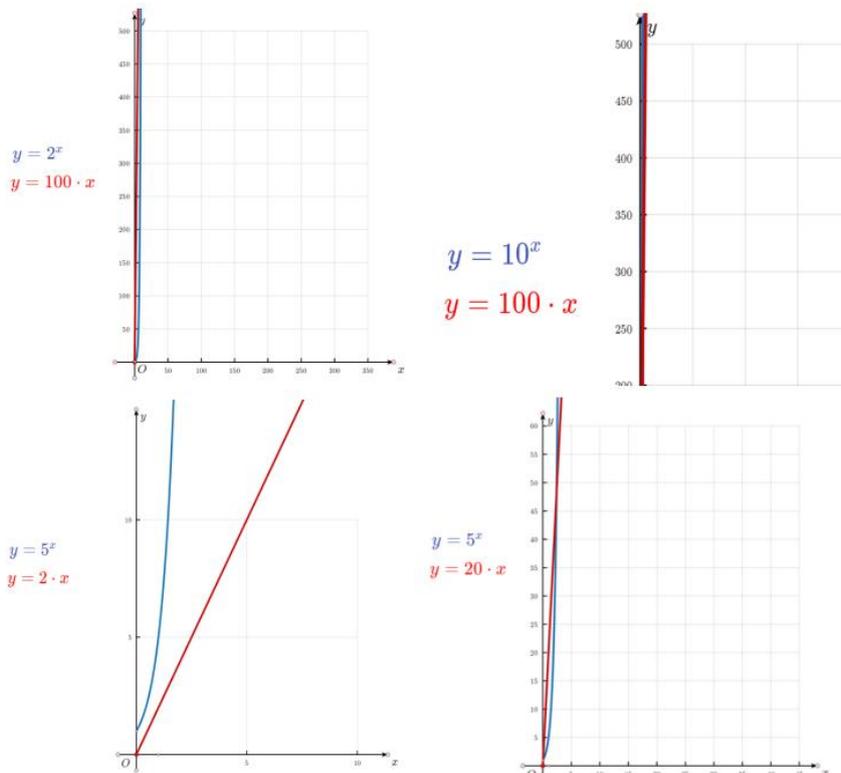


图 37 不同小组绘图情况

师：现在大家一起观察你们绘制的图象，它们的增长情况是怎样的呢？几个图象有什么相同点或不同点吗？（请不同小组学生进行回答）

生 1：无论一次函数的系数有多大，最终指数函数的图象都会比一次函数图象高。

生 2：一次函数与指数函数在小范围内的增长速度差异比较小，但是在范围内的增长速度差异很大。

生 3：一次函数的增长速度始终不变，指数函数的增长速度在不断增大，并且系数越大，它们的增长速度越大。

师：大家总结的很棒，从各种特殊的函数图象中大家发现了一次函数与指数函数增长的特点。那对于一次函数的增长我们一般称为“直线上升”，而指数函数的增长称为“指数爆炸”，因为它的增长速度到后续是十分惊人的。我们可以用合适的文字语言描述这两种函数的增长关系：一般地，指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 与一次函数 $y = kx (k > 0)$ 的增

长差异与上述情况类似。即选取的 k 值即使远远大于 a 值，函数 $y = a^x (a > 1)$ 的增长速度最终也会远远超过一次函数的增长速度 $y = kx (k > 0)$ 。大家能否用适当的符号语言进行描述呢？

生： $\exists x_0, x > x_0, kx < a^x (a > 1, k > 0)$ 恒成立（教师随之进行板书）。

师：从上我们可知影响指数函数增长速度的因素是底数 a ，影响一次函数增长速度的因素是系数 k 。那对数函数与一次函数的关系又是怎样的呢？指数函数、对数函数、一次函数三种函数的关系又如何呢？请同学们以小组为单位，按照今天的讨论思路，尝试讨论交流，并再下次进行过程展示和结果汇报。

二、教学反思

本次教学主要是以教师引导，学生自主探究的模式进行，在教学过程中，实验班的学生的情绪和注意力是集中且积极的，他们根据课堂安排的教学任务采用网络画板进行自主探究和实验，再根据实验结果总结归纳得出不同函数增长的特点。对比对照组班级的授课情况，对照组学生几乎是根据教师的提示和课本得出结论，并且他们对于结论中三种函数的增长比较情况的给出也存在疑惑，希望教师可以画出图象给出解答。而实验班的学生是自己由特殊函数探究到一般情况，并且他们在课堂中面对无法解答的问题也能马上进行小组讨论或寻求教师的指导，整体的教学氛围和讨论结果都达到了良好的效果，也得出了相应的结论，虽然自主探究进度较慢，无法做到三个探究全部完成，但是学生也掌握了网络画板操作方式和探究思路，在这个过程中学生的数学核心素养和数学能力也得到相应提高。存在问题是此类的课堂纪律并不好把控，学生在讨论过程中需要多次加以提醒纪律问题，并且需要掌握学生情况，对学生有节奏性的安排学习任务，保证每一位学生的思绪都停留在课堂之中。因此教师在面对今后的探究性课堂，还应该精准把握教材内容，让学生提前熟悉网络画板操作，做到在课堂时间内完成相应的教学内容。

5.3 课例实施效果分析

5.3.1 实验前测成绩分析

为保证选取的实验班与对照班两个班级的学生学习水平一致，控制实验变量，笔者在实验前对两个班级的学生的第一次阶段考试成绩进行数据分析，并通过 SPSS 26.0 软

件进行独立样本 t 检验, 检验两个班级学生的学习水平是否存在显著差异, 数据情况如表 20 和表 21 所示。

表 20 实验前测两个班考试成绩平均值

	班级	个案数	平均值	标准差	标准误差平均值
实验班	A	46	122.0435	15.02436	2.21522
对照班	B	47	118.4468	19.53459	2.84941

从表格 20 信息可知, 第一次阶段考中, 实验班 A 班的平均成绩为 122.0435, 对照班 B 班的平均值为 118.4468, 从总分 150 分来看, 两个班级的平均分相差并不大。又因为两个班级个案数接近, 为进一步确定两个班是否适合为研究对象, 对两个班级成绩进行独立样本 t 检验, 检验结果如表 21。

表 21 实验前测考试成绩独立样本 t 检验

独立样本 t 检验									
莱文方差等同性检验					平均值等同性 t 检验				
	F	显著性	t	自由 度	显著性 (sig)	平均值 差值	标准误差 差值	差值 95%置信区间 下限	上限
假定等 方差	2.07 6	.153	.994	91	.323	3.59667	3.61929	-3.59260	10.78594
不假定 等方差			.997	86.2 15	.322	3.59667	3.60921	-3.57794	10.77128

根据表格数据分析可知, 运用莱文方差等同性检验两个班的阶段考成绩, 发现显著性为 0.153, 远远大于 0.05, 说明两个班级的前测成绩无明显差异。再看平均值等同性 t 检验, 发现其显著性为 0.323, 也大于 0.05。由此可知, 两个班的前测成绩的独立样本 t 检验不存在显著性差异, 因此说明两个班级在实验前的成绩不存在显著差异, 故可以选择两个班级作为实验组和对照组进行教学实验。

5.3.2 实验后测成绩分析

为检验使用网络画板的辅助教学模式和传统教学模式的教学效果是否存在差异, 教学实验结束后, 利用编制的函数的单调性测试卷对实验班和对照班的学生进行测试, 测试卷包含单调性的概念、利用单调性求参数范围、利用单调性求特殊值、求单调区间和单调性解决不等式等题型, 每个题目都涉及对学生核心素养培养方面的考察(见表 22),

通过后测试卷情况可以了解学生的学习效果以及对数学核心素养的培养情况。

表 22 后测试卷题目对学生数学核心素养的培养

题号与题型	数学核心素养的培养
1 (函数单调性概念)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
2 (利用单调性求特殊值)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
3 (利用单调性求参数范围)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
4 (利用单调性求特殊值)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
5 (利用单调性求参数范围)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
6 (利用单调性求最值)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
7 (利用单调性求参数范围)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
8 (利用单调性解不等式)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
9 (利用单调性求单调区间)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
10 (利用单调性求单调区间)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
11 (利用单调性求参数范围)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
12 (求特殊值、解不等式)	数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理
13 (定义证明、求值域)	数学抽象、数学运算、逻辑推理、数学建模

并在测试后对两个班测试所得的成绩利用 SPSS 26.0 进行数据分析和独立样本 t 检验, 数据情况如表 23 和表 24 所示。

表 23 实验后测两个班考试成绩平均值

	班级	个案数	平均值	标准差	标准误差平均值
实验班	A	46	71.3261	13.24312	1.95259
对照班	B	47	64.5957	12.79208	1.86592

从表格信息可知, 在实验后的测试中, 满分 100 分的测试卷, 实验班 A 班的平均成绩为 71.3261, 对照班 B 班的平均值为 64.5957, 从分数差距看可认为两个班级的平均分存在差异, 再进一步观察两个班级成绩的独立样本 t 检验, 检验结果如表 24。

表 24 实验后测考试成绩独立样本 t 检验

独立样本 t 检验								
莱文方差等同性检验					平均值等同性 t 检验			
F	显著性	t	自由度	显著性 (sig)	平均值差值	标准误差差值	差值 95%置信区间 下限	上限

假定等 方差	.019	.892	2.493	91	.014	6.73034	2.69977	1.36758	12.09311
不假定 等方差			2.492	90.7	.013	6.73034	2.70079	1.36533	12.09536
				12					

根据表 24 数据分析可知,运用平均值等同性 t 检验,发现其显著性为 0.014,小于 0.05。由此可知,两个班的后测成绩的独立样本 t 检验存在显著性差异,因此说明两个班级在实验后的成绩存在显著差异,即实验班在使用网络画板进行函数单调性的教学之后,成绩有所提升,因此可以认为使用网络画板辅助函数的单调性教学有助于提升教学效果。再根据表 22 中对后测试卷中不同题型对学生数学核心素养培养方面的考察可知,使用网络画板辅助函数单调性的教学有助于学生数学核心素养的培养。

5.3.3 学生问卷调查

一、信效度分析

为了保证编制的调查问卷的可靠性与真实性,采用 SPSS 26.0 软件对调查结果进行信度和效度分析,分析结果如表 25 和表 26:

表 25 问卷信度

可靠性分析					
	项数	样本量	克隆巴赫 Alpha	基于标准化项的克隆巴赫 Alpha	
对照班	20	94	.948	.950	

根据表 25 数据可知,克隆巴赫 Alpha 系数为 0.948,数值大于 0.8,说明该调查问卷信度较高,检测结果具有可靠性。

表 26 问卷效度

KMO 和巴特利特检验		
KMO 取样適切性量数		.882
巴特利特球形度检验	近似卡方	1430.254
	自由度	190
	显著性	.000

根据表 26 数据可知,KMO 数为 0.882,数值大于 0.7,且巴特利特球形度检验的显著性为 0,说明该调查问卷的效度合格。因此可以对该问卷做探索性因子分析,并根据分析结果对问卷维度进行划分。

二、问卷结果分析

为了解实验后实验班级的学生对于教师使用网络画板辅助教学的态度,更加明确使用网络画板教学的方式是否有效,编制了网络画板使用满意度的调查问卷进行调查,并采用 SPSS 26.0 软件对调查问卷的结果进行数据分析。此次问卷通过纸质问卷进行线下发放,共发放问卷 94 份,回收有效问卷 94 份,问卷回收率与有效率皆为 100%。本次问卷一份共有 20 题,对问卷进行探索性因子分析后,按照分析结果,对题目进行维度划分,总共分为四个维度,并按照题目维度,对问卷进行描述性统计和独立样本 t 检验,将结果进行展示与分析,具体数据见表 27 至表 30:

(一) 对使用网络画板辅助教学的态度(见表 27)

表 27 使用网络画板辅助教学的态度情况

题目	选项	频数	百分比	男女性别差异
1. 你喜欢老师使用网络画板进行数学教学吗?	非常喜欢	43	45.7	sig=0.001
	喜欢	31	33.0	小于 0.05, 有差异
	一般	19	20.2	
	不喜欢	0	0.0	
	非常不喜欢	1	1.1	
2. 你认为教师使用网络画板进行教学, 课堂会更有趣吗?	非常认可	42	44.7	sig=0.022
	认可	37	39.4	小于 0.05, 有差异
	一般	14	14.9	
	不认可	0	0.0	
	非常不认可	1	1.1	
3. 你认为教师使用网络画板进行教学能够提升你对数学的学习兴趣吗	非常能	38	40.4	sig=0.006
	能	29	30.9	小于 0.05, 有差异
	一般	25	26.6	
	不能	1	1.1	
	非常不能	1	1.1	
4. 你认为网络画板做出来的函数图象会更加直观、易懂吗?	非常认可	51	54.3	sig=0.005
	认可	38	40.4	小于 0.05, 有差异
	一般	4	4.3	
	不认可	0	0.0	

	非常不认可	1	1.1	
6. 你是否希望老师在今后的教学中继续使用网络画板?	非常希望	42	44.7	sig=0.006
	希望	33	35.1	小于 0.05, 有差异
	一般	17	18.1	
	不希望	2	2.1	
	非常不希望	0	0.0	

第 1 题和第 6 题用于了解学生对使用网络画板进行数学教学的态度, 从表格 26 数据可知, 对第 1 题有 45.7% 的人非常喜欢使用网络画板进行教学的教学模式, 但是也有 1.1% 的人非常不喜欢这种教学模式。对第 6 题, 可以看出有 44.7% 的人非常希望教师可以在今后继续使用网络画板进行教学, 但是也存在 2.1% 的人不希望使用网络画板进行教学。由此可知, 绝大多数学生都喜欢并赞同使用网络画板进行数学教学的授课模式, 因此学校可以针对教师情况组织相关的网络画板操作培训, 而教师也应该发展创新思维, 尝试将网络画板融入更多的教学内容。同时, 对于个别同学不赞成的情况, 也需要教师进一步的改善自身网络画板教学模式, 引导学生尝试操作网络画板并爱上网络画板。

第 2 题和第 3 题了解学生对使用网络画板学习的兴趣, 从表格可知, 分别有 44.7% 和 40.4% 的学生对网络画板非常感兴趣, 同时也有 1.1% 和 2.2% 的学生对网络画板不感兴趣。兴趣是学生学习的动力源泉, 教师要重视学生学习兴趣的培养, 了解和分析学生不感兴趣的原因, 及时帮助学生解决学习困难和问题。

同时对上述问题进行独立样本 t 检验, 了解男女同学对使用网络画板辅助教学的态度, 可知男女同学在使用网络画板辅助教学的态度上具有较大差异。

(二) 对知识的理解 (见表 28)

表 28 网络画板辅助知识理解情况

题目	选项	频数	百分比	男女性别差异
5. 你认为用网络画板教学能使你对函数单调性的概念理解更深刻吗?	非常能	47	50.0	sig=0.003
	能	37	39.4	小于 0.05, 有差异
	一般	8	8.5	
	不能	2	2.1	
	非常不能	0	0.0	
7. 你认为网络画板能够帮助你分析函数图象的动态变化规律吗?	非常能	48	51.1	sig=0.095
	能	39	41.5	大于 0.05, 没有差异

	一般	7	7.4	
	不能	0	0.0	
	非常不能	0	0.0	
8. 你认为网络画板能帮助你更好理解函数单调性的相关知识吗?	非常能	47	50.0	sig=0.024
	能	37	39.4	小于 0.05, 有差异
	一般	10	10.6	
	不能	0	0.0	
	非常不能	0	0.0	

由表 28 数据可知, 第 5 题和第 8 题用于了解学生使用网络画板学习函数单调性的情况, 其中都有 50%和 39.4%的学生认为使用网络画板进行函数单调性的教学非常有帮助或者有帮助。同时在使用网络画板进行函数单调性教学方面, 根据独立样本 t 检验可知不同性别的学生具有显著的差异性。

第 7 题了解网络画板对分析动态变化规律的情况, 可知有 51.1%的学生认为使用网络画板有利于分析动态变化规律, 由此也反映了网络画板对于学生的数学学习有帮助。

(三) 数学核心素养和数学能力的培养 (见表 29)

表 29 网络画板教学对数学核心素养和能力的培养情况

题目	选项	频数	百分比	男女性别差异
9. 你认为教师使用网络画板可以加强你的分析能力和观察能力吗?	非常能	43	45.7	sig=0.099
	能	30	31.9	大于 0.05, 没有差异
	一般	18	19.1	
	不能	3	3.2	
	非常不能	0	0.0	
10. 你认为教师使用网络画板可以加强你的独立思考能力吗?	非常能	29	30.9	sig=0.062
	能	28	29.8	大于 0.05, 没有差异
	一般	31	33.0	
	不能	6	6.4	
	非常不能	0	0.0	
11. 你认为使用网络画板呈现动态图象能帮助你探究、解决问题吗?	非常能	45	47.9	sig=0.809
	能	32	34.0	大于 0.05, 没有差异
	一般	17	18.1	

	不能	0	0.0	
	非常不能	0	0.0	
12. 你认为使用网络画板进行教学能帮助你更好地理解图象特征吗?	非常能	48	51.1	sig=0.334
	能	36	38.3	大于 0.05, 没有差异
	一般	9	9.6	
	不能	1	1.1	
	非常不能	0	0.0	
13. 你认为教师使用网络画板教学能帮助你更容易发现数学规律吗?	非常能	43	45.7	sig=0.319
	能	33	35.1	大于 0.05, 没有差异
	一般	18	19.1	
	不能	0	0.0	
	非常不能	0	0.0	
14. 网络画板的动态性特点让图形具有动态性, 你认为对提升你的直观想象力有作用吗?	非常有	38	40.4	sig=0.806
	有	45	47.9	大于 0.05, 没有差异
	一般	10	10.6	
	没有	1	1.1	
	非常没有	0	0.0	
15. 用网络画板学习, 能提升你对几何图象、函数关系的理解吗?	非常能	42	44.7	sig=0.015
	能	38	40.4	小于 0.05, 有差异
	一般	13	13.8	
	不能	1	1.1	
	非常不能	0	0.0	
16. 用网络画板能解决生活问题, 你认为能提升你的数学建模能力吗?	非常能	40	42.6	sig=0.111
	能	35	37.2	大于 0.05, 没有差异
	一般	16	17.0	
	不能	3	3.2	
	非常不能	0	0.0	
19. 你认为网络画板能够提高你的学习效率吗?	非常能	24	25.5	sig=0.132
	能	36	38.3	大于 0.05, 没有差异

	一般	33	35.1	
	不能	1	1.1	
	非常不能	0	0.0	
20. 你认为教师使用网络画板教	非常能	30	31.9	sig=0.381
学能够帮助你提高数学学习成绩	能	26	27.7	大于 0.05, 没有差异
吗?	一般	35	37.2	
	不能	3	3.2	
	非常不能	0	0.0	

本部分共十个小题。根据表 29 数据可知, 第 9 题、第 10 题和第 11 题主要考察网络画板对学生数学能力方面的培养和提升是否有帮助。其中第 9 题了解网络画板对分析能力和观察能力方面的帮助, 有 77.6% 的学生认为是有帮助的, 有 19.1% 的学生认为一般, 还有 3.2% 的学生认为没有帮助。第 10 题了解网络画板是否能提高独立思考能力, 有 60.7% 的学生认为可以提高, 有 33% 的学生认为一般, 还有 6.4% 的学生认为不能。第 11 题了解网络画板是否有助于问题解决, 有 81.9% 的学生认为是有帮助的, 并且没有一个学生认为是无用的。由上可知, 大多数学生认为使用网络画板进行教学有助于他们分析能力、观察能力、独立思考能力和解决问题能力的培养与提高。

第 12 题、第 13 题、第 14 题、第 15 题和第 16 题主要考察网络画板对学生数学核心素养的培养是否有帮助。其中第 12 题了解网络画板是否更有助于学生理解图象特征, 有 89.4% 的学生认为是有帮助的, 而仅有 1.1% 的学生认为没有帮助。第 13 题了解网络画板是否有助于学生发现数学规律, 培养学生逻辑推理素养, 有 80.9% 的学生认为是有帮助的, 且没有学生认为是没有帮助的。第 14 题了解网络画板是否有助于学生培养直观想象素养, 有 88.3% 的学生认为是有帮助的, 但是也存在 1.1% 的学生认为是没有帮助的。第 15 题了解网络画板是否有助于学生提升几何图象、函数关系的理解, 培养数学抽象素养, 其中有 85.1% 的学生认为是有帮助的, 有 1.1% 的学生认为对自己没用。第 16 题了解网络画板是否有助于学生培养数学建模核心素养, 有 79.8% 的学生认为是有帮助的, 但是也有 3.2% 的学生认为是没有帮助的。由上可知, 大多数学生认为网络画板融入数学课堂有助于培养他们的数学建模、数学抽象、直观想象和逻辑推理方面的核心素养, 但是针对部分认为没有帮助的学生, 更需要教师去思考原因, 并更多的尝试让学生进行自主探究与思考, 投入到课堂之中。

第 19 题了解网络画板是否能提高学生学习效率, 有 63.8% 的学生认为能提高, 有

35.1%的学生认为一般，同时还有 1.1%的学生认为不能提高自身学习效率。第 20 题了解使用网络画板进行教学是否有助于提高学生成绩，有 59.6%的学生认为有助于提高，有 37.2%的学生认为一般，还有 3.2%的学生认为不能帮助自己提高数学成绩。由上可知，有超过半数的学生认为使用网络画板的教学模式有利于自身学习效率和学习成绩的提高，但是同样也有许多同学持中立态度或反对态度，并且通过独立样本 t 检验知网络画板对于不同性别的学生培养素养和提高能力不存在显著差异。因此对于网络画板的使用应该选择好内容和时机，同时也要多角度思考如何帮助学生进行有效学习。

(四) 对使用网络画板学习的态度 (见表 30)

表 30 使用网络画板学习的态度情况

题目	选项	频数	百分比	男女性别差异
17. 你愿意自己动手操作网络画板来进行数学学习吗?	非常愿意	32	34.0	sig=0.010
	愿意	25	26.6	
	一般	33	35.1	
	不愿意	1	1.1	
	非常不愿意	3	3.2	
18. 你喜欢用网络画板进行几何图形、函数图象方面的学习吗?	非常喜欢	34	36.2	sig=0.071
	喜欢	32	34.0	
	一般	24	25.5	
	不喜欢	1	1.1	
	非常不喜欢	3	3.2	

由表 30 数据可知，第 17 题考察的是学生是否愿意自主使用网络画板进行学习，通过表格数据可以知道，共有 60.6%的学生愿意自主操作网络画板，但是也有 4.3%的同学不愿意自己操作网络画板。同时针对男女学生可以发现在操作网络画板的态度上，他们存在显著差异。让学生操作网络画板进行探索与研究，一方面是为了锻炼学生的信息技术能力，另一方面也是培养学生的自主探究精神，因此对于学生不愿意动手的原因要进行考察，同时对学生进行网络画板的相关介绍与培训，使学生能自信且自愿的用网络画板进行学习研究。

第 18 题考察的是学生对于使用网络画板进行函数与几何方面学习的态度，其中有 70.2%的学生喜欢利用网络画板进行学习，但是也存在 4.3%的学生不喜欢这种学习方式。可知，大多数学生赞同使用网络画板进行学习，但对于不赞同的原因，教师还需要反思

是否是教学内容与网络画板结合不恰当，或者是教学速度导致的。

（五）总结

根据调查问卷的数据显示，可知实验班中的大多数学生对于使用网络画板的教学模式是感兴趣的。动态的图象和操作模式不仅能活跃课堂氛围，还能使学生参与其中进行自主操作，利于提高学生的学习兴趣。同时大多数学生认为使用网络画板授课还有助于培养他们的数学核心素养和提高数学学习能力，并能有效提高他们的数学学习效率和学习成绩。通过直观的动态图象，学生可以提高自身直观想象能力，掌握学习规律和学习策略，加深对知识的理解，并由教师循循善诱的动态展示过程中逐步剖析，提高自身的逻辑推理能力，锻炼自己解决问题的能力。由此可见，基于网络画板的数学教学模式是受学生欢迎的，并且能给学生学习提供帮助和支持。

5.3.4 教师访谈分析

实验教学后，对 H 中学高一年级的三位不同教龄的数学教师进行访谈，为保护隐私，分别用甲教师指代 40 年教龄的老教师、乙教师指代 19 年教龄的教师和丙教师指代 1 年教龄的新入职教师，了解他们对于使用网络画板辅助教学的态度、看法以及建议。

结合网络画板教学特征和函数单调性的内容特点，本次访谈主要从以下四个部分入手：第一部分是了解教师对于函数单调性的知识点的学习难点；第二部分是了解教师使用多媒体教学的情况和要求；第三部分是了解教师认为高中数学教材中哪些知识点适宜使用数学软件进行辅助教学；第四部分是了解教师对使用网络画板辅助教学的看法，包括优势和不足。具体访谈情况如下，见表 31 至表 35：

第一部分是了解函数单调性学习方面的难点所在。通过对三位教师进行提问：您在函数的单调性知识方面，学生存在哪些困难？该如何突破？

可知，三位教师认为函数的单调性的首要难点在于如何使学生明白函数单调性的概念，即如何将以前的文字语言转换为符号语言进行理解，对于任意点的要求又是如何产生及思考的。这个概念的生成过程需要教师进行有效的演练，使学生可以从根本上理解概念而不是记忆概念。其次对于函数的单调性的应用也是难点之一，要使学生在学习概念之后可以顺理成章的使用概念进行证明和求解需要学生先理解概念的含义和用途。由此可见，如何上好函数单调性的概念课是函数单调性知识教学的重中之重。

第二部分是了解教师使用多媒体教学的情况和要求，包含两个问题：

问题一：您平时在教学中会使用哪些多媒体辅助教学？

表 31 三位教师对第二部分问题一的访谈回答

教师	回答
教师甲	因为我对这些软件的使用并不熟悉，所以一般很少使用多媒体辅助教学，但是实际教学中我对几何画板的使用可能更加熟练一些，所以主要还是会使用几何画板进行辅助教学。
教师乙	平常很少使用数学软件对学生进行教学，一般都是直接利用课本或者教案等进行讲解。使用的软件常见的是几何画板、网络画板和 GGB，但是个人对于 GGB 使用还不太熟练。而对于立体几何方面，可能还是觉得网络画板使用起来更加方便和容易理解，以前还有一个“玲珑画板”也让我觉得用于教学辅助方面是很不错。
教师丙	一般情况下只会使用 PPT 进行教学，也有学习几何画板、网络画板，但是目前主要是学习和使用 GGB 来进行辅助教学。

问题二：如果选择一款数学软件来辅助教学，您对该软件的应用有什么要求吗？

表 32 三位教师对第二部分问题二的访谈回答

教师	回答
教师甲	对于老教师而言，主要是希望数学软件在操作上是比较容易的，方便理解和记忆，如果能培训我学习一下它是最好的。
教师乙	考虑到时间和空间等各个因素，希望数学软件不仅仅是教师在教学上能使用，还可以让学生自主操作使用，这样能从数学软件中培养学生的数学建模能力。
教师丙	目前感觉各大数学软件的应用的内容和范围都相差不大，足够满足我目前的教学要求，因此也没有什么其它的要求。

由表 31 和表 32 可知，对于这三位不同阶段的教师，他们都有接触和使用过数学软件进行教学，但是他们使用数学软件进行辅助教学的时间和次数却并不多。他们对数学软件的要求主要是希望它容易操作且能让学生有机会操作。由此可知，学校和有关部门还需要组织更多相关的培训活动帮助教师更好且更灵活的掌握信息技术，使每个年龄阶段的教师都能熟练的利用数学软件进行相应的教学。除此之外，社会和学校可以鼓励教师和学生多尝试使用网络画板进行教学和学习，使学生可以自主参与到信息技术辅助教学中来，在提高学生学习兴趣的同时，培养学生的自主学习能力和数学建模能力。

第三部分是了解教师认为高中数学教材中哪些知识点适宜使用数学软件进行辅助

教学，因此提问：您认为在人教版高中数学教材中哪些知识点可以用网络画板进行辅助教学？

表 33 三位教师对第三部分的访谈回答

教师	回答
教师甲	对于课题内容的选择，的确不是所有的内容都能运用网络画板，但是像立体几何这种与图形相关的就适合使用网络画板。有时候只是单独的讲解学生可能不能理解，而使用网络画板后学生可以通过图象更加直观地理解知识，而让图象动起来，也能使学生对一些图象的变换理解的更加清楚。
教师乙	数学软件作为一种数学辅助教学工具，的确很好，它能够帮助孩子对一些函数、模型等进行探究。中学数学知识点中，我认为函数图象、立体几何和解析几何等内容就很适合使用网络画板。尤其是立体几何中充满了图象的变化，例如旋转、翻转、动态变化，对于 3D 方面的图形，也是学生难以从静态的平面进行感知的，而利用网络画板这种数学工具可以使学生感受更加直观和立体。
教师丙	主要是函数图象和几何方面会更多的使用数学软件进行教学，因为它们能更加直观和动态化的呈现出图象或者图形的特点，在方便学生理解的同时给教师提供合适的模型。

由表 33 中三位教师的回答可知，教师们一般认为与函数和几何相关的数学知识更适宜使用数学软件进行教学。比如在讲授函数图象及性质时，软件的动态化呈现更利于学生感悟，在讲授几何知识时，直观化和立体化的图象塑造更利于学生观察。函数和几何是数学知识点中的重要组成部分，因此使用数学软件对其进行教学是很有必要的，这不仅可以适应信息化时代的要求，同时也能减轻教师的教学负担和学生的学习压力。

第四部分是了解教师对使用网络画板辅助教学的想法，包括优势和不足，主要包含两个问题。

问题一：与传统教学模式相比，您认为网络画板辅助教学的课堂有什么变化？它目前还存在哪些问题呢？您能给出一些建议吗？

表 34 三位教师对第四部分问题一的访谈回答

教师	回答
教师甲	与传统教学相比，使用网络画板进行辅助教学有助于提高学生的学习兴趣，但是它的局限性困难主要在作图上，学生的操作技术可能没法跟上

	老师，这也就无法有效让学生使用网络画板参与自主实践，因此我觉得不仅老师要学习，还需要多让学生学习如何操作网络画板。
教师乙	首先，对比传统教学，使用网络画板进行教学的教学模式会使学生更感兴趣，其次是动态化的呈现可以研究很多内容。但是它也受环境和时间的影 响，所以教师和学生 对网络画板的使用不多。因此如果想鼓励学生自己用网络画板进行探索，也可以让学生自己课后选择自己喜欢的课题进行研究，这样课上课下都不耽误。
教师丙	对比传统教学，这种教学模式可能主要是使教学方式更加多元化，更利于直观化的呈现一些数据和图象。但是同样的，对于如何选择合适的教学内容以及备好相应的课件进行教学也是对教师的一种挑战。

问题二：在课堂教学中，您认为使用信息技术教学是否有助于培养学生数学核心素养？您认为网络画板辅助课堂教学有助于提升学生的学习兴趣、学习效率，改变学生学习方式吗？

表 35 三位教师对第四部分问题二的访谈回答

教师	回答
教师甲	网络画板对学生的数学学习肯定会有一些帮助，比如说学生运用网络画板学习的话，对于他们理解数学会有很大的帮助，这肯定是一个好事。同时，学生接受能力快，玩几次就能学会操作，这个过程也可以多方面培养学生的数学核心素养。
教师乙	利用网络辅助教学一个很大的优势就是弥补了实践的操作，使学生不仅仅是从知识点上渗透了数学核心素养，还能从实际操作和动态变化中培养数学核心素养，比如说数学建模和直观想象等。
教师丙	网络画板作为数学辅助软件，它肯定是有助于教学效率的提高，也能在课堂上很好的提高学生的注意力与学习兴趣，使学生感兴趣的自主投入到探索环节中，更利于学生的自主学习能力的提高。

从表 34 和表 35 的访谈结果可知，三位教师对于使用信息技术软件比如网络画板进行课堂教学是持赞成态度的，他们认为使用数学软件进行辅助教学的确有助于提高教学和学习效率以及培养学生数学核心素养和多方面能力。但是同样的，如何有效的将网络画板融入教学之中，如何使每位教师都能熟练掌握信息技术软件，如何使学生有效使用网络画板参与自主探究等问题，也是各位教师感到困惑和困难的问题，还需要对这些方

面继续深入挖掘和解决。

总而言之，通过上述访谈问题和访谈结果可知，三位不同教龄的教师对使用网络画板进行辅助教学都是持赞成态度的。他们认为使用信息技术工具进行教学，尤其是几何与函数知识方面的教学，不仅有助于学生核心素养的培养和数学能力的提高，还有助于教师对教学内容的直观化呈现。但是对于网络画板教学，他们也存在困难和建议，他们认为教师需要有更多的机会去学习网络画板操作，去熟悉如何将教学内容与网络画板相结合，同时他们也希望网络画板可以更多的用于学生的探究活动。

第六章 研究结论与展望

6.1 研究结论

本文主要是基于网络画板的高中数学教学实践研究，并以函数单调性的部分知识点为具体例子对网络画板融入高中数学教学的策略进行思考。笔者通过对大量相关文献进行阅读与思考，分析函数单调性的教学现状和网络画板的应用教学现状，然后对网络画板进行相关介绍，并针对函数单调性的相关教学要素进行研究。通过对函数单调性的教材编排、学情分析和数学核心素养体现等方面的研究，制定基于网络画板的函数单调性教学设计策略、框架和方案，并以此教学设计为基础在实习学校展开相应的对照实验。在实验后对学生进行测试和问卷调查，对教师进行访谈，最后分析调查数据得出以下结论：

一、基于网络画板的高中数学教学模式可以有效激发学生的学习兴趣、积极性和自主性。通过对对照实验中对照组和实验组学生的上课情况的观察，可以发现在课堂教学实验中，教师通过操作网络画板展示动态化的函数图象，可以使学生更加专注于图象的变化，更能表述出图象的变化特点，从而自主地总结出相关概念和特征。在利用网络画板进行自主探究的教学实践中，使用网络画板进行教学可以使学生更积极地投入到课堂之中。通过小组讨论和自主思考的学习模式，学生能不错地完成自主探究的任务要求，达到自我实现的目的。

二、基于网络画板的高中数学教学模式可以有效促进学生数学能力和数学核心素养的培养。通过观察对照实验中《不同函数增长的差异》的探究课堂中学生探究过程的表现，发现学生利用网络画板学习能更快的总结出知识点的特点，明白文字语言到符号语言的转化过程，对概念的记忆更加深刻。通过对比实验班与对照班的测试成绩和答题情况，能发现实验班学生在相关题型求解上，写出完整过程且解题正确的学生要多于对照班。通过分析调查问卷的相关数据，发现大多数的学生认为网络画板对自身的数学学习与成长产生帮助，且对于数学能力和数学核心素养的培养起到促进作用。由此可见学生的数学能力和核心素养在利用网络画板进行数学教学的过程中的确有

得到相应的培养和提高。

三、基于网络画板的高中数学教学模式可以有效提高学生数学学习效果。通过对比实验班和对照班的后测试卷的测试结果,将两个班级的成绩进行整体性分析,发现实验班学生的平均分要比对照班学生的平均分高 6.7304 分。再次对两个班级的成绩进行独立样本 t 检验,结果显示两个班级的成绩存在显著性差异。通过观察对照实验中对照班和实验班学生的上课表现,比如上课积极性、反映快慢和答题情况,发现实验班学生能更加积极地回答教师提出的问题,对概念的总结和应用也更加完善和熟练。由此可知,将网络画板融入数学课堂的教学模式可以有效提高学生的数学学习效果,帮助学生理解问题的本质,抓住知识的要点,提高学生解决问题和分析问题的能力,促进他们知识与技能的学习。

6.2 研究创新

本文的研究以函数的单调性知识点为例,探讨网络画板融入高中数学的教学模式是否有助于教师教学和学生学习的,并在吸收以往基于网络画板的数学教学案例的经验的基础上进行思考,做出以下创新:

一、增加教学形式,实现教学方式多样化,将课堂还给学生。在教学实验中笔者将课型进行拓展,除了“函数单调性”的概念教学,还对“不同函数增长的差异”章节进行探究性教学。使网络画板的使用更加宽泛,不仅用于教师讲授的概念课,还用于学生自主学习的探究课,使课堂不仅是教师的讲和学生的学,而是学生可以主动学习的知识海洋。

二、加深对函数单调性的概念的教学,实现教学内容创新。以往对于函数单调性的教学往往使用 PPT 中的静态化图片进行讲授,因此对于符号化语言的由来无法直观地进行展示。而网络画板的教学案例在查阅的文献中更多的聚焦于几何或者函数,较少的将网络画板融入单个知识点体系中。因此,将网络画板融入函数单调性的教学之中,不仅为网络画板教学方面提供聚焦于一个知识点的教学案例,而且在函数单调性教学方面提供使用动态数学软件的教学案例,使概念教学得到深化的同时,实现了网络画板教学内容方面的补充与创新。

6.3 研究不足

以函数单调性为例的基于网络画板的高中数学教学实践研究虽然取得了一定的教学效果，但是从整体教学设计和实验过程中，本次研究还存在以下不足之处：

一、被试学校、年级与学生人数存在局限性。首先本次实验选取的学校仅为笔者个人的实习学校，无法代表各个不同地区的学校情况。且本次实验的研究对象为同一所学校的高一年级的部分班级的学生，而一个年级的学生层次也存在差异性，故所选班级水平无法代表全年级学生水平。因此本次教学实验只能算是微型教学实验。

二、教学实验的教学内容存在局限性。本次教学实验选取的内容为“函数的单调性”和“不同函数增长的差异”两节，两节内容都与函数单调性知识点相关，一节是教师讲授，另一节是学生自主探究，都是为了探究网络画板如何融入函数单调性知识点的教学。但是函数单调性知识点涉及的内容广泛，比如导数与单调性的关系在本节就没有相关案例进行支撑，因此所选取的教学内容无法代表全部函数单调性知识点与网络画板融合的情况，只能从模式上提供大致的思路。

三、基于网络画板的数学教学模式对培养与提高学生数学能力和数学核心素养的教学策略有待深入研究与实践。本文在实验前对函数单调性的教学要素进行调查，了解函数的单调性所涉及的数学核心素养，同时了解网络画板的特点，以此设计合适的教学策略、方式和方案来进行实践。但由于时间因素，每个策略的实施是有限的，所以在实践中并未完全验证其有效性，仅能从上课状态、学习成绩和问卷反馈进行初步验证。因此对于基于网络画板所提出的教学策略的实用性还有待更多教学实验进行研究和完善。

四、教学场地与教学时间存在局限性。将网络画板融入数学课堂的教学模式从课堂反映和课后测试中可以看出反响不错，但是在实际操作中，却存在时间和场地的限制。首先，教师讲授的课上需要通过操作网络画板循序渐进的引导学生发现函数图象的特点，总结出相应的概念，因此针对学生的情况，在授课时需要严格把控新授的时间。且网络画板课件的放映需要在线设备或者下载离线设备，这也要求学校要具备一定的信息技术设备。其次，对于学生自主探究课堂，为了让学生人人都能参与到探究活动之中，获得自身的收获与成长，要求需要足够的联网设备来支撑实验进行，这就需要相应的实验室来进行授课。且学生自主探究时的课堂时间是更不好管控的，也就容易形成一节课讲不完一个内容的情况，需要教师花费更多的时间帮助学生完成课堂的学习。

6.4 研究展望

以函数单调性部分知识点为例的基于网络画板的高中数学教学实践研究基本上, 根据网络画板的直观性图象展示、动态性操作功能、丰富化教学资源 and 开放化教学平台等特点, 以及函数单调性的教学要素和内容特征, 结合本次实践研究的不足之处, 笔者认为还可以从以下几个方面进行下一步的研究与论证:

第一、扩大调查范围和实验对象。选取不同地区和不同层次的高中参与实验, 并针对高一至高三不同年级的学生选取合适的教学内容进行教学实践, 以此获得更充足、更科学、更合理的实验数据和实验结果。

第二、丰富和延伸教学实践内容。选取不同年级中涉及函数单调性的内容, 并进行相关的教学要素分析和特点分析, 再结合网络画板特点选取经典案例, 形成基于网络画板的函数单调性教学实践的高中数学教学体系, 以整体性的内容完善现有的教学策略。

第三、改善数学教学中应用网络画板的困境。首先, 虽然将网络画板应用于数学教学中获得了一线教师普遍认可, 其操作过程也相对便捷和轻松, 但是仍需要加强对教师的操作培训, 使教师们能更加熟练地掌握操作要领和技巧。其次, 网络画板一个重要的特点是人人皆可参与, 这使得学生也能自主操作网络画板进行探究实验, 因此学校可以考虑给学生安排相应的课时和实验场所, 让学生去掌握网络画板操作技巧, 同时在数学课堂外也能应用网络画板进行自主探究, 实现学生的独立思考与学习。

第四、积累教学经验, 锻炼操作技巧。笔者个人还需要在后续的实践教学与学习中积极向优秀的一线教师请教, 积极听课学习, 丰富自身教学经验。此外还需要继续学习网络画板的相关操作, 在熟悉基本操作的基础上, 能使用网络画板进行更多的教学探究, 掌握网络画板更多的功能。通过课堂教学和网络画板操作的技术提高, 做到更充分地把握教学内容和课堂教学过程, 实现教学效果的更优化。

参考文献

- [1]张景中,赵维坤.把数学变容易——张景中院士访谈录[J].教育研究与评论,2022,No.520(09):4-11.
- [2]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2020.
- [3]黎栋材,龙正武,王尚志.站在系统的高度整体把握函数单调性教学[J].数学通报,2015,54(12):7-11+15.
- [4]谢发超.导向深度学习的数学教学目标设计——以“函数的单调性”为例[J].中小学教师培训,2019,No.390(01):41-45.
- [5]严爽安.基于核心素养的高中函数单调性教学的实践研究[D].辽宁师范大学,2023.
- [6]杨奋.教育信息化评价方法研究[D].哈尔滨工程大学,2008.
- [7]中华人民共和国教育部.国家教育事业发展规划“十三五规划”[C/OL].http://www.moe.gov.cn/jyb_xxgk/moe_1777/moe_1778/201701/t20170119_295319.html.
- [8]羊振华.对函数单调性的深层次认识及教学策略[J].高中数学教与学,2018(12):29-31.
- [9]章建跃,李增沪.普通高中教科书数学A版必修第一册[M].北京:人民教育出版社,2019.
- [10]黄爱云.基于成长型思维的高中生数学核心素养养成研究[D].海南师范大学,2021.
- [11]张景中,陈如仙,陆兴华等.“互联网+”数学教师TPACK能力培训模式研究——以武侯区初中数学教师网络画板培训为例[J].数学教育学报,2022,31(05):1-8.
- [12]Chang Kyung Yoon, Whang Woo-Hyung, Lee Joong Kwoen. Developing Exploratory Activities with Geometer's Sketchpad and Its' Efficacy on Geometric Reasoning of College Students [J]. Journal of Educational Research in Mathematics, 2001, 11(1):193-206.
- [13]Leping Liu, Rhoda Cummings. A Learning Model That Stimulates Geometric

Thinking Through Use of PCLogo and Geometer's Sketchpad[J]. Computers in the Schools, 2001, 17(1):85-104.

[14]Rohani Ahmad Tarmizi. Instructional Efficiency of Mathematical Learning Using Geometer's Sketchpad and Graphing Calculator. Journal[J]. The International Journal of Technology, 2008, 4(5):151-158.

[15]Exploring the Golden Ratio with The Geometer's Sketchpad. Journal[J]. Mathematics Teacher, 2012, 105(8):628-631.

[16]Leong Kwan Eu. Impact Of Geometers Sketchpad On Students Achievement In Graph Functions[J]. The Malaysian Online Journal of Educational Technology, 2014.

[17]Decy Dhayanti, Rahmah Johar, Cut Morina Zubainur. Improving Students' Critical and Creative Thinking through Realistic Mathematics Education using Geometer's Sketchpad[J]. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 2018, 3(1):25-35.

[18]Zambak Vecihi S, Tyminski Andrew M. Examining mathematical technological knowledge of pre-service middle grades teachers with Geometer's Sketchpad in a geometry course[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2020, 51(2):183-207.

[19]彭艳梅, 侯小华. 基于网络画板应用的双曲线的简单几何性质教学设计[J]. 中国教育技术装备, 2020, No. 489(15):40-42.

[20]伍雪莲. 基于网络画板的初中数学探究教学研究[D]. 四川师范大学, 2020.

[21]方王洋. 运用网络画板辅助二次函数的综合实践教学研究[D]. 海南师范大学, 2022.

[22]刘正章. 网络画板辅助教学的实践与认识——以“函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 图象”的教学为例[J]. 高中数学教与学, 2018, No. 420(24):17-19.

[23]樊甜甜. 智慧环境下“网络画板”在初中数学教学的设计与实践研究[D]. 宁夏大学, 2022.

[24]赵阳, 李赵容, 张传军等. 基于网络画板的数学概念教学研究[J]. 高中数学教与学, 2022, No. 498(06):51-53+57.

[25]吴勇. 网络画板与高中数学课堂教学的有效整合[J]. 新教育, 2023, No. 560(07):16-18.

- [26]李鸿,王宗德.借助网络画板 知识自然生成——以“穿根法”教学为例[J].高中数学教与学,2022, No. 512(20):42-44.
- [27]邱雪莲.应用网络画板提升学生高阶思维能力的探究[D].沈阳师范大学,2019.
- [28]李赵容.基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究[D].贵州师范大学,2021.
- [29]巩江源.网络画板在逻辑推理素养培养中的应用策略研究[D].西北师范大学,2021.
- 涂荣豹.“教与数学对应”原理的实践——对“函数单调性”教学设计的思考[J].数学教育学报,2004(04):5-9.
- [30]涂荣豹.“教与数学对应”原理的实践——对“函数单调性”教学设计的思考[J].数学教育学报,2004(04):5-9.
- [31]李兴贵.基于六环节模式的“函数的单调性”教学设计[J].数学通报,2014,53(08):54-57+59.
- [32]周祝光.立足核心问题实施概念教学——以《函数的单调性》为例[J].教育科学论坛,2016, No. 358(04):45-48.
- [33]李秀萍,赵思林.函数单调性定义的“八步”教学设计[J].内江师范学院学报,2017,32(10):21-25.
- [34]吴丹红,唐恒钧.基于问题链的“函数单调性”教学探索[J].中学教研(数学),2016,(05):7-9.
- [35]杨勇.用问题驱动探究 让结论自主建构——以“导数在研究函数单调性中的应用”为例[J].数学通报,2019,58(04):46-50+53.
- [36]方立新,刘新春.促进数学高阶思维实现的问题驱动教学——以“函数单调性”一轮复习为例[J].数学通报,2023,62(04):49-52.
- [37]钱珮玲.课堂教学需要从数学上把握好教学内容的整体性和联系性之二——对函数单调性教学的思考[J].数学通报,2008(03):22-23+25.
- [38]赵昕.从学生的认知基础看函数单调性教学的改进[J].数学通报,2016,55(05):18-20+24.
- [39]邓翰香,吴立宝.指向“四个理解”的函数单调性教学设计研究[J].中国数学教育,2020, No. 228(24):26-30+57.
- [40]王圣荣,黄涵.基于信息技术的课堂教学策略研究——以“函数的单调性与导数”为例[J].教育观察,2020,9(11):105-106.

- [41]李广修. 数学概念的学习对解题的影响——以函数单调性为例[J]. 数学通报, 2017, 56(04):12-14+43.
- [42]吕秀娟. 函数单调性的应用[J]. 教育教学论坛, 2013, No. 121(40):89-90.
- [43]史嘉. 从赛课视角谈对教学研究的思考——以《函数的单调性》为例[J]. 数学通报, 2015, 54(10):12-15.
- [44]殷洪丽, 王新民. 函数单调性认知阶段及相应数学核心素养发展水平[J]. 内江师范学院学报, 2018, 33(08):28-32.
- [45]邓翰香, 吴立宝, 沈婕. 指向数学抽象素养的教材分析框架与案例剖析——以人教A版“函数单调性”为例[J]. 数学通报, 2019, 58(10):33-38.
- [46]林霄霞. 基于建构主义学习理论的初中学生数学微课研究[D]. 华东师范大学, 2023.
- [47]网络画板. 网络画板介绍(张院士)
[M/OL]. <https://www.ixigua.com/i6731976136521155086>.
- [48]王鹏远. 网络画板平台支持下的新一代数学实验室[J]. 中小学信息技术教育, 2018, (06):54-56.
- [49]刘璐. 函数单调性及其在高中数学中的应用[D]. 西北大学, 2015.
- [50]甄荣. 立足单元教学深度建构概念——“函数的单调性”教学设计与思考[J]. 中国数学教育, 2023, (08):19-23.
- [51]赵瑶瑶. 体验概念生成, 落实素养培育——以“函数的单调性”教学设计为例[J]. 高中数学教与学, 2019(22):21-24.
- [52]李丹丹. 基于APOS理论的高中数学概念的变式教学研究[D]. 辽宁师范大学, 2022.
- [53]郑嘉佳. 基于UbD模式下高中函数单调性单元的逆向教学设计[D]. 福建师范大学, 2020.

附 录 1

网络画板辅助数学教学的满意度调查问卷

亲爱的同学：

你好！感谢学业繁忙的你们能够抽出时间完成该问卷，问卷旨在了解大家对于网络画板辅助函数的单调性教学的想法。希望同学们能够结合自己的实际情况进行选择，所选答案没有对错之分。感谢你的配合！

你的性别：_____ 你的年级：_____

1. 你喜欢老师使用网络画板进行数学教学吗？（ ）				
A. 非常喜欢	B. 喜欢	C. 一般	D. 不喜欢	E. 非常不喜欢
2. 你认为教师使用网络画板进行教学，课堂会更有意思吗？（ ）				
A. 非常认可	B. 认可	C. 一般	D. 不认可	E. 非常不认可
3. 你认为教师使用网络画板进行教学能够提升你对数学的学习兴趣吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
4. 你认为网络画板做出来的函数图象会更加直观、易懂吗？（ ）				
A. 非常认可	B. 认可	C. 一般	D. 不认可	E. 非常不认可
5. 你认为使用网络画板教学能使你对函数的单调性的概念理解更加深刻吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
6. 你是否希望老师在今后的教学中继续使用网络画板？（ ）				
A. 非常希望	B. 希望	C. 一般	D. 不希望	E. 非常不希望
7. 你认为网络画板能够帮助你分析函数图象的动态变化规律吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
8. 你认为网络画板能帮助你更好地理解函数单调性的相关知识吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
9. 你认为教师使用网络画板可以加强你的分析能力和观察能力吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
10. 你认为教师使用网络画板可以加强你的独立思考能力吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
11. 你认为使用网络画板呈现的动态图象能帮助你学习探究、解决问题吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
12. 你认为使用网络画板进行教学能帮助你更好地理解图象特征吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
13. 你认为教师使用网络画板教学能帮助你更容易发现数学规律吗？（ ）				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能

14. 网络画板的动态性特点让图形具有动态性, 你认为对提升你的直观想象力有作用吗? ()				
A. 非常有	B. 有	C. 一般	D. 没有	E. 非常没有
15. 用网络画板学习, 能提升你对几何图象、函数关系的理解吗 ()				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
16. 利用网络画板可以解决生活问题, 你认为能提升你的数学建模能力吗? ()				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
17. 你愿意自己动手操作网络画板来进行数学学习吗?				
A. 非常愿意	B. 愿意	C. 一般	D. 不愿意	E. 非常不愿意
18. 你喜欢用网络画板进行几何图形、函数图象方面的学习吗? ()				
A. 非常喜欢	B. 喜欢	C. 一般	D. 不喜欢	E. 非常不喜欢
19. 你认为网络画板能够提高你的学习效率吗? ()				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能
20. 你认为教师使用网络画板教学能够帮助你提高数学学习成绩吗? ()				
A. 非常能	B. 能	C. 一般	D. 不能	E. 非常不能

附 录 2

教师访问提纲

访谈时间:

访谈地点:

访谈对象:

教师教龄

访谈内容:

问题一: 您平时在教学中会使用哪些多媒体辅助教学?

问题二: 如果选择一款数学软件来辅助教学, 您对该软件的应用有什么要求吗?

问题三: 您认为在函数的单调性知识方面, 学生存在哪些困难? 又该如何突破?

问题四: 您认为在人教版高中数学教材中哪些知识点可以用网络画板进行辅助教学呢?

问题五: 与传统教学模式相比, 您认为网络画板辅助教学的课堂有什么变化呢? 它目前还存在哪些问题呢? 您能给出一些建议吗?

问题六: 在课堂教学中, 您认为使用信息技术教学是否有助于培养学生数学核心素养?

您认为网络画板辅助课堂教学有助于提升学生的学习兴趣、学习效率, 改变学生的学习方式吗?

附录 3

前测试卷

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

一、单项选择题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知 A, B 都是 R 的子集，则图中的阴影部分表示（ ）

A. $A \cup B$ B. $C_u(A \cup B)$ C. $(C_u B) \cap A$ D. $(C_u A) \cap B$

2. 已知命题 $p: \exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \leq 0$ ，则 $\neg p$ 为（ ）

A. $\forall x \in R, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$ B. $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$

C. $\forall x \in R, x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$ D. $\exists x_0 \in R, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} > 0$

3. 2023 年某学校学生运动会，高一（1）班 62 名学生中有一半的学生没有参加比赛，参加比赛的学生中，参加田赛的有 16 人，参加径赛的有 23 人，则田赛和径赛都参加的学生人数为（ ）

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

4. 设 $p: -1 < x < 5, q: |x-2| < 4$ ，那么 q 是 p 的（ ）

A. 必要不充分条件 B. 充要条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 若集合 M 满足 $\{1, 2\} \subseteq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则集合 M 的个数有（ ）

A. 4 B. 3 C. 7 D. 8

6. 已知一元二次不等式 $ax^2 - 3x + b > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$ ，则不等式 $(ax-3)(2x-b) < 0$ 的解集为（ ）

A. $\{x | -1 < x < 9\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 9\}$

C. $\{x | -9 < x < 1\}$ D. $\{x | x < -9 \text{ 或 } x > 1\}$

7. 已知正实数 a, b 满足 $a+b=3$, 则 $\frac{1}{1+a} + \frac{4}{4+b}$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{9}{8}$ D. 2

8. 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[2.3]=2$, $[-1.8]=-2$, 则关于 x 的方程 $[1+|x-1|]=3$ 的解集为 ()

- A. $\{-1, 3\}$ B. $\{x | -2 \leq x < -1 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$
C. $\{x | -2 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } 3 \leq x < \frac{7}{2}\}$ D. $\{x | -2 < x \leq -1 \text{ 或 } 3 \leq x < 4\}$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

9. 设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的值可以为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. 0 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

10. 若 $a > b > 0, d < c < 0$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $ac > bc$ B. $a - d > b - c$ C. $a^3 > b^3$ D. $\frac{1}{d} < \frac{1}{c}$

11. 已知 $f(2x+1) = 4x^2$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f(-3) = 16$ B. $f(3) = 36$ C. $f(x) = 4x^2$ D. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

12. 已知关于 x 的不等式 $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$, 下列结论正确的是 ()

- A. 当 $a < b < 1$ 时, 不等式 $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$ 的解集为空集
B. 当 $a = 1, b = 4$ 时, 不等式 $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$ 的解集为 $\{x | 0 \leq x \leq 4\}$
C. 当 $a = 2$ 时, 不等式 $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$ 的解集可以为 $\{x | c \leq x \leq d\}$ 的形式
D. 不等式 $a \leq \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 \leq b$ 的解集恰好为 $\{x | a \leq x \leq d\}$, 那么 $b - a = 4$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知集合 $A = \{x | 2x + a > 0\}$, 若实数 $1 \notin A, 2 \in A$, 则实数 a 的取值范围是 () ;

14. 已知 $1 \leq a - b \leq 3, 3 \leq a + b \leq 7$, 则 $5a + b$ 的取值范围是 () ;

15. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} (x \neq 1), g(x) = x^2 + 2, f(2) = ()$, $f(g(2)) = ()$;

16. 已知 a, b 为正实数, 满足 $ab + 2a + 2b = 32$, 则 ab 的最大值为 () ;

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 求下列不等式的解集:

$$(1) -2x^2 - 5x + 7 > 0 \quad (2) \frac{x+3}{x+1} \geq 2$$

18. (本小题满分 12 分) 已知集合 $A = \{x | 2x - 4 < 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x < 0\}$, 全集 $U = R$, 求:

$$(1) A \cap B; \quad (2) (C_u A) \cap B; \quad (3) (C_u A) \cup (C_u B);$$

19. (本小题满分 12 分) 设集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - ax - 2a^2 \leq 0\}$ (其中 $a < 0$).

(1) 设 $p: x \in A, q: x \in B$, 当 $a = -3$ 时, p 是 q 的什么条件? 请简要说明理由;

(2) 设 $p: x \in A, q: x \in B$, 且 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围;

20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = 2x^2 - x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 m, n 是方程 $f(x) - 3 = 0$ 的两个实数根. 求代数式 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ 的值.

21. (本小题满分 12 分) 一家物流公司计划租地建造仓库储存货物, 经过市场调研了解到以下信息: 每月土地租金 y_1 (单位: 万元) 与仓库到公司的距离 x (单位: km) 成正比. 若在距离公司 $10km$ 处建仓库, 则 $y_1 = 2$ 万元, $y_2 = 8$ 万元.

(1) 试求该公司每个月两项费用之和 $y = y_1 + y_2$ 与仓库到公司的距离 x 的函数关系, 并求当 $x = 2km$ 时, 每个月两项费用之和 y 为多少万元?

(2) 这家公司应该把仓库建在距离公司多少 km 处, 每个月两项费用之和 y 取最小值, 最小值是多少万元?

22. (本小题满分 12 分) 函数 $y = x^2 + ax + 3$.

(1) $\forall x \in R, y \geq a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) $\exists x \in [-2, 2], y \geq (a+2)x - a$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

附录 4

后测试卷

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

一、选择题：（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

1. 在区间 $(0, +\infty)$ 上不是增函数的函数是 ()

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = 3x^2 + 1$ C. $y = \frac{2}{x}$ D. $y = 2x^2 + x + 1$

2. 函数 $f(x) = 4x^2 - mx + 5$ 在区间 $[-2, +\infty)$ 上是增函数，在区间 $(-\infty, -2)$ 上是减函数，则 $f(1)$ 等于 ()

- A. -7 B. 1 C. 17 D. 25

3. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(3, 8)$ B. $(-7, -2)$ C. $(-2, -3)$ D. $(0, 5)$

4. 若函数 $f(x) = \frac{2x+m}{x+1}$ 在区间 $[0, 1]$ 上最大值为 $\frac{5}{2}$ ，则实数 $m =$ ()

- A. 3 B. $\frac{5}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$ 或 3

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax-1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ 在 R 上单调递增，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $(0, 2)$ D. $(0, 2]$

6. 已知函数 $f(x) = 3 - 2|x|$, $g(x) = x^2 - 2x$, $F(x) = \begin{cases} g(x), & f(x) \geq g(x) \\ f(x), & g(x) > f(x) \end{cases}$ ，则 ()

- A. $F(x)$ 的最大值为 3，最小值为 1
B. $F(x)$ 的最大值为 $2 - 2\sqrt{7}$ ，无最小值
C. $F(x)$ 的最大值为 $7 - 2\sqrt{7}$ ，无最小值
D. $F(x)$ 的最大值为 3，最小值为 -1

7. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是

()

- A. $a \leq 3$ B. $a \geq -3$ C. $a \leq 5$ D. $a \geq 3$

8. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, $a, b \in R, a+b \leq 0$, 则下列不等式中正确的是 ()

- A. $f(a)+f(b) \leq -f(a)-f(b)$ B. $f(a)+f(b) \leq f(-a)+f(-b)$
C. $f(a)+f(b) \geq -f(a)-f(b)$ D. $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$

二、填空题: (本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

9. 函数 $y=(x-1)^2$ 的减区间是 () ;

10. 设 $y=f(x)$ 是 R 上的减函数, 则 $y=f(|x-3|)$ 的单调递减区间为 () ;

11. 函数 $f(x)=ax^2+4(a+1)x-3$ 在 $[2, +\infty)$ 上递增, 则 a 的取值范围是 () .

三、解答题: (本大题共 2 小题, 每小题 17 分, 共 34 分)

12. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 若 $f(6)=1$, 解不等式 $f(x+3)-f\left(\frac{1}{y}\right)<2$.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

(1) 用定义证明函数 $y=f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是严格增函数;

(2) 设函数 $g(x)=f(x^2+1), x \in 2$, 求 $g(x)$ 的值域.