重庆师范大学

专 业 硕 士 学 位 论 文

基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学实践研究

邓晴

指　导　教　师：童莉教授

学　习　形　式：全日制

专 业 学 位 类 别：教育硕士

专 业 学 位 领 域：学科教学（数学）

二〇二三年五月

中国知网 https://www.cnki.net

重庆师范大学硕士学位论文

基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学实践研究

硕士研究生：邓晴

指导教师：童莉教授

学科专业：学科教学（数学）

所在学院：数学科学学院

重庆师范大学

2023 年 5 月

中国知网 https://www.cnki.net

A Thesis Submitted to Chongqing Normal University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master

Research on the teaching practice of mathematical Geometric extremal problems in junior high school based on network drawing board

Candidate：Deng Qing
Supervisor：Professor Tong Li
Major：Subject teaching（Mathematics）
College：School of Mathematical Sciences

Chongqing Normal University
May， 2023

中国知网 https://www.cnki.net

基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学实践研究

摘要

初中数学中的几何最值问题涉及的知识点多，综合性强，难度大，一直以来都是学生学习的难点之一。教师在教授几何最值问题时，往往以讲授式的教学方式直接将最值模型解法传输给学生，学生只知其然而不知其所以然，在解题过程中存在很大困难。而不断涌现的数学信息技术工具有助于学生解决这一难题，为了让每个学生都能够自己动手去探索，又鉴于网络画板是一个国产的具有本土知识产权的平台，操作简单，功能齐全，对设备要求低，易实现课堂中使用，所以笔者选择了网络画板作为辅助工具，探讨如何在教学中使用网络画板帮助学生更有效地解决几何最值问题。

首先通过文献研究法查阅以“网络画板”、“几何最值问题”、“初中数学教学”等为主题词的相关文献，仔细研读、分析与整理，在文献研究的基础之上，对相关概念进行界定，同时梳理本研究所需要的理论基础。其次，通过学生测试卷和学生访谈了解学生目前几何最值问题的掌握现状，分析学生在解决几何最值问题上存在的问题。最后，提出网络画板辅助几何最值问题教学的优势和策略，选择典型内容进行教学实践尝试。

研究表明，初中生对几何最值问题专题中的两个基本原理的基础知识即基础原理模型的作图与应用都掌握的很好，但也存在一些问题：（1）学生未理解模型原理及题目条件，死记硬背模型解法；（2）学生的模型化思维和变式思维薄弱，应用能力较差；（3）学生的数学信息化工具使用频率低。基于理论与现状基础，确定网络画板辅助几何最值问题教学的优势，并提出 4 个策略：创设多样化的问题情境，理清问题本质；构建网络画板探究平台，鼓励解题探究；利用网络画板技术支持，拓展变式训练；深化几何最值模型应用，归纳解题方法。最后采用教育实验法进行教学实践尝试，得出实践结果：（1）网络画板辅助教学有助于学生对“几何最值问题”专题的学习；（2）学生经历动手操作过程提升了网络画板的操作熟练度；（3）大多数同学希望在今后数学课堂中继续使用网络画板。

关键词：网络画板，初中数学，几何最值问题，教学实践

中国知网 https://www.cnki.net

Research on the teaching practice of mathematical Geometric extremal problems in junior high school based on network drawing board

ABSTRACT

Geometric extremal problems in junior high school mathematics involves many knowledge points, is comprehensive and difficult, and has always been one of the difficulties for students to learn. When teachers teach geometric extremal problems, they often directly transmit the solution of the geometric extremal model to students in a lecture-style teaching mode, and students only know it but do not know the reason, and there are great difficulties in the process of solving the problem. In order to allow each student to explore by themselves, and in view of the fact that the network drawing board is a domestic platform with local intellectual property rights, simple operation, complete functions, low equipment requirements, easy to use in the classroom, so the author chose the network drawing board as an auxiliary tool to explore how to use the network drawing board in teaching to help students solve the geometric extremal problems more effectively.

Firstly, the relevant literature with the themes of "network drawing board"," geometric extremal problems " and "junior high school mathematics teaching" is consulted through the literature research method, and the relevant concepts are carefully read, analyzed and sorted out, and the relevant concepts are defined on the basis of literature research, and the theoretical basis required for this research is sorted out. Secondly, through student test papers and student interviews, we understand the current mastery status of students' current geometric extremal problems and analyze the problems existing in solving the geometric extremal problems. Finally, the advantages and strategies of network drawing board to assist the teaching of geometric extremal problems are proposed, and typical contents are selected for teaching practice attempts.

Studies have shown that junior high school students have a good grasp of the basic knowledge of the two basic principles in the topic of geometric maximum-value problems, that is, the drawing and application of basic principle models, but there are also some problems: (1) students do not understand the model principles and topic conditions, and rote memorize model solutions; (2) Students' modeled thinking and

中国知网 https://www.cnki.net

variant thinking are weak and their application ability is poor; (3) The frequency of use of mathematical information tools by students is low. Based on the theory and current situation, the advantages of network drawing board to assist the teaching of geometric extremal problems are determined, and four strategies are proposed: create diverse problem situations and clarify the essence of problems; Build an online artboard exploration platform to encourage problem-solving exploration; Use network artboard technology to expand variant training; Deepen the application of geometric maxima model and summarize the solution method. Finally, the educational experimental method was used to try the teaching practice, and the practical results were obtained: (1) the assisted teaching of the network drawing board helped students to learn the topic of "geometric maximum value problem"; (2) Students experienced the hands-on operation process to improve the operation proficiency of the network drawing board; (3) Most students hope to continue to use the online drawing board in the future math class.

Keywords: Network artboard; Junior High School Mathematics; Geometric extremal problems; Teaching practice

中国知网 https://www.cnki.net

目　录

1 绪论.....1
1.1 研究背景.....1
1.1.1 信息技术融入教学是新时代的要求.....1
1.1.2 数学课程标准强调信息技术在教学中的应用.....1
1.1.3 几何最值问题是初中数学教学的重难点.....2
1.2 研究问题与意义.....3
1.2.1 研究问题.....3
1.2.2 研究意义.....3
1.3 研究目的与内容.....4
1.3.1 研究目的.....4
1.3.2 研究内容.....4
1.4 研究思路与方法.....5
1.4.1 研究思路.....5
1.4.2 研究方法.....6
2 文献综述.....7
2.1 网络画板的相关研究.....8
2.1.1 网络画板的发展历程.....8
2.1.2 网络画板与数学教学相结合的相关研究.....9
2.2 初中数学几何最值问题的相关研究.....11
2.2.1 关于几何最值问题的解法探析与解题策略的研究.....11
2.2.2 关于几何最值问题的解题障碍与对策的研究.....11
2.2.3 关于不同理论基础下的几何最值问题的研究.....12
2.3 基于网络画板的初中数学几何最值问题的相关研究.....12
2.4 文献小结.....13
3 概念界定及理论基础.....15
3.1 概念界定.....15
3.1.1 网络画板.....15
3.1.2 几何最值问题.....18
3.2 理论基础.....21
3.2.1 杜威的“从做中学”理论.....21
3.2.2 波利亚的“怎样解题”理论.....22
3.2.3 信息化教学理论.....23
4 初中生几何最值问题的学习现状调查.....24
4.1 调查研究设计.....24

中国知网 https://www.cnki.net

4.1.1 调查目的.....24
4.1.2 调查对象.....24
4.1.3 调查工具.....25
4.2 调查统计与分析.....28
4.2.1 学生测试卷统计与分析.....28
4.2.2 学生访谈统计与分析.....34
4.3 调查结果.....38
5 基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学策略.....40
5.1 网络画板辅助几何最值问题教学的优势.....40
5.2 网络画板辅助几何最值问题教学的策略.....41
5.2.1 创设多样化的问题情境,理清问题本质.....42
5.2.2 构建网络画板探究平台,鼓励解题探究.....43
5.2.3 利用网络画板技术支持,拓展变式训练.....45
5.2.4 深化几何最值模型应用,归纳解题方法.....47
6 基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学实践尝试.....49
6.1 实践目的.....49
6.2 实践对象.....49
6.3 实践过程.....50
6.3.1 教学设计分析.....50
6.3.2 课例Ⅰ:“两点之间,线段最短”原理求最值.....52
6.3.3 课例Ⅱ:“垂线段最短”原理求最值.....61
6.4 实践结果.....69
6.4.1 网络画板辅助教学有助于学生对“几何最值问题”专题的学习.....70
6.4.2 学生经历动手操作过程提升了网络画板的操作熟练度.....71
6.4.3 大多数同学希望在今后数学课堂中继续使用网络画板.....71
7 研究结论与反思.....73
7.1 研究结论.....73
7.2 研究反思.....74
参考文献.....75
附录 A:初中数学几何最值问题学生测试卷.....78
附录 B:学生访谈提纲.....80
附录 C:初中生对网络画板在数学课堂中应用的看法调查问卷.....81

中国知网 https://www.cnki.net

1 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 信息技术融入教学是新时代的要求

21 世纪是一个知识化、信息化、科技化的新时代，信息技术已经融入生活的方方面面，信息技术的进步也不断的推进教育的改革。2018 年教育部印发《教育信息化 2.0 行动计划》提出要持续推动信息技术与教育的深度融合，推动改进教学，全面提升师生信息素养。2020 年教育部公布了“国家级信息化教学试验区”，积极探索新形势下将信息技术全面融入教学过程的路径、方式和方法，充分利用信息化服务学生学习、服务教师改进教学、服务全面提高教学质量，以教育信息化带动实现教育现代化。可见，时代的发展不断推进信息技术与教育教学的融合，将信息技术引入课堂教学，能够使课堂内容更加丰富，使教学过程更具多样性，还能够给学生在学习过程中带来新的感观与不一样体验。所以，信息技术融入教学是课堂教学发展的必然趋势。

1.1.2 数学课程标准强调信息技术在教学中的应用

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《课标(2022 年版)》）指出数学课程的课程理念之一是促进信息技术与数学课程融合：合理利用现代信息技术，提供丰富的学习资源，设计生动的教学活动，促进数学教学方式方法的变革[1]。信息技术与初中数学课堂的有效融合能够提高初中数学课堂教学的质量，ggb、网络画板、几何画板、超级画板、皓骏动态作图软件等数学软件逐渐被引入中学数学课堂教学，相比于其他软件，网络画板更适用于初中数学教学和学习，它是我国第一款互联网环境下的理科教学工具，综合了动态几何系统（DGS）、计算机代数系统（CAS）和几何定理自动推理等，是一款跨平台的教学工具，能够很好的与第三方应用相结合，比如与微软的 PowerPoint 相结合、与希沃白板相结合等，相比于其它数学教学软件来说，它的操作更为方便简单。同时很多研究或开发人员对网络画板课件进行研发，以及研究网络画板在初中数学中的应用，这些都是为把网络画板作为辅助课堂教学的强有力的工具。所以，如何基于网络画板解决初中数学几何最值问题是我此次研究问题的重要部分。

中国知网 https://www.cnki.net

《课标(2022 年版)》在第四学段目标中提到，要让学生“经历图形的抽象、分类、性质探讨、运动、位置确定等过程，建立基本的几何概念，掌握基本的几何证明方法，形成推理能力，发展空间观念和几何直观。”课程目标作为教学评价的基本导向，在试题的编制中也得到了相应的体现。几何最值问题是考察几何图形运动思维的载体，蕴含图形的抽象、分类等数学思想，是符合新课程理念的一类问题。

1.1.3 几何最值问题是初中数学教学的重难点

随着新课程改革的不断深入与发展，对几何与代数融合方面的知识考察的更加灵活，常常将函数问题与几何最值问题综合起来考察。几何最值问题由于其综合性广，变式性强，数学思想蕴含丰富，因此成为各地中考的热门题型，且通常以“压轴题”的形式出现。

为了更加深入地了解目前中考对于几何最值问题的考察情况，笔者汇总了重庆市近年来中考数学 A 卷中几何最值问题的考察情况，如表 1.1 所示，表中的题号表示这道题所在试卷中大题的序号，而这个问题只是这道大题中的其中一个小问，分值为这道大题整体的分值。

表 1.1 重庆市 2016-2022 年中考数学 A 卷几何最值问题数量统计

年份	题号	问题	分值
2016	26	求 $PM+MN+NA$ 的最小值	12
2017	26	求 $KM+MN+NK$ 最小值	12
2018	26	求 $PH+HF+\frac{1}{2}FO$ 最小值	12
2019	26	求 $HF+FP+\frac{1}{3}PC$ 最小值	8
2020	25	求 $\triangle PAB$ 面积最大值	10
2021	26	求 $PA+PB+PC$ 的最小值	8
2022	25	求 $PC+PD$ 最大值	10

由表格可知，几何最值问题一直是重庆市中考的必考题型之一，考察方式是与二次函数的结合，通常位于第 25 题或第 26 题压轴题的位置，由此可见它的重要性与难度。

中国知网 https://www.cnki.net

笔者作为实习生，实习于重庆市一所重点中学的初三年级，发现该校初三年级学生对于几何最值问题掌握地不理想，对于几何图形的变换和性质的应用也存在诸多困难。对于初中生来说，面对综合性强、涉及知识面广、极具灵活性的几何最值问题时常常无从下手。最主要的原因之一在于学生无法用图形或者数据描述出点或线在移动的过程中所产生的轨迹，进而无法判断其最值。而不断涌现的数学信息技术工具能够很好的帮助学生解决这一难题，为了让每个学生都能够自己动手去探索，笔者选择了网络画板作为辅助工具，帮助学生在网络画板的辅助下解决几何最值问题。

1.2 研究问题与意义

1.2.1 研究问题

基于信息技术融入教学是新时代的要求、数学课程标准强调信息技术在教学中的应用以及初中数学几何最值问题是教学的重难点，确定了本研究的总问题是：如何基于网络画板进行初中数学几何最值问题的教学？

基于此，提出了四个子问题是：

① 初中生解决几何最值问题的现状如何？

② 使用网络画板进行初中数学几何最值问题教学有哪些优势？

③ 基于网络画板的初中数学几何最值问题有哪些教学策略？

④ 如何开展基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学实践？

1.2.2 研究意义

任何研究的开展都是有其道理和意义的。几何最值问题一直备受研究者以及一线教师的关注，致力于研究能够提高学生解题效率，发展学生解题思维的策略或方法，亦或是为教师进行几何最值问题专题教学带来参考或启发。笔者选择利用现代化信息技术工具——网络画板来辅助几何最值问题教学，具有独特的研究意义，包括理论意义和实践意义两方面。

① 理论意义

美国教育家杜威的从“做中学”的思想告诉我们“教学过程应该就是‘做’的过程”，让学生通过活动进行探究学习，能够激起学生的学习兴趣，在活动中探究出新的知识。波利亚的“怎样解题表”表示解决数学问题分四个步骤：弄清题意，拟定方案，执行方案与回顾，缺一不可。对于抽象和难以理解的知识可借助

中国知网 https://www.cnki.net

信息技术，例如网络画板来辅助课堂教学。基于此，笔者提出利用网络画板进行几何最值问题教学的优势、基于网络画板的初中数学几何最值问题教学的策略、教学设计以及教学案例，以几何最值为载体，以此丰富几何课程的研究和教学内容。

② 实践意义

初中数学中的几何最值问题涉及的知识点多，综合性强，难度大，通常以压轴题的形式出现，一直以来都是学生学习的难点之一，学生遇到几何最值问题时，常常面露难色，心中充满了恐惧。教师在教授几何最值问题时，往往以讲授式的教学方式直接将最值的做法传输给学生，学生只知其然而不知其所以然，随着时间的推移最值的做法也随之而遗忘。

学生的学习过程应该是生动活泼的，主动参与的，积极思考的，所以教师在教学过程中带领学生利用网络画板自主或小组合作探究几何最值问题，能够让学生在自我实践中解决几何最值问题，达到不仅知其然还知其所以然的目的。

1.3 研究目的与内容

1.3.1 研究目的

通过查阅网络画板在数学教学中的应用情况、初中生几何最值问题的学习情况等相关的文献，发现初中生在学习图形与几何部分的最值问题时存在很大问题。随着信息技术工具的逐渐普及，教师在教学过程中采用数学信息技术工具，例如几何画板、GGB 等工具辅助教学，提高了课堂教学效率。而网络画板作为我国自主研发的第一款互联网数学教学工具，能够实现教师使用工具辅助教学向学生使用工具帮助学习的转换，使学生自主动手探索数学知识。所以笔者根据波利亚的“怎样解题表”理论确定基于网络画板的初中数学几何最值问题教学的策略，并设计教学案例用于实践尝试，以期为教学提供较为新颖的课堂教学模式，为数学教师使用网络画板进行教学提供参考，最终提高课堂教学效率。

1.3.2 研究内容

基于上述研究问题，确定本研究的研究内容是：

① 初中生几何最值问题的学习现状。编写几何最值问题测试卷发放给重庆市两所初级中学初二年级各两个班共四个班进行测试，再从测试的同学中选择具有

中国知网 https://www.cnki.net

代表性的同学进行访谈。通过测试卷和访谈的结果来分析初中生几何最值问题的学习现状。

② 基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学策略。首先查阅网络画板、几何最值问题的相关文献，确定教学的理论基础，再根据波利亚的“怎样解题表”理论，在教学过程中采用探究式教学法，确定教学环节，最后设计在每个教学环节中采用的不同教学策略。

③ 使用网络画板进行初中数学几何最值问题教学的优势。基于对网络画板本身特点的研究和查阅与信息技术辅助几何最值问题的相关资料，总结得出网络画板辅助初中数学几何最值问题教学的优势。

④ 基于网络画板的初中数学几何最值问题的案例设计以及实践尝试。根据学生的学习现状以及教学策略设计教学案例，并进行实践尝试，通过问卷调查了解学生对网络画板辅助数学课堂教学以及学生使用网络画板进行学习的看法。

1.4 研究思路与方法

1.4.1 研究思路

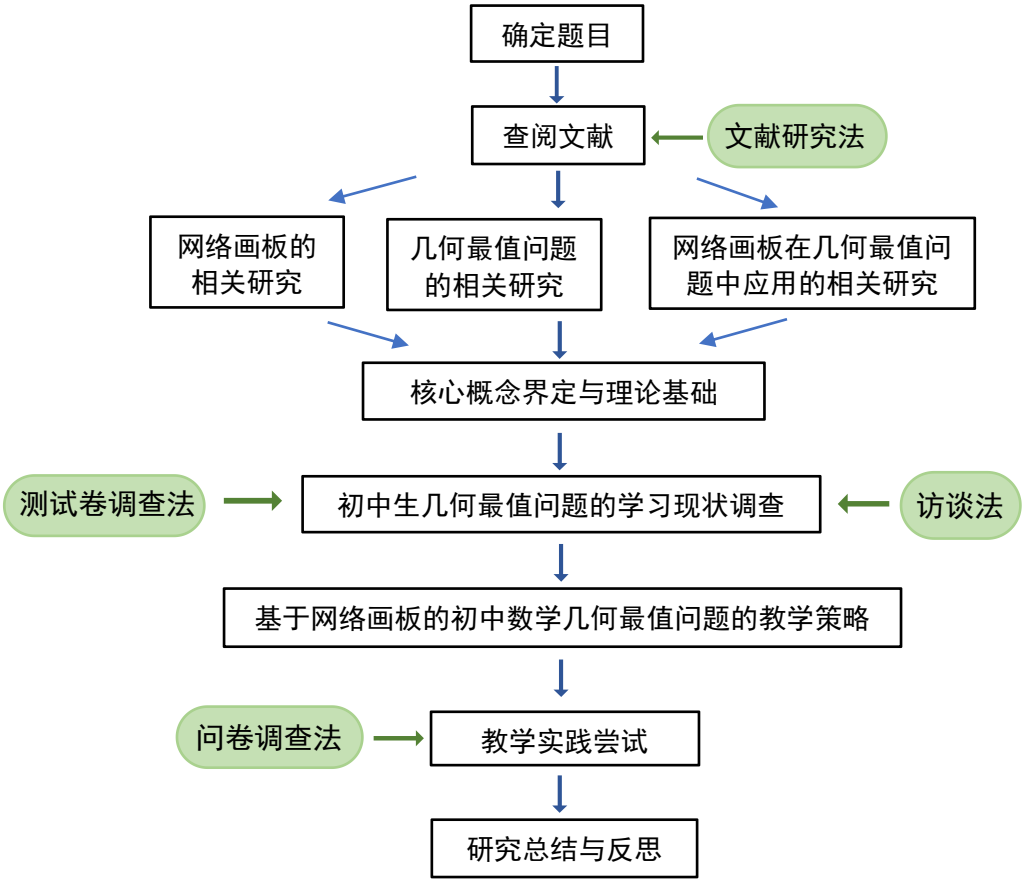


图 1.1 研究思路框架图

中国知网 https://www.cnki.net

本文先通过文献研究法查阅网络画板和与初中数学几何最值问题相关的文献，在文献研究的基础之上，对相关概念进行界定，梳理本研究所需要的理论基础。再通过学生问卷和学生访谈调查初中生几何最值问题的学习现状，在理论基础和现状基础之上确定了网络画板辅助几何最值问题教学的优势，根据波利亚的怎样解题表环节设计网络画板辅助几何最值问题教学的策略。最后进行教学实践尝试，再一次采用学生问卷调查了解学生对网络画板辅助数学课堂教学以及学生使用网络画板进行学习的看法。研究的最后，进行总结与反思。

1.4.2 研究方法

① 文献研究法

通过在知网、万方、维普等各大数据库查阅大量文献，整理与网络画板、网络画板与数学教学、初中数学几何最值问题等相关的期刊文献，对期刊文献进一步分析与整理，界定初中数学几何最值问题的概念，整理网络画板辅助几何最值问题教学的优势，作为本论文的研究基础。

② 测试卷调查法

为了了解初中生几何最值问题的解题情况，根据几何最值问题的分类，参考有关几何最值问题的初中数学教材和以及数学试卷中有关几何最值问题的试题编写几何最值问题的测试卷。

③ 访谈法

在测试卷的结果之上，选择部分学生进行访谈，通过访谈了解学生对初中几何最值基本问题的掌握情况、做几何最值问题时遇到的主要困难及具体原因、对信息技术辅助几何最值问题教学的认同度和学生在几何最值问题学习过程中多媒体技术辅助学习的情况，特别是对网络画板的了解程度。

④ 问卷调查法

在教学实践的基础之上，通过设计学生问卷，调查接受过实践教学的学生，了解学生对教师在“几何最值问题”专题教学过程中使用网络画板的看法、对自己在“几何最值问题”课堂学习过程中使用网络画板的看法以及对网络画板辅助初中数学课堂教学和学习的看法。

中国知网 https://www.cnki.net

2 文献综述

为了了解网络画板与数学教学、初中数学几何最值问题的研究现状，在 CNKI 中分别以“网络画板”、“几何最值问题”为检索词进行主题搜索，检索时间截至 2023 年 2 月。

以“网络画板”为检索词进行主题搜索，共检索出 103 篇文献。再根据研究主题的需要，对检索出的文献一一略读，去除和网络画板数学教学无关的文献，总共获得 39 篇与本研究主题密切相关的文献资料，其中期刊文献 20 篇，硕士学位论文 13 篇，以及国内会议 6 篇，预测 2023 年将会有相关文献 17 篇。图 2.1 为与网络画板相关的文献发表年度趋势图，图象呈上升趋势，说明近年来，网络画板将越来越受研究者所重视。

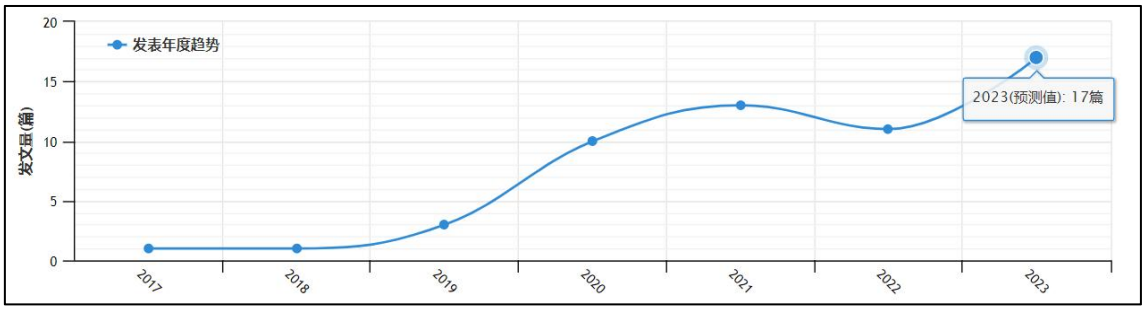


图 2.1 与网络画板相关的文献发表年度趋势图

以“几何最值问题”为主题、以“初中”为篇关摘进行高级检索，共检索出 236 篇文献，其中学术期刊有 9 篇，学位论文有 18 篇，会议 1 篇，预测 2023 年将会有 27 篇与该主题相关的文献。图 2.2 为与初中数学几何最值问题相关的文献发表年度趋势图，从图象来看，近年来与初中几何最值问题相关的研究文献发文量相对波动比较大，但整体呈上升趋势，说明初中几何最值问题具有研究价值，将会有越来越多学者展开研究。

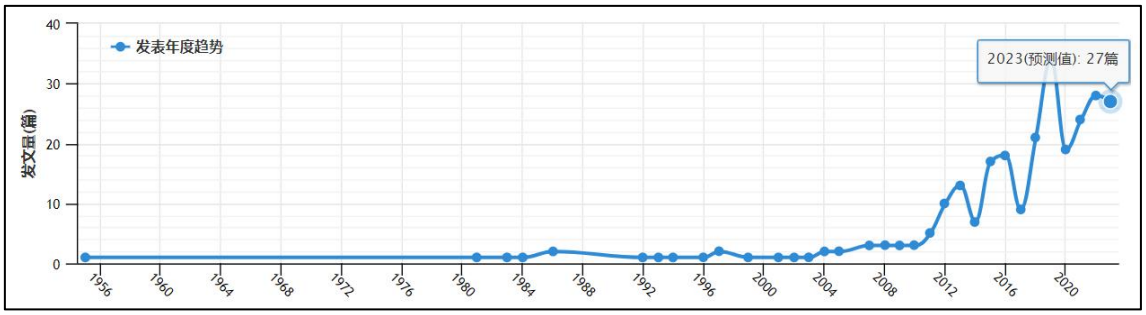


图 2.2 与初中数学几何最值问题相关的文献发表年度趋势图

中国知网 https://www.cnki.net

当在高级检索中同时输入两个主题词“网络画板”、“几何最值问题”进行检索时，检索不到任何数据，更换“主题词”检索为“关键词”检索时依旧检索不到数据，说明网络画板在初中数学几何最值问题中的研究还是空白。

梳理整个检索情况发现，研究者们对几何最值问题研究相对较多，而由于网络画板发行时间较短，所以与其相关的研究很少，因此希望通过本文的研究能够为网络画板的研究做一些补充，同时丰富几何最值问题相关内容的研究。

2.1 网络画板的相关研究

网络画板是张景中院士携其团队在《超级画板》的基础上开发的国内第一款互联网环境下的理科教学工具，于 2016 年正式发布，具有完全自主的知识产权。它结合了动态几何系统（DGS）、计算机代数系统（CAS）和几何定理自动推理等功能，是一款跨平台的动态数学教学工具，具有多终端、跨平台、操作方便、储存安全等特点。

2.1.1 网络画板的发展历程

1996 年，我国引入被誉为“21 世纪动态几何”的美国汉化版的《几何画版》。历年来，研究几何画板在数学教学中的应用的相关内容层出不穷，全国各地不少中小学教师在教学中借助几何画板辅助教学。

2001 年，我国发行了第一款自主研发的动态数学教学软件“Z+Z 智能教育平台——超级画板”，集成了数学人工智能领域的研究成果，广大教育工作者和一线教师先后进行教学实践与推广，使其不断完善，趋于成熟。

2008 年，《超级画板》作为中国唯一代表，在世界数学教育大会介绍演示。

2015 年，张景中院士携《超级画板》原班人马致力于开发适合移动互联网时代的动态数学软件。

2016 年，新一代互联网动态数学软件——网络画板面世。

2019 年，平台用户超过 35 万，汇聚课件资源超过 13 万。出版了网络画板的初等教程书籍《互联网+动态教学 网络画板推进数学教学变革》，以此满足教师教学，资源建设的需要，主要讲述网络画板利用互联网改变教育资源生成、传播和分享模式，推动教育信息化发展的相关内容[2]。

2019 年 12 月，第一届网络画板研讨会“网络画板与学科深度融合应用研讨会”在成都召开，会议报告了互联网时代下数学教学改革和网络画板支持下的数学课

中国知网 https://www.cnki.net

程资源建设，并观摩优秀教师的现场课堂教学，分享网络画板在课堂教学融合中的成果。

2020 年出版高级教程《互联网＋动态教学 网络画板高级教程（上下两册）》，收录了每一期周赛的优秀作品，为已经具备了初等水平的用户提供进一步学习的资源。

2022 年 1 月 10 日，开展了《中小学数学教师信息化教学能力显著提升的研究与实践》成果总结交流会（网络画板板块），提出了数学教师信息化应用能力显著提升的实践方案，形成了大量的实践经验、论文、视频、专著、校本课程等。

“动态几何”已经发展成“动态数学”，网络画板根据教学和学习的实际需要，将动态几何和符号演算、自动推理、编程环境以及课件制作等做了有机的集成，为数学教学提供了强有力的辅助教学工具。

2.1.2 网络画板与数学教学相结合的相关研究

在网络画板与数学教学相关的文献中，发表时间最早的一篇是 2017 年 9 月 20 日“第二届全国中小学数字化教学研讨会论文集”中樊广顺的《信息技术与课堂教学融合的实际应用——基于网络画板的数学教学实践》[3]，重点探究了网络画板下的数学实验与教学实践，并列举了几何中的最值问题、代数中的反比例函数和二次函数等实例，结果表明基于互联网技术开发的网络画板功能完善，操作方便灵活，简单易学，是比较理想的数学实验平台。

此后，在第四届（2019）、第六届（2021）中小学数字化教学研讨会中均发布了网络画板与数学教学的相关文献。

第四届研讨会上，樊继珍提出成立网络画板社区，以社团化发展为模式推进信息技术与教育教学的双向融合，促进教育教学网络化的发展[4]；宋秋妹借助网络画板解决初中数学图形变换教学中直接讲解变换中平移、旋转、翻折、对称的概念过于抽象等问题[5]。

第六届研讨会上，曾召文在《动态数学：化繁为简、化静为动、化虚为实——运用网络画板优化小学数学课堂教学》[6]中指出网络画板对数学教学和学生学习都具有积极推动作用，提出通过教学实践发现网络画板能起到化繁为简、化静为动、化虚为实的作用，对小学生的理解、分析、比较、抽象、推理等思维能力的培养具有积极的作用；张朝立以“圆周角”教学为例，以实例展示网络画板在初中数学几何教学中的应用，并指出网络画板有助于培养学生的几何直观能力，有助于突破课堂教学重难点，促进了数学教学多元化的有效实现[7]。

中国知网 https://www.cnki.net

从历届研讨会中可以看出，网络画板一直处在被研究的前端，网络画板自身在发展的同时，研究生者们也逐步致力于研究网络画板与中小学数学教学相结合，促进信息技术与数学教学的双向融合，将网络画板向教学一线推进。

（1）网络画板能够应用在数学教学中的多个板块。

在“数与代数”部分，大部分学者都是将网络画板融入到函数教学中，例如白东云[8]以“反比例函数的图象与性质”为例、邵俊雯[9] 和方王洋以二次函数为例、尹洁和侯小华[10] 应用到高中函数教学中。贺媛[11]系统地研究了网络画板在初中函数教学中的应用，函数本身是很抽象的概念，利用网络画板能够将抽象动态的图象用画板直观展示出来，还能动态演示变化过程，有效帮助学生对函数的理解。

在“图形与几何”部分，网络画板既可以运用在平面几何例如多边形内角和的教学[12]、圆周角的教学[13]和图形的变换[14]等教学当中，也能够运用在立体几何教学中，例如“球的表面积与体积”的教学[15] 中等。龙应菊[16]系统地研究了基于网络画板的初中数学“图形与几何”教学的优势有互动探究性、智能推理性和启发拓展性。

在目前的文献当中，网络画板多应用于“数与代数”、“图形与几何”两个板块，在“概率与统计”和“综合与实践”板块中也有很大价值，还有待继续研究。 通过以上的教学实践研究最终认为应用网络画板在初中数学教学中能够激发学生学习兴趣，提高学习效率和成绩，同时还能提高教师的教学水平和科研能力。

（2）网络画板有助于培养各个学段学生的思维能力和相关素养

小学阶段，李萌[17]指出应用网络画板进行数学课堂教学，可以提升小学生的数学抽象思维能力，杜佳佳[18]从小学课程标准和核心素养出发，提出应用网络画板培养小学生几何直观能力的教学策略，并通过实践证明了策略的有效性和可行性。中学阶段，邱雪莲[19]从初中数学课程标准出发，构建基于网络画板的探究式教学模式，提出提升学生高阶思维能力的策略，促进学生高阶思维能力的培养；李赵荣[20]的实验研究表明基于网络画板培养高中生直观想象的教学策略可以有效促进高中生知识与技能的学习，可以促进作图、识图、以图分析问题形成解题思路能力的培养，可提升高中生的直观表达与数形结合能力，培养高中生的直观想象素养。

（3）网络画板有助于数学课堂教学

伍雪莲[21]在《基于网络画板的初中数学探究教学研究》中就初中数学探究教学中如何合理应用网络画板，开展了理论与实践两方面的研究；郭宴宏[22]提出网络画板可以将数学的抽象变得生动形象，通过动手操作培养学生的抽象性、逻辑性等；向红瑜[23]将网络画板、武侯三顾教育云和智学网的教学资源在数学教学中进行案例分析，认为利用好网络资源对教学效果、教学设计、课堂师生交互、发挥学生主体性、学生自主学习、了解学生学情等具有积极作用；王素媚[24]以网络

中国知网 https://www.cnki.net

画板为教学辅助工具，探讨在函数教学中渗透数形结合思想的教学效果，帮助学生更有效的学习数学。

2.2 初中数学几何最值问题的相关研究

根据研究主题的需要，对以“几何最值问题”为主题、以“初中”为篇关摘所检索出来的文献进行梳理，发现对初中数学几何最值问题的研究主要集中在解法探析与解题策略研究、不同理论基础的几何最值问题研究、教学设计与教学实践研究、几何最值问题的解题障碍与对策研究。

2.2.1 关于几何最值问题的解法探析与解题策略的研究

刘永智[25]提出解决几何最值问题首先要仔细体会题目所给条件，进行合情推理，得出求解思路，再利用逻辑推理写出求解过程。张海霞[26]建议学生在解决几何最值问题时要把握好常见的类型，透过现在看本质，深度挖掘题目背后的知识点，再结合相关知识来进行转化，以达到化繁为简的目的。杨世奇[27]以最值问题的历史故事为原型，通过对历史故事的分析，运用理性思维转化数学史模型。

丁力[28]以“将军饮马”问题模型的解题策略为例，提出用动态的眼光来审视问题，求解几何最值问题过程中可以视为化“动”为“静”。韩雨池[29]建议同学们求解几何最值问题时要善于总结，灵活掌握利用两点之间线段最短原理、垂线定理求解最值问题，利用三角形三边定理求最值问题的方法技巧。

在解法探析和解题策略研究中，各学者的解题思路基本是一致的，仔细审题，熟练掌握常见的最值问题的类型，将具体问题模型化，利用模型原理求解。

2.2.2 关于几何最值问题的解题障碍与对策的研究

朱江在《初中几何最值学习障碍与改正策略分析》[30]中认为学生在学习几何最值问题时存在记忆障碍、操作障碍和思维障碍，并提出了相应的改正策略，分别是以概念表征加强记忆、避免“几何经验主义”，减小负迁移的影响、培养推理能力，发散数学思维。李宛姗[31]研究了初中生在二次函数背景下几何最值问题的错误类型以及解题障碍，发现学生学习的障碍主要有思维性障碍、知识性障碍和心理性障碍，并在学生认知水平下进行解题对策研究。汤奎在[32]利用问卷和测试卷对某中学初中生几何最值学习障碍进行调查，通过定性和定量两方面分析学生

中国知网 https://www.cnki.net

的障碍类型以及成因，建立了几何最值学习障碍框架，并据此提出了具体的教学策略。

2.2.3 关于不同理论基础下的几何最值问题的研究

基于核心素养背景下，蒋雁[33]研究了初中几何最值问题的解题方法，提出教师在数学课堂中，必须围绕核心素养来展开自己的教学，多涉及情境教学来提高学生的学习兴趣、多设置操作环节训练学生的动手能力等发展学习综合能力。

在数学学习过程中利用数形结合思想能够以数化形，以形换数，郑胜[34]和戚容睿[35]分别都提出将一个抽象的代数问题转化为直观、简明的几何问题，用数形结合的思想解决最值问题，能够将具体和抽象，简单和复杂互换，从而培养学生的数学思维、提高学生的数学分析能力、学习效率。

徐欣[36]从理论的一致性、形式的互补性和价值的趋同性三个方面对变式视角下初中动点问题的内在性进行一致性分析，验证了两者相互促进、相互依赖的关系，并针对变式视角下五种不同类型初中动点问题，提出了相应的教学措施建议。

此外，王玉梅[37]提出在解题过程中要寻找变量与不变量，辨析问题中变量所涉及到的数学概念，体会数学概念在突破几何最值问题中的有效性。郭小蔚[38]探索如何利用微课解决几何中的动点问题，将几何画板与微课有机的融合，促进学生更好地理解几何动态问题解决思路和方法。

从以上综述来看，初中数学中的几何最值问题一直以来都是考试的重点内容，也是学生学习的难点，研究几何最值问题的解法和分析学生面临几何最值问题的障碍的文章屡见不鲜，说明研究初中数学几何最值问题是具有实践意义的。

2.3 基于网络画板的初中数学几何最值问题的相关研究

笔者分别对网络画板、初中数学几何最值问题的相关文献进行了研究，研究发现网络画板与初中数学“图形与几何”内容相结合的研究内容虽然较多，但是暂时还未细化到几何最值问题专题。同样，信息技术辅助初中数学教学也有很多，但目前研究大都以几何画板为主，其次是 GGB 等，网络画板研究的比较少。所以笔者梳理了几篇初中数学与信息技术相结合的具有代表性的文献，作为相关文献的补充。

王思敏[39]从理论与实践两方面展开研究，以 Hawgent 皓骏动态数学软件为载体，探究动态技术融合动态几何问题教学设计及应用策略，为动态数学技术融入数学课堂的教学探索提供了参考及建议。吴世平[40]总结了计算机辅助教学的优势，

中国知网 https://www.cnki.net

提出了计算机辅助数学教学的理论基础，针对初中几何知识的特点列举了适合计算机辅助数学教学的相应教学实例，认为计算机辅助手段的恰当使用能够有效突破初中几何教学难点，优化学生的学习效果。梁哲溪[41]提出超级画板作为国内自行研发的软件，在动点题的教学过程中有很好的优势，适合辅助动点题的讲解。刘珠伊[42]认为以几何画板为代表的计算机辅助数学教学的工具因其动态性强和交互性强的特点在动点教学方面有着独特的优势。宋秋妹[5]指出网络画板云平台可以使抽象的图形变换形象化，直观化，在教学中动态展示变换过程，能够突出教学的重点，带领学生观察变换过程，能够突破教学的难点。

2.4 文献小结

从以上综述来看，网络画板在数学教学中的应用研究热度正在逐渐提升，已被应用于中小学数学各阶段。但由于网络画板发行时间比较短，所以相关文献数量相对有限，目前在教学应用上还处于启蒙阶段。通过对已有的文献进行综合分析发现，网络画板在中学阶段的应用较多余小学，而中学阶段又主要以初中为主。研究内容主要分为三类：大部分学者是应用网络画板辅助数学课堂教学培养学生几何直观能力、数学抽象思维能力等数学能力，提出应用网络画板培养其能力的策略，进行案例设计并实践证明；另一部分学者主要进行网络画板在某一数学专题中的应用与实践研究，设计具体的教学案例并实践，证明在这个专题中应用网络画板辅助教学对学生数学学习有帮助；第三类学者是研究如何将网络画板有效的应用到数学课堂教学中，进行与探究教学、概念教学等相结合的研究。

随着网络画板的不断完善与发展，与网络画板相关的研究也在逐渐增多，逐步从各个方面展开对网络画板与数学教学相结合的研究。对于几何最值问题，大多数学者还停留在对解法探析、解题策略、学生的解题障碍与不同理论基础下的研究等，而信息技术辅助数学教学能够将平面图形中的动点问题用动态的图形展示出来，让学生能够直观感受变化的过程以及判断在变化过程中产生的几何量之间的最大值和最小值，对学生的数学学习特别是解决几何最值问题具有积极的作用。

从数学课堂教学发展来看，应用信息技术辅助教学是必然趋势，而网络画板无疑是目前使用最便捷的数学教学辅助工具，有无需下载软件，无需登录账户，基础电子设备如手机、平面、一体机等都可直接使用等优势，能够更高效的让学生参与其中，学生可以自主动手操作，方便快捷，利于学生的使用与学习，而初中数学中几何最值问题一直是令学生比较头疼的部分，如果能将几何最值问题用网络画板动态展示出来，一定会对学生的理解带来积极的影响。同时，通过查阅

中国知网 https://www.cnki.net

文献，笔者发现运用网络画板进行初中数学几何最值问题教学的相关文献没有，所以笔者尝试研究网络画板辅助初中数学几何最值问题教学，并将从理论与实践两方面研究网络画板对初中生学习几何最值问题的积极影响，以期填补网络画板辅助初中数学几何最值问题教学相关内容的空白。

中国知网 https://www.cnki.net

3 概念界定及理论基础

本章主要通法查阅相关文献和网络资料分别对网络画板和几何最值问题的概念进行了界定，并从基于网络画板的初中数学几何最值问题教学的理论角度进行了分析，确定了本研究的理论基础是：杜威的“从做中学”理论；波利亚的“怎样解题”理论；信息化教学理论。

3.1 概念界定

3.1.1 网络画板

网络画板[43]是互联网时代下的新一代动态数学交互平台，是传统动态几何软件的互联网升级。为适应互联网环境下教育信息化发展新趋势，吸收传统动态数学软件的特点，运用国内领先的动态几何技术、智能推理技术、符号运算和网络交互技术开发的一款国内领先的互联网环境下的数学教学工具和资源平台。利用互联网改变教育资源生成、传播、分享模式，助力中小学数学资源开发，推动基础学科教育信息化的发展。网络网板首页界面如图 3.1 所示，网络画板作图页面如图 3.2 所示。

图 3.1 网络画板首页界面

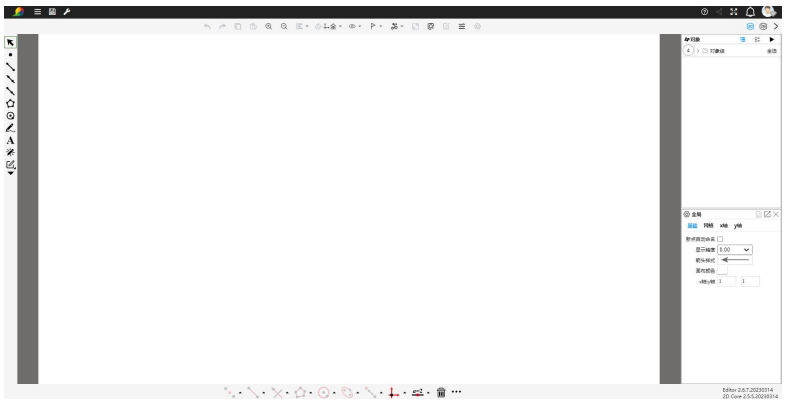


图 3.2 网络画板作图页面

中国知网 https://www.cnki.net

网络画板的制作发行目的是希望能够通过教师在课堂上利用多媒体技术，在教学中增加直观性和趣味性，让学生有更大的探索空间，从而降低学习的难度。同时也是给有网络学习环境的学生提供了数学辅助学习工具，学生可以根据自己的兴趣或者在老师的指导下进行探索，培养积极思考、主动探索的精神。

网络画板的特点如下：

① 完全基于互联网环境研发，是真正的互联网+动态教学工具

网络画板有网即可使用，是国内第一款真正的互联网动态数学产品，无需下载客户端。相比于目前流行的其他软件，如几何画板、GGB、皓骏动态软件等都是单机产品，需要下载客户端，安装在 PC 环境下后使用。

② 支持多种终端

随着中小学信息化发展的不断深入，教学环境从传统的黑板加粉笔增加了 PC 机，到现在逐渐普及电子白板、班班通、平板电脑等，给信息技术辅助教学提供了强有力的环境。相比于基本都是基于 Windows PC 环境下的国内其它产品，网络画板具有较大普及优势，可以支持手机、PC、各类平板、电子白板等多种终端环境。

③ 跨平台

学校应用的终端操作系统是多元化的，windows、IOS、安卓等多种系统共存，网络画板采用标准的 HTML5 技术开发，能够在以上各操作系统环境下流畅运行。

④ 网络画板丰富的分享方式

网络画板的课件就是一个网页超链接，可以通过课件的网页链分享到各种社交平台上，如微信、微博、QQ、学生人人通的空间等。如图 3.2，这是一个“正多边形深井迭代”的动态资源的分享页面，分享方式有三种。第一，直接复制浏览链接 https://www.netpad.net.cn/resource_web/course/#/582050，分享给任何社交平台，点击链接打开。第二，复制通用代码，嵌入到其它站点，即在其它网页端也能打开此平台的该资源链接，具体代码是：<iframe allowfullscreen width="772" height="434" src="https://www.netpad.net.cn/presentationEditor/presentationPlay.html#582050" frameborder="0" 。第三，直接使用手机扫描二维码，即可获取动态资源。

中国知网 https://www.cnki.net

图 3.3 “正多边形深井迭代”分享页面

⑤ 网络画板与第三方系统无缝整合

网络画板支持与 PPT、Word、金山专业版文字处理系统无缝嵌入，可以把网络画板的课件以超链接的形式插入上述的系统中，实现传统文字处理系统与动态数学课件的完美结合。同时网络画板提供第三方 API（应用程序编程接口）接入接口，支持与各种网站系统、教师个人空间及各应用 APP 的无缝整合嵌入。

⑥ 丰富的资源汇聚

网络画板用户创建的资源全部汇聚到网络画板云端，可以为师生提供大量课件资源，用户可以在资源页面的搜索框中根据关键词进行搜索，或者根据素材或活页的分类输入素材编码进行搜索，搜索完成后便可浏览或借鉴所需要的资源。

资源分三个板块，用户资源包、精品资源包和资源广场，截止 2022 年 7 月，共有 2600 多个用户资源包，每个资源包中的课件数量由几个到上万个不等，可以是团队用户开创的资源包，如网络画板官方团队的资源包中汇集了每一期的周赛获奖作品和参与作品、各中学的数学课题组，还可以是个人用户创建的资源包。精品资源包总共 400 个左右，主要分为同步教、同步学和拓展学。同步教包括小学、初中、高中、和中职数学根据不同年级，不同版本教材所创建的资源包；同步学主要分为高考和中考，但目前高考一栏中还未收录作品；拓展学包括数学实验和数学拓展；除此之外还有名师资源、比赛培训资源、区域学校资源等。资源广场目前更新的数量接近 48 万多。直到现在，每个资源包中的数量任在不断更新，不断增加新的作品和成果，资源广长也在不断“壮大”。

⑦ 支持离线播放工具

考虑到教学的实际环境存在没有网络的可能，所以网络画板提供了单机版软件，在没有网络或者网络不稳定的情况下也可以正常使用课件。

网络画板教学资源的获取、生成、修改和发布的模式，通过互联网极大的提高了资源的传播效率，教学资源可由多个用户进行二次或多次协同生成，使一个课件融合多个用户的理解和认识，大大减少了用户学习、使用课件与获取资源的难度。

中国知网 https://www.cnki.net

3.1.2 几何最值问题

《课标（2022 年版）》和各个版本的中学数学教材中均没有对几何最值问题、动态几何问题等进行定义，但几何最值问题早已是中考数学的必考题型之一，日常考试中常以填空题的形式的出现，在初三综合复习和中考卷中常常以压轴题的形式出现，并结合二次函数统筹考察，难度较大。

笔者通过中国知网、网络搜索引擎等方式搜索“几何最值问题”这一词条，寻找与此概念有关的相关资料，并进行了综合分析，在此基础上得出了本研究中的“几何最值问题”的概念。如表 3.1 列举了部分研究中的“几何最值问题”的定义。

表 3.1 “几何最值问题”的定义

定义一：	几何中的最值问题包括“面积问题”及“线段（和、差）最值”；
定义二[44]：	几何最值问题是指在一定的条件下，求平面几何图形中某个变化的量（如线段长度、角度大小、图形面积等）的最大值或最小值问题。
定义三[32]：	几何最值问题是动态几何图形中的某些几何元素，在特定条件下运动，引起另一些几何元素的位置、数量等关系发生变化时，求其变化过程中的最大值或最小值问题。

综合以上这些观点，再根据本研究的研究目的和内容，得出本研究中“几何最值问题”的概念是：平面几何图形中存在两类点，分别是动点和定点，动点在特定的条件下运动，能够引起图形中的线段长度发生变化，求其变化过程中线段长度或线段长度和的最小值的问题，就是本研究中所指的几何最值问题。

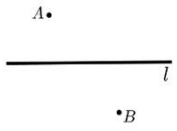
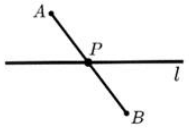
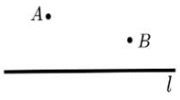
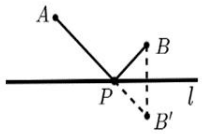
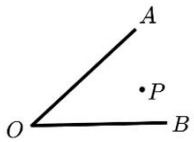
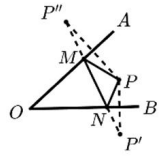
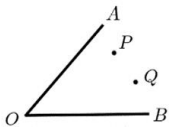
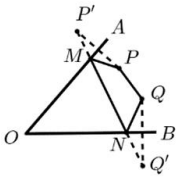
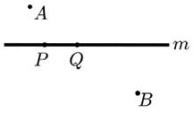
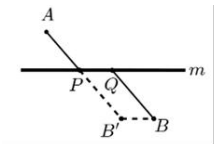
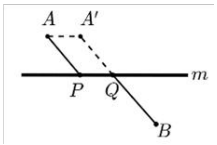
笔者根据本研究中几何最值问题的定义及初中课标和教材中所考察的，要求学生掌握的几何最值问题按原理分成两大模型，再根据动点和定点的个数分为不同的类型，模型一有六个类型，原理是“两点之间，线段最短”，如表 3.2；模型二有三个类型，原理是“垂线段最短”，如表 3.3。

① 模型一：“两点之间，线段最短”原理

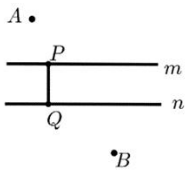
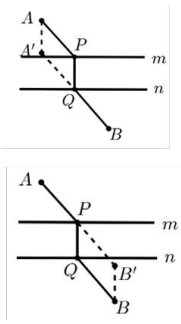
表 3.2 几何最值问题模型一分类

类型	模型分析	基本模型图	基本模型解析图

中国知网 https://www.cnki.net

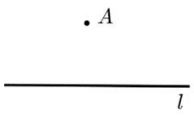
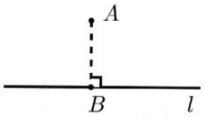
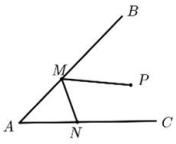
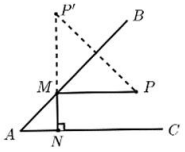
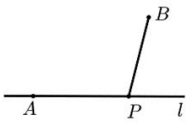
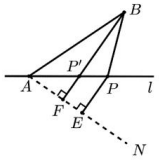
类型 1： “一动两定”型 （异侧）	如图：两定点 A 、 B 位于直线 l 异侧，在直线 l 上找一点 P ，使 $PA+PB$ 值最小		
类型 2： “一动两定”型 （同侧——将军饮马）	如图：两定点 A 、 B 位于直线 l 同侧，在直线 l 上找一点 P ，使 $PA+PB$ 值最小		
类型 3： “两动一定”型	点 P 是 $\angle AOB$ 内的一定点，在 OA 上找一点 M ，在 OB 上找一点 N ，使得 $\triangle PMN$ 周长最小		
类型 4： “两动两定”型	点 P、Q 是 $\angle AOB$ 内的两个定点，在 OA 上找一点 M ，在 OB 上找一点 N ，使得四边形 $PQMN$ 周长最小		
类型 5： “造桥选址”型 （横向造桥）	A、B 是定点， P、Q 是直线 m 上的两个动点， P 在 Q 的左侧，且 PQ 间长度恒定，在直线 m 上要求 P、Q 两点，使得 $PA+PQ+QB$ 的值最小		 

中国知网 https://www.cnki.net

类型 6： “造桥选址”型 （纵向造桥）	A、B 是定点，P、Q 分别是直线 m、n 上的两个动点，PQ 间长度恒定，要求 P、Q 两点，使 $PA+PQ+QB$ 的值最小		

② 模型二：“垂线段最短” 原理

表 3.3 几何最值问题模型二分类

类型	模型分析	基本模型图	基本模型解析图
类型 1： “一动一定”型	点 A 是直线 l 外一定点，求点 A 到直线 l 的最短距离		
类型 2： “两动一定”型	直线 AB、AC 相交于点 A，点 P 是平面内一定点，点 M、N 分别是 AB、AC 上的动点，求 $PM+MN$ 最小值		
类型 3： “一动两定”型 （胡不归问题）	点 A 为直线 l 上一定点，点 B 为直线 l 外一定点，点 P 为直线 l 上一动点，求 $kAP+BP$（$0<k<1$）的最小值		

说明①：本论文中所使用的教材是北京师范大学出版社出版的初中数学教材（简称“北师大版”）。初中数学平面图形中的几何最值问题主要由两个基本公理作为理论基础，第一个是七年级上册第四章第二节“比较线段的长短”中所学的公理一：两点之间，线段最短；第二个是七年级下册第二章第一节“两条直线的

中国知网 https://www.cnki.net

位置关系”中所学的公理二：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短（简单说：垂线段最短）。

说明②：北师大版初中数学课本中并未对“几何最值问题”做出明确的定义与专题学习，但在学习了两个基本公理以及轴对称后就开始着手解决最值问题，课本首次出现“将军饮马”模型是在七年级下册第五章第三节“简单的轴对称图形”习题中问题解决部分，如图 3.3 所示，奶站建在什么地方才能使 A、B 到它的距离之和最短。但几何最值的模型远不止于此，它所涉及的几何知识贯穿整个初中数学教材中，因此要学好几何最值问题不仅仅掌握好两个公理，还需要融会贯通几何图形与其性质。

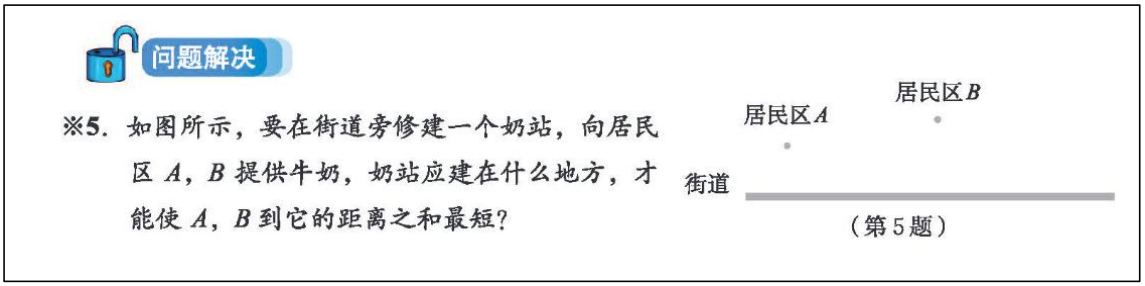


图 3.4 “将军饮马”模型

3.2 理论基础

3.2.1 杜威的“从做中学”理论

现代美国教育家杜威（John Dewey）以“教育即生活”、“教育即生长”、“教育即经验的改造”为依据，对知与行的关系进行了论述，并提出了举世闻名的“从做中学”理论。他认为从做中学要比从听中学更好，从做中学充分体现了学与做的结合，也就是知与行的结合。

杜威“从做中学”理论是顺应社会发展和教育改革的需要提出的，他认为“从做中学”是：（1）自然发展进程的开始，儿童能在自身的活动中进行学习，开始他的自然的发展进程，在这个过程中儿童得到了进一步的生长和发展，获得了关于怎样做的知识；（2）儿童的天然欲望的表现，儿童身上蕴藏者充满生机的冲动，生来就有一种天然的欲望，教育者应该对儿童的这种天然欲望加以引导和发展，使儿童从真正有教育意义的活动中进行学习；（3）儿童的真正兴趣所在，生长中的儿童的兴趣主要是活动，从“做中学”会产生一种真正的兴趣，并会用一切的力量去从事使他感兴趣的活动，儿童真正需要的就是自己怎样去做，怎样去寻找[45]。

中国知网 https://www.cnki.net

几何最值问题一直是学生学习的难点，学生仅从听中学难以知其所以然，引导学生从做中学，通过自我探索获得知识，在这个过程中学生不仅对知识有了更好的理解，更提高了学生动手探索的能力和解决问题的能力。

3.2.2 波利亚的“怎样解题”理论

“怎样解题”理论是美国数学家和数学教育家波利亚（George Polya）在分解解题思维过程中得到的，讨论的是数学中发现和发明的方法和规律。解题过程围绕“探索法”，阐述求得一个证明或解出一个未知数的数学方法可以怎样有助于解决任何“推理性”问题。

他将解题过程具体分为四个步骤：理解题目、拟定计划、实行计划、回顾，具体体现如图 3.5：

第一 你必须理解题目。	**理解题目** 未知量是什么？已知数据是什么？条件是什么？条件有可能满足吗？条件是否足以确定未知量？或者它不够充分？或者多余？或者矛盾？ 画一张图，引入适当的符号。 将条件的不同部分分开。你能把它们写下来吗?
第二 找出已知数据与未知量之间的联系。 如果找不到直接的联系，你也许不得不去考虑辅助题目。 最终你应该得到一个解题方案。	**拟定方案** 你以前见过它吗?或者你见过同样的题目以一种稍有不同的形式出现吗? 你知道一道与它有关的题目吗?你知道一条可能由用的定理吗? 观察未知量!并尽量想出一道你所熟悉的具有相同或相似未知量的题目。 这里有一道题目和你的题目有关而且以前解过。你能利用他吗?你能利用它的结果吗?你能利用它的方法吗?为了有可能应用它，你是否应该引入某个辅助元素? 你能重新叙述这道题目吗?你还能以不同的方式叙述它吗? 回到定义上去. 如果你不能解所提的题目，先尝试去解某道有关的题目。你能否想到一道更容易着手的相关题目?一道更为普遍化的题目?一道更为特殊化的题目?一道类似的题目?你能解出这道题目的一部分吗?只保留条件的一部分，而丢掉其他部分，那么未知量可以确定到什么程度，它能怎样变化？你能从已知数据中得出一些有用的东西吗?你能想到其他合适的已知数据来确定该未知量吗?你能改变未知量或已知数据，或者有必要的话，把两者都改变，从而使新的未知量和新的已知数据彼此更接近吗?你用到所有的已知数据了吗?你用到全部的条件了吗?你把题目中所有关键的概念都考虑到了吗?
第三 执行你的方案。	**执行方案** 执行你的解题方案，检查每一个步骤.你能清楚地看出这个步骤是正确的吗?你能否证明它是正确的? 第四检查已经得到的解答.
第四 检查已经得到的解答.	**回顾** 你能检验这个结果吗?你能检验这个论证吗? 你能以不同的方式推导这个结论吗?你能一眼就看出它来吗?你能在别的什么题目中利用这个结果或这种方法吗?

图 3.5 波利亚—“怎样解题”表

中国知网 https://www.cnki.net

利用波利亚的怎样解题理论解决几何最值问题，能给学生提供解决问题的思路，使解题过程和解题思维更具逻辑性，同时为教师教学带来启发，进而从怎样解题理论中提炼出教学策略。

3.2.3 信息化教学理论

信息化教学是与传统教学相对而言的现代教学的一种表现形态，它以信息技术的支持为显著特征，因而我们习惯于将之称为信息化教学。信息化教学是一个渐进的发展历程，是向教育最优化无限趋近的过程，主要经历三个阶段：计算机辅助教学、计算机辅助学习、信心技术与课程整合。

计算机辅助教学简称 CAI（Computer-Assisted Instruction）,指用计算机帮助或代替教师执行部分教学任务，为学生传授知识和提供技能训练，主要是利用计算机的多媒体功能，辅助教师解决教学中的某些重难点。目前较为流行的计算机辅助教学工具是超级画板、几何画板、GGB 等。网络画板作为新一代互联网教学平台，也在逐渐普及，走进中小学数学课堂。

计算机辅助学习是指利用计算机工具从以教为主转向以学为主，强调如何利用计算机作为辅助学生学习的工具。传统的数学教学计算机工具大都只能满足教师教学使用，学生无法动手实践。而网络画板能够很方便的满足学生使用，在有网络的环境下只要一部手机或一个平板，无需下载就可使用，方便、快捷、高效。

信息技术与课程整合是指在各学科教学中，有效地利用信息技术，达到提高教学质量和学习效率的目的。几何最值问题一直是初中数学中的重点与难点内容，将网络画板作为促进学生对几何最值问题自主学习的认知工具和情感激励工具，利用信息技术所提供的自主探索、多重交互、合作学习、资源共享等学习环境，把学生的主动性、积极性充分调动起来，提高学生的创新思维与实践能力。

中国知网 https://www.cnki.net

4 初中生几何最值问题的学习现状调查

本章旨在了解学生目前几何最值问题的掌握现状，分析学生在解决几何最值问题上存在的主要问题与困难，同时了解学生对计算机辅助学习工具尤其是网络画板的了解程度。为达到以上研究目的，本章将通过学生问卷调查和学生访谈两种方式开展调查，在调查学生几何最值问题学习现状的同时，为下一章的教学策论提供现实依据。

4.1 调查研究设计

4.1.1 调查目的

调查包括初中数学几何最值问题测试卷和学生访谈两个方面。首先通过对初中生解决几何最值问题情况进行测试，初步了解学生目前几何最值问题的掌握现状，分析学生在解决几何最值问题上存在的难点与问题。再根据学生的测试卷情况选择个别同学进行访谈，访谈作为测试卷的补充依据，分析学生在解决几何最值问题过程中所遇到的主要困难，同时通过访谈了解学生对计算机辅助学习工具尤其是网络画板的了解程度。针对以上调查得出的结论为第五章提出教学策略与方法提供依据。

4.1.2 调查对象

由于北师大版初中数学教材关于几何最值问题的两个基本原理分别是七年级上册和下册所学，所以为了保证被试对象都已经完成了相关知识点和几何最值问题的专题学习，本研究选择了重庆市两所中学中初二年级各两个班共 188 名学生进行测试，两所学校分别是重庆市某直属重点中学和一所普通中学，重点中学班 1 共 49 人，重点中学班 2 共 46 人，普通中心班 1 共 48 人，普通中学班 2 共 45 人。为了使测试的成绩更具有代表性，每个学校两个班的平均成绩属于该校的中间水平，测试卷调查学生样本的详细信息如表 4.1。访谈对象来自测试卷被试学生，每个班 1-2 名共 6 名学生，每位学生姓名由他们的姓氏代表，详细信息如表 4.2。

中国知网 https://www.cnki.net

表 4.1 测试卷调查学生样本分布表

学校班级	男生	女生	合计
重点中学班 1	27（55.1％）	22（44.9％）	49
重点中学班 2	23（50.0％）	23（50.0％）	46
普通中学班 1	25（52.1％）	23（47.9％）	48
普通中学班 2	21（46.7％）	24（53.4％）	45
合计	96（51.1％）	92（48.9％）	188

表 4.2 访谈调查学生样本分布表

学生	学校班级	性别
学生吴	重点中学班 1	男
学生周	重点中学班 1	女
学生石	重点中学班 2	男
学生李	普通中学班 1	女
学生杨	普通中学班 2	女
学生谢	普通中学班 2	男

4.1.3 调查工具

① 初中数学几何最值问题测试卷

为了调查初二学生对几何最值问题的掌握情况，本研究根据 3.1.3 中两个模型共 9 种类型来设计学生测试卷。因为“胡不归模型”中辅助线的添加过程会使用九年级才学习的三角函数知识，所以除“胡不归模型”未考察外，其余题目涵盖表格 3.1 中所列所有模型作图原理及变式。测试卷一共 14 道题，参考了国内外相关专家编制的有关“几何最值问题”、“将军饮马问题”等的经典习题[45]和重庆市各中学中考模拟卷中的习题，并经过本校导师和校外导师以及多位中学数学教师进行评估，最终认为本测试卷能够考察学生初中数学几何最值问题的掌握情况。测试卷详见附录 1。

中国知网 https://www.cnki.net

1） 学生测试卷的构成

学生测试卷共设计了 14 道题，题型分别是 8 道作图题和 6 道填空题，每道填空题均是相应模型的具体应用。具体每道题对应的原理及考察的模型详见表 4.3：

表 4.3 初中数学几何最值问题测试卷的构成

原理	题号	题型	考察模型与应用
两点之间，线段最短	1	作图	“一动两定”同侧、异侧模型作图
	2	作图	
垂线段最短	3	作图	“一动一定”模型作图
两点之间，线段最短	4	填空	“一动两定”同侧模型应用
	5	作图	“两动一定”模型作图及应用
	6	填空	
	7	作图	“两动两定”模型作图及应用
	8	填空	
	9	作图	“造桥选址”横向、纵向模型作图及应用
	10	作图	
	11	填空	
	12	填空	
垂线段最短	13	作图	“两动一定”模型作图及应用
	14	填空	

2） 学生测试卷的评分标准

测试卷编制完成后，对测试卷的答案及得分进行统一，所有作图按步骤给分，对称点正确得 1 分，对称点正确且连线正确得 2 分。为了解学生的具体应用情况，填空题均要求学生保留作图痕迹，跟作图题一致按步骤给分，填空题对称点正确、连线正确且答案正确才可得 3 分，仅答案正确但作图错误不给分，答案错误或留白不得分。由于每道题作图步骤不一致，且有两类题型，所以每道题目分值不完

中国知网 https://www.cnki.net

全一致，按分值分类可分为“1 分”、“2 分”、“3 分”三种评分情况，具体评分标准详见表 4.4：

表 4.4 初中数学几何最值问题测试卷的评分标准

分值分类	评分标准	题号	题型
1 分	答案错误或留白：0 分 连线正确：1 分	第 1、3 题	作图题
2 分	答案错误或留白：0 分 对称点正确：1 分 对称点正确且连线正确：2 分	第 2、5、7、9、10、13 题	作图题
3 分	答案错误或留白：0 分 对称点正确：1 分 对称点正确且连线正确：2 分 对称点正确、连线正确且答案正确：3 分	第 4、6、8、11、12、14 题	填空题

特别说明：

Ⅰ.“对称点正确”是指根据题目信息，需要作的所有对称点都正确，一般最多两个对称点。

Ⅱ.试卷要求每道题都作图，用铅笔或者其它颜色的笔作图、辅助线虚线或者实线、对称点或被求点的字母未标明均不影响评分，未用直尺画图但直线错误不明显的给分，未用直尺画图且直线错误明显的不给分，作垂直缺少直角符号不给分。

Ⅲ.填空题均需保留作图痕迹但不需要写公式计算过程，且填空题答案正确但作图错误或作图空白计零分。

② 学生访谈提纲

为了更加具体地，从学生的主观层面来了解学生目前对于几何最值问题的掌握情况，笔者在学生完成测试卷后，根据测试卷的答题和得分情况，对部分被试学生进行了访谈。访谈提纲一共包含三个维度，如表 4.5：

中国知网 https://www.cnki.net

表 4.5 学生访谈提纲

维度	问题
学生对初中几何最值基本问题的掌握情况	1.我们已经学过的初中几何最值问题有哪些模型？ 2.已经学习过的解决几何最值问题的理论原理有几个，分别是什么？
学生在做几何最值问题时遇到的主要困难及具体原因	3.你在学习几何最值模型阶段和应用模型解决问题阶段是否感到有困难，哪个阶段最难？ 4.你在解决几何最值问题时觉得哪种类型最难，具体难在哪里，是辅助线的连接还是计算过程，或者是其它？
学生对信息技术辅助几何最值问题教学的认同度和学生在几何最值问题学习过程中多媒体技术辅助学习的情况，特别是对网络画板的了解程度	5.在学习几何最值问题时数学老师是否用计算机辅助教学工具进行教学，如果是，用的是什么工具呢？ 6.你知道哪些计算机辅助学习工具呢，你是否自己用过这些工具帮助学习数学或者解决数学问题？ 7.你希望教师在几何最值问题教学中使用信息技术辅助教学吗，你是否希望自己也能够有机会使用信息技术工具进行学习？ 8.你了解网络画板吗，是否用过呢？如果用过，当时用它来干什么？

4.2 调查统计与分析

4.2.1 学生测试卷统计与分析

本次调查学生测试卷一共发放 188 份，收回 185 份，有效份数 183 份，有效回收率为 97%。表 4.6 记录了每一道题得分的人数以及每道题的平均分和得分率。平均分计算法则是这道题所有人的总分除以总人数，得分率是这道题的平均分除以该题的分值。

中国知网 https://www.cnki.net

表 4.6 得分情况表

题号	得 3 分人数	得 2 分人数	得 1 分人数	得 0 分人数	平均分	得分率
1	—	—	176	7	0.96	96%
2	—	170	2	11	1.87	93.5%
3	—	—	171	12	0.93	93%
4	152	13	2	16	2.80	93.3%
5	—	114	22	47	1.37	68.5%
6	107	5	15	56	1.89	63%
7	—	107	26	50	1.31	65.5%
8	62	45	21	55	1.62	54%
9	—	94	27	62	1.17	58.5%
10	—	89	24	70	1.10	55%
11	87	4	25	67	1.33	44.3%
12	82	7	27	67	1.57	52.3
13	—	77	15	91	0.92	46%
14	93	14	4	72	1.70	56.7%

基于学生得分情况表中的数据，笔者对数据进行进一步分析，得到以下结论：

① 随着动点和定点个数的增加，正确率逐渐下降

试卷是按照模型类别编排的，题目从两个原理作图基础开始，逐渐增加动点和定点的个数，由此难度也逐渐提升。为了能够更加直观地看出学生得分情况，笔者绘制了得分率折线图（图 4.1）和满分、零分人数柱状图（图 4.2）。

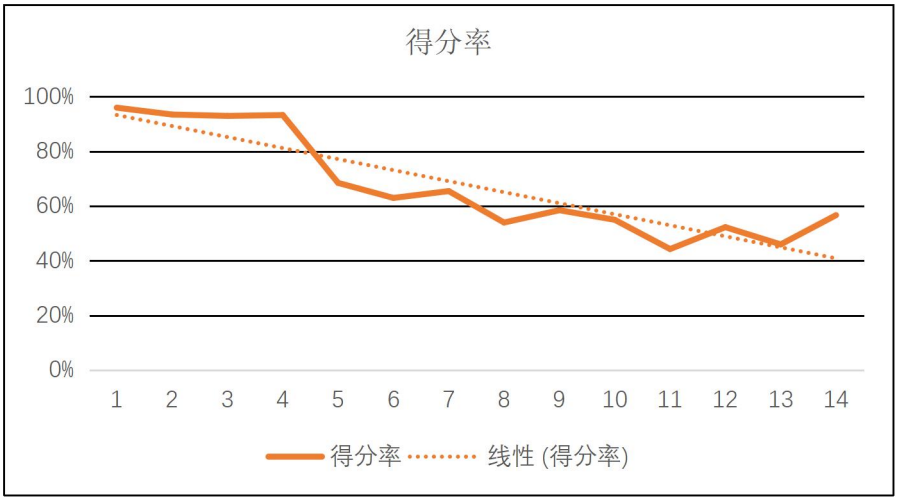


图 4.1 得分率折线图

中国知网 https://www.cnki.net

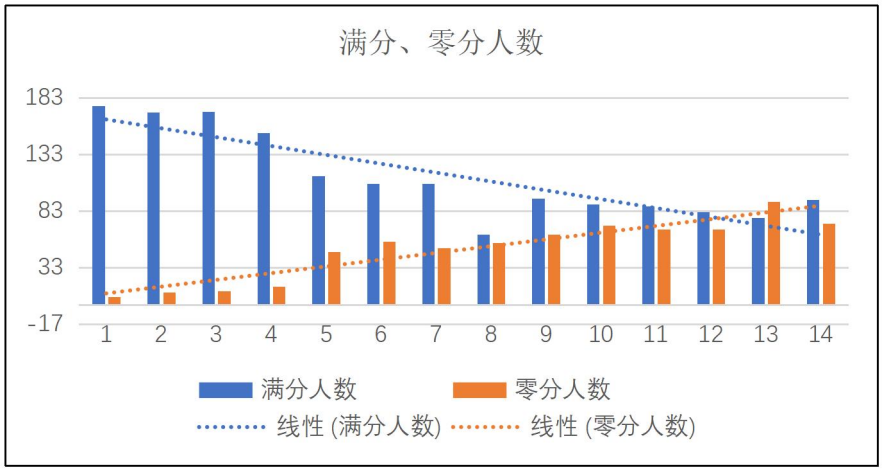


图 4.2 满分、零分人数柱状图

从图中数据可以直观看出，得分率整体呈下降趋势且满分人数也呈下降的趋势，零分人数呈整体上升的趋势。由此可知，随着动点和定点个数的增加，题目难度加大，学生的正确率逐渐下降。作图题 1-3 题及第 4 题填空题是对两个基本原理作图和应用的考察，正确率都在 90%以上，说明超 90%的学生都能够熟练掌握两个原理基本作图及应用。从第 5 题开始，增加了动点和定点个数，得分率猛然下降到 69%，随后越来越低。其中较为特殊的是第 8 题填空题，得分率为 54%，而满分人数过于低，仅 62 人，是所有题目中满分人数最少的，也是所有题目中与零分得分人数最接近的。对于这一情况，笔者对此题学生的得分数据进行了单独分析，制作了饼图如图 4.3，并对学生的试卷答案进行了分析。发现得 2 分的同学占 25%，也就是说这道题实际有 59%的同学能够明白原理且作图正确，只是有四分之一的同学未计算出最后正确结果，学生得 2 分的情况示例如图 4.4，满分(3 分)学生示例如图 4.5。

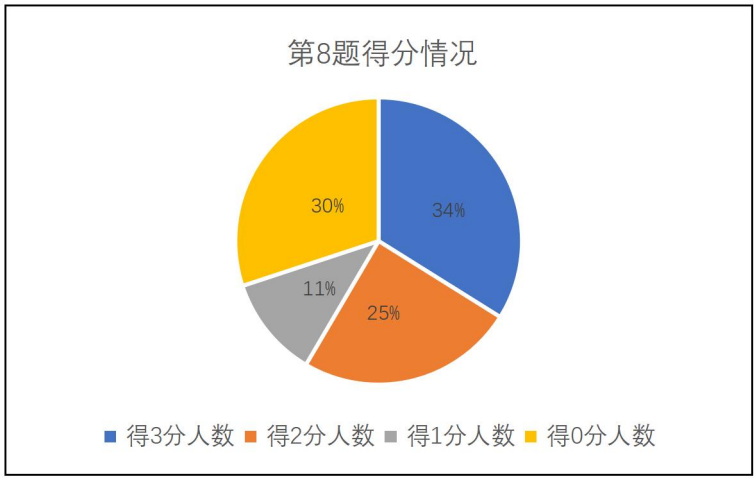


图 4. 3 第 8 题学生得分情况分布图

中国知网 https://www.cnki.net

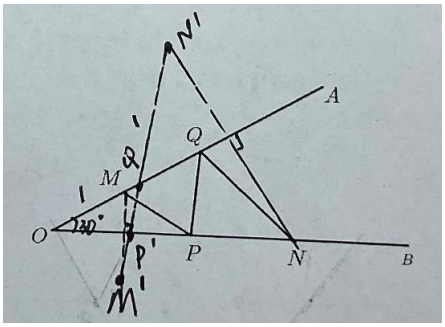


图 4.4 学生第 8 题得 2 分示例图

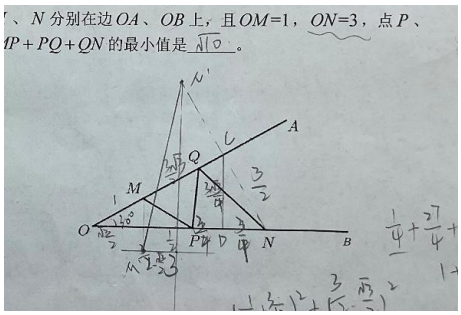


图 4.5 学生第 8 题得 3 分示例图

②在掌握模型解法的基础上，对应的填空题正确率较高

为了了解学生在掌握模型解法基础上的应用情况如何，笔者将每道作图题及所对应的模型应用的填空题的数据进行了对比统计，如图 4.6，分别统计了作图题与对应的填空题的得分率情况。

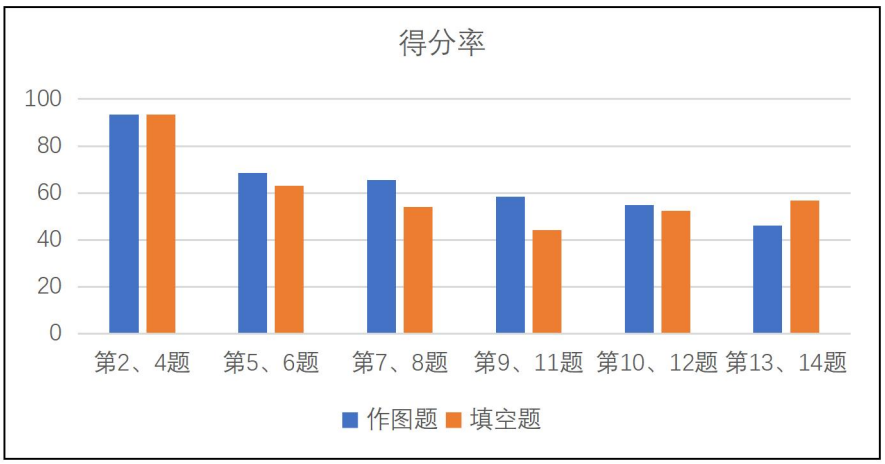


图 4.6 作图题与填空题得分率对比柱状图

从整体的每一组的得分率情况来看，每一组的得分率差距都较小，且除最后一组外，每一组的作图题得分率都高于填空题，说明学生如果掌握了模型原理，难么就能够顺利应用到题目中去，而且大多数同学在作图正确的基础上都能够计算正确。其中最为突出的是第 2、4 题，得分率相当且都超过 90%，说明学生对最基本的原理及其应用掌握的是最扎实的。除此之外，最后两道题是一个反例，填

中国知网 https://www.cnki.net

空题第 14 题的得分率反而高于其原理作图题第 13 题，为了解具体情况，读者对学生的试卷答案进行了分析。通过分析发现，造成此情况有很大可能是因为很多学生混淆使用两个原理导致作图题错误，而填空题中数据比较特殊，动点定点特征明显，学生能够顺利做出正确答案，学生答案示例如图 4.7，图中左侧为作图题第 13 题学生错误答案，右侧为填空题第 14 题学生正确答案。

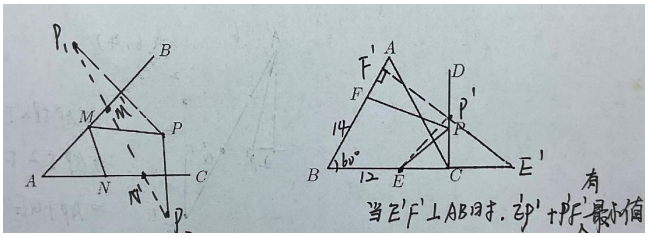


图 4.7 学生答案示例

③ 对称、平移做法目的掌握不佳，混淆使用最值原理。

在所有的几何最值模型解答过程中，最重要的和最基础的步骤就是作对称，造桥选址模型是在对称的基础上多了一步平移。为了更加详细地了解学生是在作图过程中的哪一步出现问题，笔者将每道题得一分及以上的人数做了统计，如图 4.8 所示：

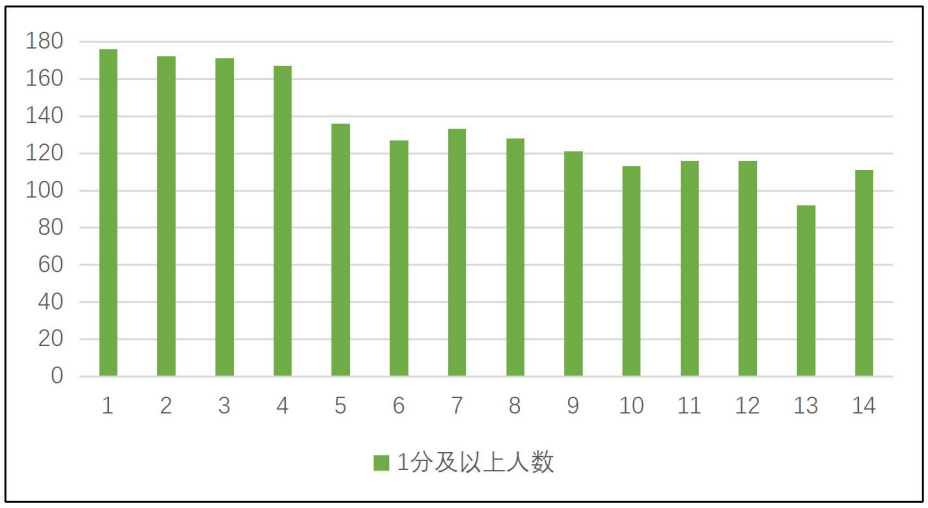


图 4.8　1 分及以上得分人数柱状图

从直方图的数据中可以看出，虽然得一分及以上的总人数在逐渐递减，但是最低的第 13 题的人数都在一半以上，说明大部分的同学都知道肯定是要作对称的，但由于没有理解作对称的目的，所以不知道下一步如何处理，如图 4.9 学生第 5 题的错误示例。而对于造桥选址问题，由于题中模型都是给出的定点在桥的异侧，所以图中不需要作对称，基本步骤是先平移桥的距离，再连线即完成，从数据中可以得知，在造桥选址模型中，大部分同学都知道需要平移桥的距离，但平移后不知道下一步如何确定桥的位置，或者平移后将线条画的更加复杂，学生正确示

中国知网　https://www.cnki.net

例如图 4.10，学生错误示例如图 4.11 与图 4.12，这三副图中左侧为第 9 题，右侧为第 10 题。另外，仔细分析学生的答案能够发现很多同学对两个原理的适用情况不清楚，出现混淆使用原理的现象，学生的错误示例如图 4.13，图 4.13 分别是第 5 题和第 7 题。

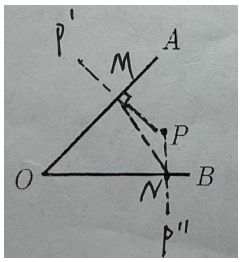


图 4.9 学生错误示例

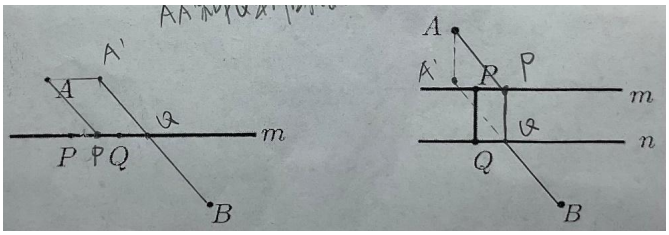


图 4.10 学生正确示例 1

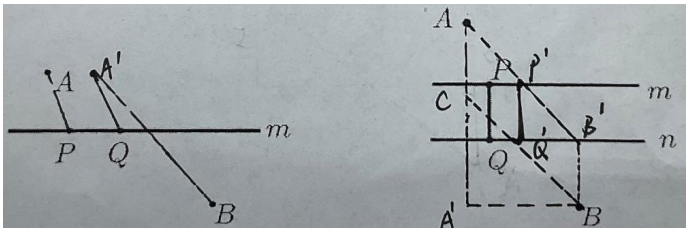


图 4.11 学生错误示例 2

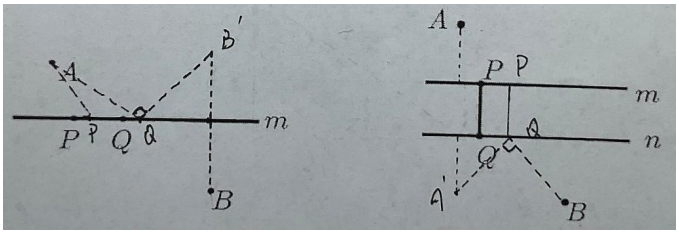


图 4.12 学生错误示例

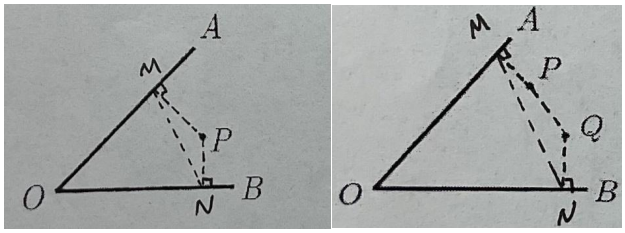


图 4.13 学生正确示例

中国知网 https://www.cnki.net

4.2.2 学生访谈统计与分析

本次访谈一共访谈了六名学生，两所学校各三名。访谈情况根据维度分类进行记录并分析。以下是访谈内容记录及分析：

① 第一个维度共两个问题，了解学生对初中几何最值基本问题的掌握情况，访谈内容如表 4.7：

表 4.7 学生对初中几何最值基本问题的掌握情况访谈内容

问题	学生
1.我们已经学过的初中几何最值问题有哪些模型？	吴：将军饮马。 周：将军饮马、造桥选址问题，老师还提到过费马点、瓜豆原理中轨迹最值问题、胡不归模型，据说是初三才学。 石：将军饮马，造桥选址。 李：将军饮马模型。 杨：将军饮马，造桥选址，还有今天试卷中其它动点和定点个数不一样的模型。 谢：我只记得最熟悉的是将军饮马，还有其它模型，但是忘记了。
2.已经学习过的解决几何最值问题的理论原理有几个，分别是什么？	吴：两个，一个是两点之间线段最短，另一个是点到直线之间垂线段最短。 周：两点之间线段最短、点到直线垂线段最短。 石：一个，两点之间，线段最短。 李：我只记得一个，就是两点之间线段最短。 杨：两个吧，两点之间线段最短，垂线段最短。 谢：垂线段最短，前不久才刚刚学过，还有但是不记得了。

从访谈内容来看，学生最为熟悉的初中几何最值模型是将军饮马模型，较为熟悉的是造桥选址模型，对于其余的没有特殊名字仅以动点和定点个数命名的模型总结不上来模型的名字，增加动点和定点个数的模型实际上就是将军饮马的变形，所以学生未答上来可以理解。对于模型原理，少部分同学能准确说出完整的两个原理，大部分同学都只能记住其中的某一个原理。

② 第二个维度两个问题，了解学生在做几何最值问题时遇到的主要困难及具体原因，访谈内容如表 4.8：

中国知网 https://www.cnki.net

表 4.8 学生在做几何最值问题时遇到的主要困难及具体原因访谈内容

问题	学生
3.你在学习几何最值模型阶段和应用模型解决问题阶段是否感到有困难，哪个阶段最难，难在哪里？	吴：感觉都有点困难，但相对而言应用模型解决问题阶段感觉更为困难，难在不知道怎么作图。 周：有困难，刚学习完模型和原理之后，利用已学模型去解决新问题时最难。 石：有感到困难，尤其是应用，最难。 李：应用模型解决问题最难，不知道该应用哪一个模型。 杨：感觉每个阶段都比较难，但应用模型解决问题阶段是最难的。由于点在直线上移动，无法确定具体位置，所以不知道怎么作图，太难了。 谢：对我而言，学习模型的时候都能理解，但是应用起来才觉得好难呀，根本不会。
4.你在解决几何最值问题时觉得哪种类型最难，具体难在哪里，是辅助线的连接还是计算过程，或者是其它？	吴：在几何最值模型的应用中，主要的困难在于作图，在作图构建辅助线过程中我们必须对模型非常熟悉，并能活用模型后作出正确的图形，这样才能正确的寻找到线段之间的数量关系，才能求出答，我觉得最难的是两个动点的题。 周：我觉得计算过程不难，反而难的是，第一最开始有时候不知道从何下手入手套用模型，第二不知道如何画辅助线从而画不出模型，最难的是两动两定这种模型。 石：我觉得两个动点的题最难，作图中辅助线的连接最难，如果线连对了，计算再仔细一些基本就能做出来，线如果都连不对，都无法进行下一步计算。 李：动点和定点个数越多的越难，具体是辅助线的连接最难。 杨：最开始我觉得整个这一类题都难，无从下手，但是当做题多了后发现，其实也就是这几个模型，模型背住了，基本都能画出辅助线，就只剩下计算了，计算一般都不难，要说最难的模型那就是两动一定模型。 谢：对我来说都很难，做题时我记得以前老师都讲过，但是都忘记了，所以辅助线都没有连正确，就更计算不出来。

从访谈内容来看，很多同学在学习几何最值模型阶段感到有困难，但相比于学习模型阶段，几乎所有同学都认为应用模型更难，主要原因是对模型不熟悉，解题时不知道使用哪一个模型，所以无从下手，作不出辅助线，解不了题。对于具体难的模型，学生一致回答的都是两个动点的模型最难。

中国知网　https://www.cnki.net

③第三个维度共四个问题，了解学生对信息技术辅助几何最值问题教学的认同度和学生在几何最值问题学习过程中多媒体技术辅助学习的情况，特别是对网络画板的了解程度，访谈内容如表 4.9：

表 4.9 学生在几何最值问题学习过程中多媒体技术辅助学习的情况访谈内容

问题	学生
5.在学习几何最值问题时数学老师是否用计算机辅助教学工具进行教学，如果是，用的是什么工具呢？	吴：没有，我们老师很少使用计算机这些进行教学，主要就是将图形呈现在 PPT 上面。 周：偶尔用，用 PPT 中的动画展示，或者老师利用希沃画板画出辅助线 石：老师很少使用计算机辅助教学，除了 PPT，都是板书 李：没有用过，我记得好像都是直接给出模型和模型解答的。 杨：好像没用过，辅助线是动画形式呈现的，因为当时老师说这个知识点很重要，让我们认真听 谢：我记得是没用过的，最多只是 PPT 展示。
6.你知道哪些计算机辅助学习工具呢，你是否自己用过这些工具帮助学习数学或者解决数学问题？如果不常使用，那原因是什么？	吴：我知道几何画板和 GGB 可以帮助我们解决一些数学问题，但是我几乎没有真正的使用过这些软件，因为我没有工具，我也不知道怎么操作。 周：几何画板、GeoGebra、PPT、希沃白板。自己用过几何画板，因为学校偶尔会举办“学生讲好题”的比赛，我会用一点几何画板帮助自己做题。 石：学校的班班通上有几何画板，只看到老师有次讲作业中的几何大题用过，上正课基本没有用过，我自己也没用过，我觉得我们用不到，老师都只是偶尔才用。 李：几何画板、希沃白板，但用的很少，我觉得很难，我不会用。 杨：见过几何画板，听说过超级画板，但都没有用过，我觉得我不需要用它，而且听说它只是用来作图的，我也不清楚。 谢：我只知道有个几何画板，但我自己没使用过，看老师用过，那些图动起来的时候很神奇，但是我自己又不会操作，肯定很难。

中国知网 https://www.cnki.net

7.你希望教师在几何最值问题教学中使用信息技术辅助教学吗，你是否希望自己也能够有机会使用信息技术工具进行学习？	吴：我希望数学老师能够用几何画板之类的工具给我们演示动态的变化过程，这样我们对最值问题解法可能更加深刻。因为我只听过一些软件，自己没用过，所以我不会操作这些软件。 周：我希望数学老师能够用，特别是为什么距离最短时点的位置在那里，可以用工具演示一下。课后我会偶尔使用几何画板帮助自己解题，我觉得使用工具对解题有帮助。 石：数学老师讲几何大题的时候用过几何画板，有时候还会动起来，太神奇了，所以我希望在学习这个专题中数学老师也能使用信息计算工具，如果我自己也有机会使用，那太好了。 李：如果信息技术工具能够帮助我们理解这些模型和解法的话，我希望数学老师使用它上课，我也希望我们能跟着使用。 杨：数学老师当时讲的时候辅助线是动画呈现的，我觉得对我理解解法是有好处的，所以我希望数学老师上这节的时候能使用信息技术工具，我自己用不用都可以。 谢：我希望数学老师用，给我们展示动态图，我自己用的话不会操作，也不懂这个原理，也没有时间使用。
8.你了解网络画板吗，是否用过呢？如果用过，当时用它来干什么？	吴：听我们老师说过，但没有实际用过。听老师说好像在在手机上就可以使用，后面可以去使用一下。 周：不了解，没有用过呢。 石：知道几何画板，还见过，但没听说过网络画板。 李：不了解，没有使用过。 杨：不了解，没用过。 谢：不了解网络画板，不知道是什么东西。

从访谈内容中可以得知，教师在进行几何最值问题专题教学时，几乎未曾使用任何计算机辅助工具，最多是使用 PPT 呈现上课内容，而且几乎是直接给出模型结果，需要学生自己理解记忆。学生在学习数学的过程中，对计算机辅助工具了解的少，也几乎从未使用过，对于网络画板，更是所有学生一致否定，未曾了解过，甚至都没有听说过。但是从同学们的回答中能够得知他们知道有辅助数学学习的信息技术工具，也知道这些工具能够展示动态图，所以他们希望数学教师在几何最值问题教学过程中能够使用工具展示动态图帮助理解最值问题，部分同学也希望自己能够有机会使用。

中国知网　https://www.cnki.net

4.3 调查结果

经过对学生的测试卷和访谈数据的收集并分析，发现初中生对几何最值问题专题中的两个原理的基础知识掌握的很好，无论是访谈过程中被问到原理是什么，还是测试卷中按要求完成将军饮马和垂线段最短原理的模型图及其应用，学生的正确率都接近百分之百，说明学生对于原理基础掌握的很好，但是随着动点和定点个数的增加，学生的正确率逐渐下降，最糟糕的情况下得分率不到百分之五十。对于学生在几何最值问题学习中存在的问题及可能的原因，笔者做了如下分析：

① 学生未理解模型原理及题目条件，死记硬背模型解法

学生在学习几何最值模型时，死记硬背模型原理和解法，并未理解每一步操作的目的。比如，作对称的目的一方面是为了转化为边相等，另一方面是为了能够使用“两点之间，线段最短”原理需要把同侧点转化为异侧点，很多同学不理解对称的目的，所以仅知道需要作对称，但是对对称后的操作比较模糊。同时，在应用模型的过程中，学生对于题目中的条件不能够分析透彻，不理解题目，所以不知道应该选择哪一个原理，导致在解题过程中出现两个原理混淆乱用的情况。

② 学生的模型化思维和变式思维薄弱，应用能力较差

初中数学课标中对于几何最值问题考试有要求的只有两个原理，即两点之间线段最短和垂线段最短原理，所有的模型原理都基于此。学生在几何最值问题学习和应用过程中，模型思维较为薄弱，一方面是学习时未根据原理和定点动点个数进行模型化分类和记忆，另一方面是应用过程中未及时将问题进行模型化。将军饮马是最基础的模型，其余模型基本是在此基础上改变动点和定点的个数，将模型的形式改变，增加不同条件后运用到几何题目中时，需要添加多条辅助线，学生常常难以下手，由此可以看出学生的变式思维薄弱，应用能力较差。对于这些困难原因，需要教师在教学设计中将之列为学生学习的重难点，合理设计课程内容，选择合适的教学方式和手段，在课堂中重点关注和强调，帮助学生理解重点，突破难点。

③ 学生的数学信息化工具使用频率低

几何最值问题中涉及动点，所以与此相关的几何题目中一定存在一个动态的变化过程，动态过程较学生来说相对抽象，需要学生有一定的空间想象能力，同时无法由传统的黑板书直观板书。从访谈中可以得知，数学教师在教学过程中使用信息技术工具辅助教学的非常少，所以学生对于信息技术工具的了解也非常少。学生们大都只是听说过有这些工具，有的同学见过，但自己动手使用的很少，学

中国知网 https://www.cnki.net

生不了解这些工具的具体作用和功能，也不知道从哪些途径可以自己使用到这些工具，片面地认为这些工具只能作图，自己平时根本不需要用到，而且觉得操作过程一定很难，这些都是学生信息化工具使用频率低的原因。现在全国中小学教室已经基本实现了多媒体设备的全覆盖，中小学数学计算机辅助教学工具也非常多，有已经发展的非常成熟的工具，也有更为新兴的更方便教师和学生都使用的网络画板，不需要下载，学生也容易上手使用，所以应该鼓励教师在教学过程中对于抽象的问题用信息技术工具辅助教学，同时也应鼓励学生在数学学习探究过程中使用网络画板或者其它数学学习工具。

中国知网 https://www.cnki.net

5 基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学策略

根据第四章初中生几何最值问题的学习现状调查分析，发现学生在解决几何最值这一系列的问题时，主要靠的是死记硬背模型解法，对于模型原理和作图的每一步操作目的都比较模糊，从抽象角度分析原因，一方面是因为学生的模型化思维和变式思维薄弱，应用能力较差，另一方面是教师和学生的数学信息化工具使用频率低，未能很好的将动态图象展示给学生。所以本章结合第二章相关文献的综述、第三章概念界定和理论基础，总结出网络画板辅助几何最值问题教学的优势，在此基础上再依据第四章现状调查的结果，试图将网络画板融入几何最值问题的专题教学中，并设计教学策略，以期为一线教师提供教学参考。

5.1 网络画板辅助几何最值问题教学的优势

初中数学中的几何最值问题一直是学生学习的重点与难点，基本模型掌握不清楚，动点作图原理不明晰，解题步骤死记硬背不理解，都是解决这类问题的重大瓶颈，所以对于动态的数学问题，借助数学教学辅助工具是很好方式。本研究的初衷是能够有一款数学辅助工具帮助学生能够通过自己动手操作得出几何最值问题中各模型解题原理，根据研究问题的需要由此选择了网络画板平台。基于对网络画板本身特点的研究和查阅与信息技术辅助几何最值问题的相关资料，总结出了网络画板辅助几何最值问题教学的三点优势。

①网络画板使用便捷，资源丰富

网络画板同其它例如几何画板、GGB、皓骏等数学教学软件都能实现图象的动态变换，对于教师来说，操作并无障碍，但对于学生来说，由于除网络画板外其余软件均需要下载，使用完后需要保存文件，在其它设备上使用时还要保证该设备也具备相应软件，工具使用繁琐，对于学生来说很难实现便捷应用。而网络画板只需要有网络即可，是一个互联网平台，可注册自己的账号，将自己的作图保存在自己的账号空间中，可实现多平台登录，同步个人所有资源。除此之外，网络画板有丰富的资源包，可供教师和学生直接选择和使用，方便快捷。

② 动态揭示数学规律，渗透数学思想

在初中学段数学教材中，有许多探究活动课，内容源于数学教材，以巩固“四基”、强化“四能”为出发点，重在体现隐藏于探究背后的数学思想。在传统教学中，教师因教具的限制，对于抽象的课题容易忽略探究过程，只能直观描述或者直接让学生从课本中观察，这对学生的抽象能力有很高的要求。而借助网络画板

中国知网　https://www.cnki.net

将抽象问题形象化，通过图形变化促进学生对数学知识的理解，让学生从“形”上直观感受数学量之间的关系或规律，不断深化数形结合思想，形成良好的数学思考习惯。

③提供自主探究平台，调动学生探究积极性

网络画板操作便捷，对设备要求低，能够满足学生自主操作的需求。学生可以根据课本中的探究思路自主操作，制作探究素材进行探究；对于部分实际动手能力不足的学生，教师也可提前将制作好的网络画板课件分享给学生，学生通过拖动课件中的变量按钮就可以进行探究。学生亲身经历探究过程，提高了数学学习的参与度，注意力也更加集中，通过自己的操作产生变化，通过变化总结规律，得到探究结论后易获得成就感，以此提升探究兴趣，增加数学探究的积极性。

5.2 网络画板辅助几何最值问题教学的策略

几何最值问题教学实际就是数学解题教学，波利亚的怎样解题理论详细描述了解决数学题的具体操作步骤，能够为学生解决数学问题提供解题思路。网络画板是辅助学生进行探究，进而解决数学问题的工具。所以在几何最值问题教学的课堂中，借助网络画板辅助工具，探究过程围绕波利亚的怎样解题理论展开教学，将探究式教学模式与怎样解题理论深度融合，使解题过程和解题思维更具逻辑性，同时为教师教学带来启发。在研究现状以及网络画板的优势基础上，设计教学过程每个环节中的教学策略。为此，笔者将怎样解题表的每个步骤与几何最值问题教学的每个教学环节相匹配，并提炼出每个环节的教学策略，具体如下图 5.1 所示：根据教学环节需要，共提出四点教学策略，以期在教学环节中通过这些策略的实施解决现状调查中的三点问题，如图 5.1 所示。

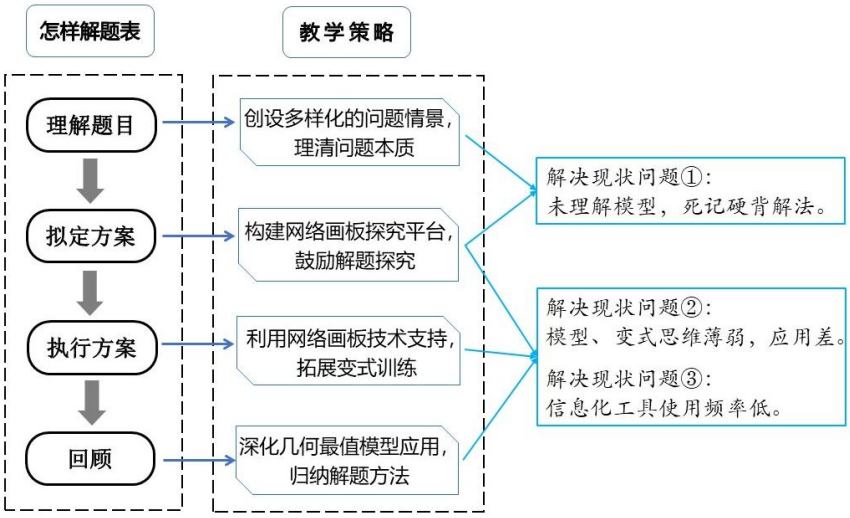


图 5.1 基于“怎样解题”表的几何最值问题的教学环节与策略

中国知网 https://www.cnki.net

5.2.1 创设多样化的问题情境，理清问题本质

良好的开端等于成功的一半，教学亦是如此，创造一个好的数学问题情景是成功上好一堂数学课的前提和基础。义务教育数学课程标准指出在第三学段（7-9年级）的教学应结合具体的教学内容采用“问题情境-建立模型-解释、应用与拓展”模式展开，让学生经历知识的形成、应用等全过程。情景的创设要符合学生的年龄特征和认知水平，要具有一定的数学价值，能够体现一定的数学思维和数学方法，所以情景创设应关注知识本身，从知识背景出发，以情景吸引学生注意力，引起学生对数学学习的兴趣，好的问题情境创设还能够提升学生对数学问题的钻研能力。

在初中数学几何最值问题部分，由于动点问题是一个动态的变换过程，学生理解起来较为抽象，直接死记硬背模型及其解法固然可以达到解决问题的效果，但知其然不知其所以然势必会影响学生的思考能力和举一反三的应变能力。以“将军饮马”问题为例，在“一定两动”模型中，将军饮马问题人人熟知，所以我们亦可以用人人皆知的数学问题情景来引入最值问题的学习。

情景一：如图 5.1：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”，唐朝诗人李欣用简短的两句诗描述了军营将军在观望烽火之后，从山脚出发，走到河边饮马后，再回到军营的活动过程，请问将军在河边哪个位置饮马，能够使将军的饮马行程最短？

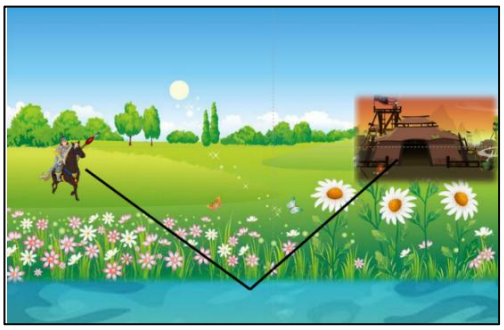


图 5.2 情景一

情景二：我们还可以创设学生熟悉的情景，如图 5.2，学校为了方便同学们体育课能快速借到运动器材，将在去体育馆的致远路边修一个临时借用器材点，请问借用器材点修在何处，能使同学们从教室到借用器材点，再到体育馆的路程最短？

中国知网　https://www.cnki.net

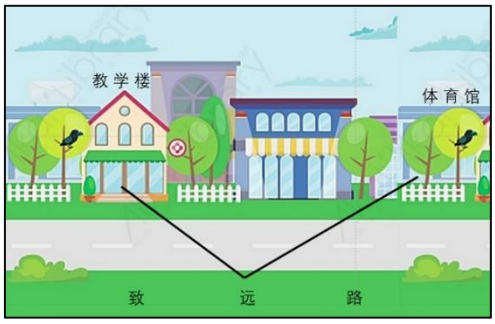


图 5.3 情景二

本质是事物的内部联系，是事物内在的、相对稳定的方面，本质是事物的根本性质，由事物的特殊矛盾构成，隐藏在现象背后并表现在现象之中，本质要靠思维才能把握，在数学解题中本质就是问题的核心与关键。学生在解决问题时思维受阻，不知如何下手，原因之一是未理解问题的本质，导致解决问题的效率低下，所以教师应该引导学生理解题目并寻找解决问题突破口，抓住问题本质，才能看清实质，才能排除干扰，才能得心应手，教师可以通过变换形式，将情景问题数学化，引导学生寻找解决问题的突破口。

在理解题目环节，问题通过情景呈现，激发了学生的学习兴趣和探究欲望，而在学生试图解决这个问题时会存在困难，在学生思考的过程中提问：未知量是什么？已知数据是什么？条件是什么等一些列问题，引导其将数学情景问题转化为数学问题，初步体会模型思想，体验将情景问题数学化，如图 5.4，模型化后的题目变成了求当 $PA+PB$ 最小时，P 点的所在位置，通过这个过程一方面培养了学生的转化思维和模型化思维，另一方面简化了学生对题目的理解，方便同学们对问题进行探索。

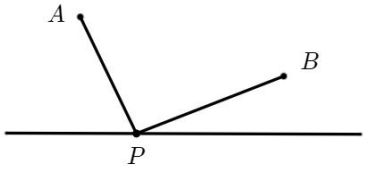


图 5.4 情景问题模型化

5.2.2 构建网络画板探究平台，鼓励解题探究

网络画板的使用是为了弥补传统教学中的不足，实现优势互补，一方面能够更好的辅助数学教师教学，提升课堂效率，另一方面也给学生的学习方式改变提供了可能，为学生提供了使用信息技术的机会，为学生进行数学问题探究提供了工具与平台。但是我们必须明确，网络画板的使用是为了帮助学生解决问题，是

中国知网 https://www.cnki.net

辅助工具，并不能代替学生思考，真正的考场解决问题时也不会提供任何数学工具，所以拟定方案环节至关重要。由于每位同学的思维方式和动手操作能力是不一样的，所以可以鼓励学生使用网络画板进行自主探究或小组合作探究。

① 自主探究，培养自学能力

继续以“将军饮马”最值问题为例。在理解题目环节，学生已经将问题模型化处理，已知直线l与定点A、B，求当线段和$PA+PB$最小时，P点的所在位置。根据经验我们能够理解，求最小的过程实际就是一个比较的过程，在所有比较对象中，选择我们所需要的最小的那一个。由此我们需要将所有可能的值都列出来，这个过程显然只有借助工具才能完成，所以部分同学提出解题猜想：我们可以借助网络画板直观地计算出线段和的值，当在变化过程中和值最小时，此时的位置就是P点的位置。通过这一思路，发现部分学生已经初步具备了直接使用数学辅助工具解决问题的思维和能力。

同学们得出了解题猜想，就需要去验证猜想的可行性，利用网络画板中的动画功能让动点P在直线l上移动，P点在变化过程中会引起线段PA、PB的变化，利用计算测量工具，计算出$PA+PB$的值，比较线段和数值大小确定动点位置。教师组织学生根据猜想进行自主探究，并得出探究结论，如图 5.5。

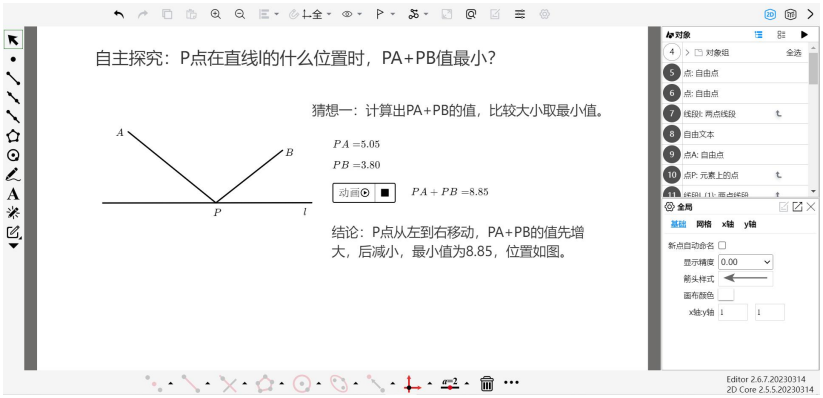


图 5.5 学生自主探究猜想一过程

通过猜想，学生找到了线段和最小时动点的位置，一定程度上已经解决了问题，但在探究的过程中，有细心的小伙伴提出疑问：“虽然数值和结果都很直观，但是肯定还有其它更简便的方法，不然如果没有工具的话这个问题我们就解决不了吗？”学生们产生疑惑或者有其它想法，说明他们正在火热的思考着，当学生未能想到更好的办法时，教师可以进行适当引导：“本章节我们学了什么内容？这些内容和将军饮马有什么联系吗？除了直观计算，能否间接转化呢？”通过一系列问题，引导学生联想到轴对称和转化思维，进而得出其它解题猜想，即根据轴对称间接转化线段，通过分析得出线段和最小时动点的位置，如图 5.6。

中国知网 https://www.cnki.net

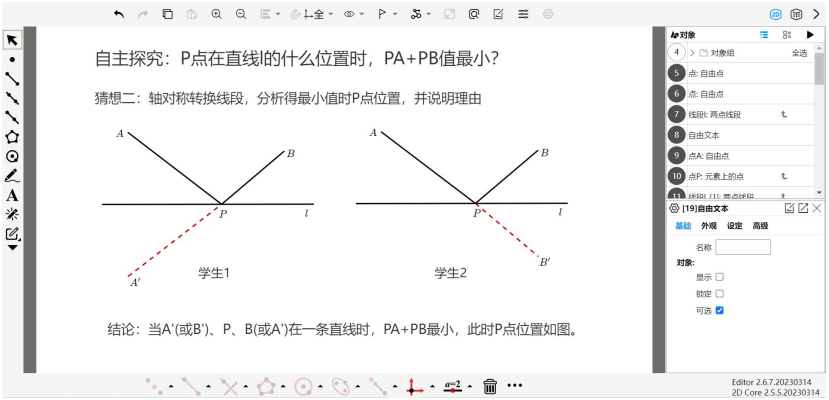


图 5.6 学生自主探究猜想二过程

学生通过网络画板初步解决了问题，又在利用工具解决问题过程中发现解法短板新问题，这一发现正是网络画板带给学生的灵感。

① 合作探究，培养辩证思维

网络画板不仅为学生自主探究提供了工具，也为合作探究提供了平台。在网络画板的支持下，学生带着各自的认知进入课堂，不同学生之间的认知差形成势能差，教师可将其作为教学资源基础，鼓励同学之间开展小组合作探究。通过合作，集思广益，将不同的想法进行整合探索，得出更为综合全面的结论。当在探索过程中遇到认知冲突时，是思维的火花在碰撞，教师可鼓励小组之间自行解决，可能会有不一样的收获，如果矛盾未解开，教师可进行适当的引导，帮助其解决问题。以学生独立思考、合作探究、交流互鉴为基础的探究学习方式，学生经历了猜想、计算、合作推理、验证等过程，掌握了知识的本质和原理，在富有个性的、自主参与和合作学习中，培养了自主探索和合作探究的意识，提高了探究数学问题的兴趣，增强了学好数学的信心。

自主探究环节中，学生们已经得出了将军饮马的结论，总结出了“一动两定”模型的解题步骤，在掌握了最简单的模型之后，可对条件进行变式，改变动点和定点的个数，得到新的模型，引导学生合作探究。探究结束后，总结模型及其解题步骤。在这个过程中，培养学生举一反三的应变能力和小组探究的合作意识。

5.2.3 利用网络画板技术支持，拓展变式训练

网络画板能够辅助教师教学和学生学习，为教师和学生提供了数学教学和数学学习上的技术支持。在拟定方案环节，学生利用网络画板经历了对几何最值问题解法的猜想过程，并通过自主探究与小组合作研究的形式对猜想进行了实践，最终得出了猜想结论，制定了最优的解题方案。方案制定好后，学生需要检查每

中国知网 https://www.cnki.net

一个解题步骤，继续使用网络画板执行计划，当确认已经解决问题后，抛开工具，按照拟定的计划再将原本这道题在作业本上解答出来。

在执行方案过程中，学生对已经制定出来的方案进行实践，代入问题中的数据，借助网络画板完成对问题的解答。网络画板是辅助学生解决问题的，绝不能代替学生解题，所以利用网络画板解决问题后，学生需要进行解题思维和解题形式的迁移，将网络画板中的解题思维和流程迁移到实际题目中去。要让学生在执行方案环节结束后，实现经历网络画板和实际题目双重操作的过程。其次，网络画板有丰富的资源库可以进行借鉴与利用，教师可以自己制作网络画板课件，也可以借鉴优秀的作品。例如，在资源库中以“将军饮马及其变式”为关键词搜索，可以搜索出 6782 个作品，如图 5.7：

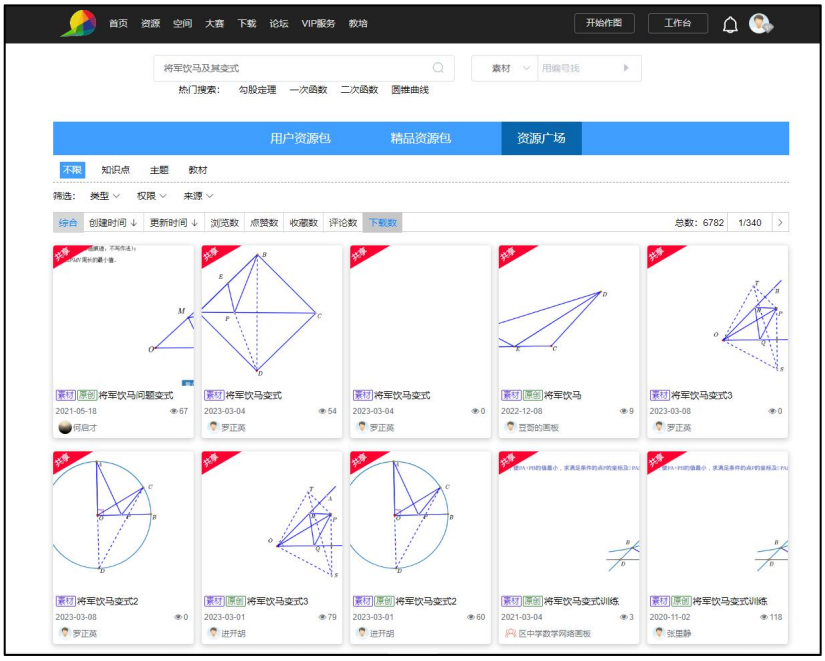


图 5.7 “将军饮马及其变式”网络画板资源库中作品数量

再以“一定两动”为关键词搜索，可以搜索出 16724 个作品，如图 5.8，海量的作品可以供教师和学生选择。

中国知网 https://www.cnki.net

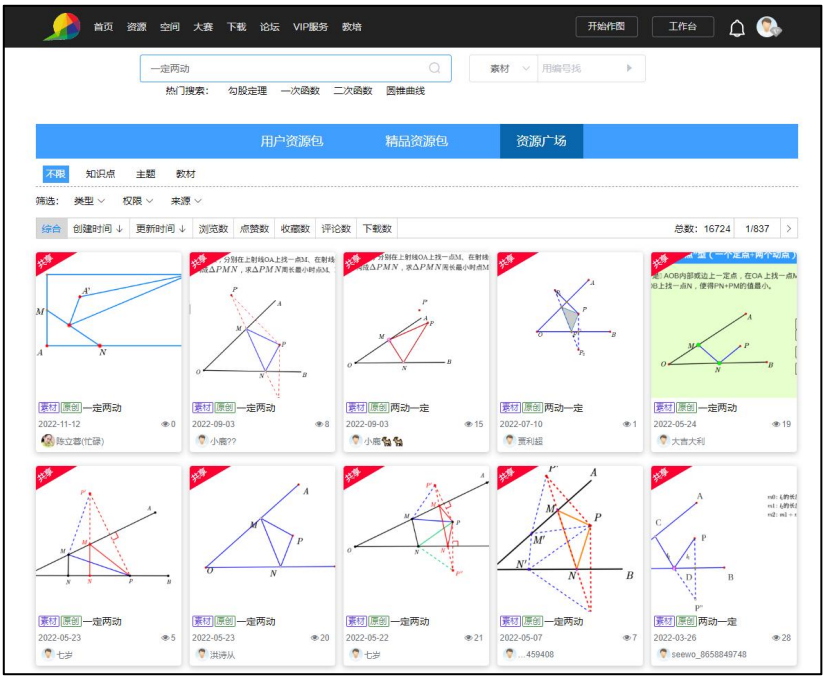


图 5.8 “一定两动”网络画板资源库中作品数量

5.2.4 深化几何最值模型应用，归纳解题方法

回顾的环节是教师带领学生一起进行课堂小结，回顾整个探究过程、操作过程和解题应用的过程，这个过程教师可以把课堂交给学生，组织学生进行成果交流汇报环，这既是提供给学生展示探究成果的“舞台”，也是给学生提高能力享受成功的平台。对于探究结论等学习成果，可组织小组进行分享本组探究的结论和探究过程中发现的疑惑点及难点问题，引起全班同学的重视。同时教师也要对同学们的汇报加以总结提升，总结时不局限于单个知识点的总结，应适当拓宽范围，前牵后联，便于学生从整体上把握所学内容。

在本专题的学习中，教师可组织小组派代表分享不同模型的探究结论，归纳各模型的解题方法。对于同一模型有不同解题方法的，可分享各自的探究过程以及结论，做到“和而不同”，正确的结论予以支持，存在误差的结论进行错误探究分析，找出问题根本，知其然还知其所以然，不仅给学生提供了错误的反例，更加深了学生对模型的理解。

与此同时，布置课后作业同课堂练习一样都是数学教学必不可少的环节，是检测学生学习情况和教师教学效果的重要方式和手段。数学课标中指出，应促使学生经历数学知识的完整生成过程，切实加强学生的数学应用意识，而数学知识的应用方式之一就体现在课堂练习和课后作业中。所以教师应该对作业进行精心设计，重视教学内容和学生的需求，使作业有针对性和科学性。

中国知网 https://www.cnki.net

在几何最值问题专题教学中，教师应该根据专题知识点的特点，设计专题作业，将练习题和作业题根据模型进行分类，同一类型中再根据难度进行分层，分为选做题和必做题，服务于不同层次和类型的学生，满足义务教育数学课标中的要求，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。通过课堂和课后作业的练习，锻炼学生的模型化思维和变式思维，深化学生对知识的理解和模型的应用，培养学生的应用意识、应用能力和综合实践能力。

中国知网　https://www.cnki.net

6 基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学实践尝试

本章将依据上一章基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学策略，分别选取几何最值问题专题教学中两个原理的第一课时设计完整的教学案例，并进行教学实践尝试。通过实践，一方面从实践结果中体现教学设计是否合理以及网络画板的使用对学生的影响，另一方面从实践结果中发现存在的问题并提出改正的建议。

6.1　实践目的

基于学生在“几何最值问题”专题中的学习现状，笔者从新的角度出发，即从解题教学的角度，引入现代信息技术工具网络画板辅助课堂教学，提出了每个教学环节的教学策略。为了将教学策略落到实处，笔者选择了几何最值问题专题内容中的两个课时并对此进行了教学案例设计。为了检验“基于网络画板的初中数学几何最值问题的教学案例设计”的实效性和学生对网络画板辅助数学课堂教学以及学生使用网络画板进行学习的看法，笔者在重庆市某初级中学进行了教学实践尝试，结束后对所有被试学生进行问卷调查。通过实践，一方面从实践结果中体现教学设计是否合理以及网络画板的使用对学生的影响，另一方面从实践结果中发现存在的问题并提出改正的建议。

6.2 实践对象

实践对象为重庆市一所初级中学初一两个班级的学生，一共 95 人，采用的实践方式是教育实践法和问卷调查法，实践对象样本分布表如图 6.1 所示。实践时间为 2021-2022 学年秋季学期，被试学生当时所使用的教材为数学北师大版本七年级下册。被试两个班级的数学老师为同一位老师，是该中学的一名初一数学正式任课教师，不担任班主任工作。

表 6.1 实践对象样本分布表

班级	男生	女生	合计
实践班级 1	22（47.8%）	24（52.2%）	46
实践班级 2	26（53.1%）	23（46.9%）	49
合计	48（50.5%）	47（49.5%）	95

中国知网　https://www.cnki.net

6.3 实践过程

由于北师大版本初中数学几何最值问题专题所需要的知识点在教材中分别位于七年级上册第四章第二节“比较线段的长短”、七年级下册第二章第一节“两条直线的位置关系”以及第五章“生活中的轴对称”，所以该专题的教学时间安排在第五章内容学习完之后，课型为专题拓展课。由于笔者的授课经验不足以及该学校整体的课程进度较为紧张，所以实践授课的数学教师仍由本班级原本的数学教师担任，实践课时为两课时，第一课时为“两点之间，线段最短”原理求最值，课程的内容包括表 3.1 中模型一的前四种类型，第二课时为“垂线段最短”原理求最值，课程的内容包括表 3.1 中模型二的前两种类型。

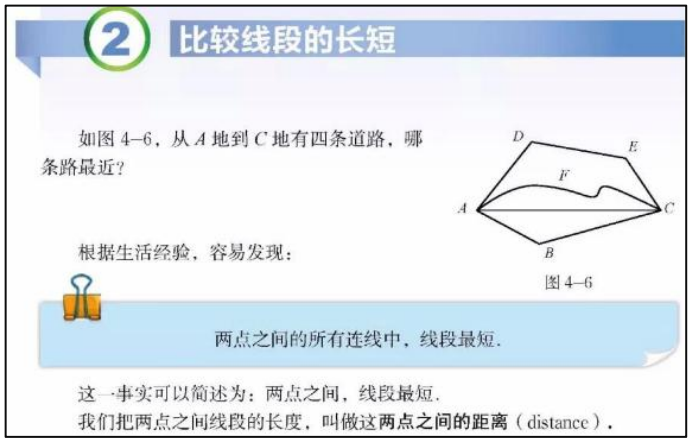
数学教师在进行“几何最值问题”专题教学时，使用本研究中的教学设计和网络画板资源。课前教师和学生分别都接受了有关网络画板使用方法的简短培训。教学结束后，对学生进行了“初中生对网络画板在数学几何最值问题学习中应用”的看法调查。了解学生对网络画板辅助初中数学几何最值问题教学的看法，以及将网络画板应用于初中数学课堂教学和学习的看法。

6.3.1 教学设计分析

① 教材分析

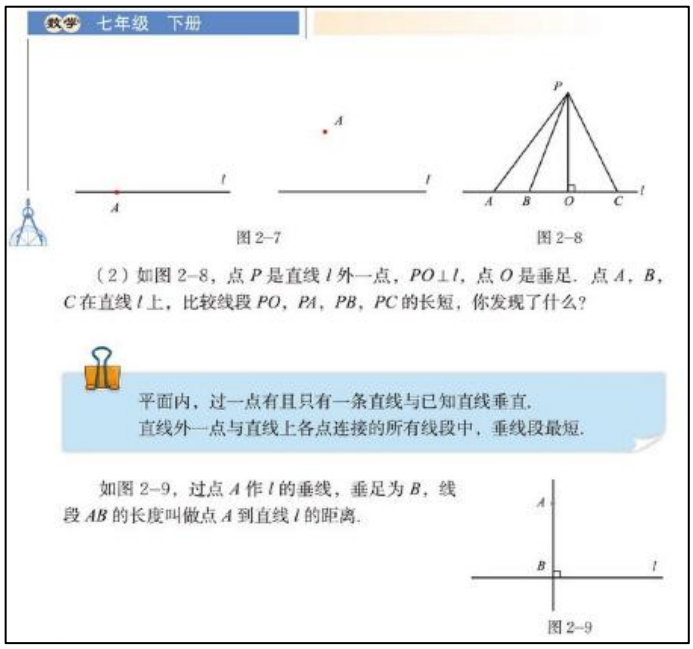
本节课是北师大版数学七年级下册中学习完第五章“生活中的轴对称”后开展的“几何最值问题”专题拓展训练，一共分为两个课时，分别是：①“两点之间，线段最短”原理求最值；②“垂线段最短”原理求最值。（本文中所有内容均使用的北师版初中数学教材）

原理一“两点之间，线段最短”出自七年级上册第四章第二节“比较线段的长短”中，如下图：

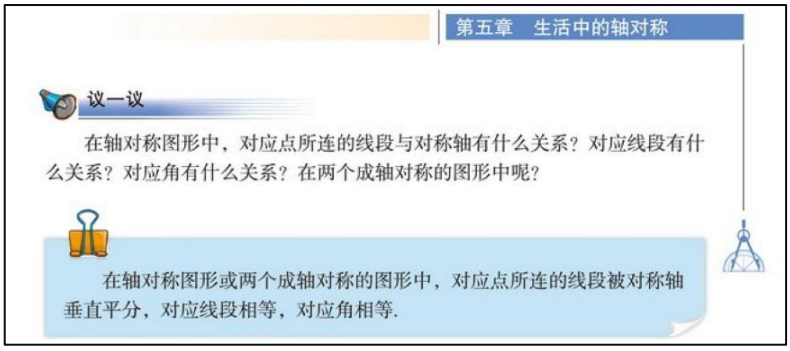


中国知网　https://www.cnki.net

原理二“直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短（简单说：垂线段最短）”出自七年级下册第二章第一节“两条直线的位置关系”中，如下图：



原理一、二的学习是为“几何最值问题”专题训练奠定知识基础，之所以在第五章“生活中的轴对称”之后开展此专题，是因为几何最值问题的解法需要用到轴对称的性质等相关知识，如下图：



② 学情分析

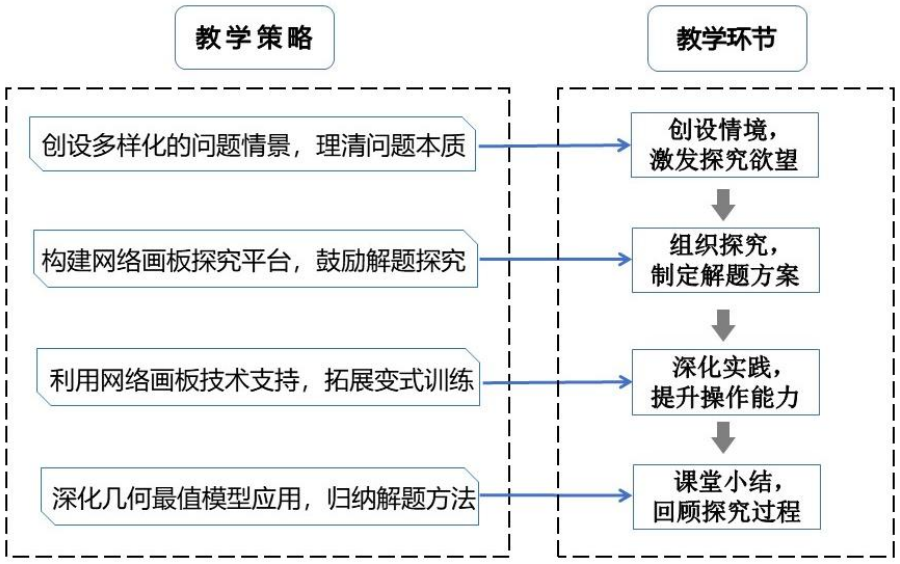
学生在七年级上册学习了原理一，在对两点间的距离问题的探究过程中，经历了观察、实验、猜想等数学活动，发展了合情推理能力，初步学会从数学角度提出问题并应用所学知识解决问题，体会了探究的乐趣。七年级下册第二单元学习了原理二，在对垂线及其性质的探究过程中，经历了操作、探索、归纳、总结等过程，了解了垂线的概念，理解垂线的性质，会尺规作图画过一点作已知直线的垂线，并会度量点到直线的距离，初步形成几何概念的认识方式和几何结论的归纳方法，进一步体会探究的乐趣。第五章学习了轴对称图形以及两个图形成轴

中国知网 https://www.cnki.net

对称等相关概念，理解了轴对称的性质，为探索几何最值问题的解法奠定知识基础。

③ 教学环节

为了将教学策略落实到教学环节中，教学策略指导教学环节的设计，将教学策略与环节一一对应，如下图：



6.3.2 课例Ⅰ：“两点之间，线段最短”原理求最值

◆ **教学目标**

Ⅰ. 知识与技能

理解两点之间，线段最短原理，掌握轴对称变换的做法，综合运用轴对称变换将线段和几何最值问题转化为“两点之间，线段最短”原理求最值问题。

Ⅱ. 过程与方法

经历探索解决线段和最值问题的过程，体会图形的变换在解决最值问题中的作用，感悟转化思想，培养自主探究与合作探究能力，发展数学思维与模型意识；经历使用网络画板探究的过程，培养动手操作能力。

Ⅲ. 情感态度与价值观

由历史故事引入，提高数学学习的兴趣与积极性；通过自主探究与合作探究的过程，养成自主思考与小组合作等数学学习习惯；在观察、分析、探究等数学活动过程中，培养并提高分析问题、合情推理、解决问题等的能力；在使用网络画板的过程中体会作图的重要性，感受数学学习工具为数学理解带来的帮助。

◆ **教学重难点**

Ⅰ. 教学重点

中国知网 https://www.cnki.net

利用轴对称变换将线段和最值问题转化为“两点之间，线段最短”问题。

Ⅱ．教学难点

如何基于网络画板利用轴对称几何变换将几何最值问题转化为可利用“两点之间，线段最短”求线段和的最值问题。

◆ **教法学法**

探究式教学与探究式学习

◆ **教学用具**

网络画板、幻灯片课件

◆ **教学过程**

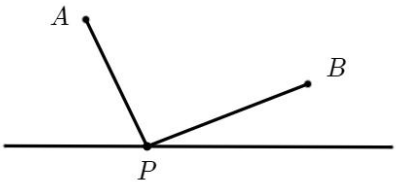
一、创设情境，激发探究欲望

“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”，唐朝诗人李欣用简短的两句诗描述了军营里的一位将军每日在观望烽火之后，都会从山脚出发，走到河边饮马后，再回到军营的活动过程。（展示幻灯片）

有一天，将军突然发现每日回到军营的时间都不一样，有时早，有时短，于时他便疑问，到底在哪个位置饮水路途最短，从而使花的时间最少呢？这就是著名的“将军饮马”问题。

实际上，我们可以把“将军饮马”问题抽象成数学问题，即：

例 1：如图 6.1，已知点 P 是直线 l 上的一个动点，点 A、B 为直线外的两定点，且在直线的同一侧，求当 $PA+PB$ 的值最小时，P 点的位置。



6.1 例 1

请同学们思考以下几个问题：

这道题中的未知量是什么？已知数据是什么？条件是什么？

中国知网 https://www.cnki.net

（**设计意图**：在引入环节，关注几何最值问题的知识背景，创设问题情境，引起学生的注意力，以此激发学生的求知欲望。以故事为背景，将故事中所蕴含的数学问题抽象成数学模型，在网络画板中展示出来，并通过几个连续的提问，开门见山，明晰已知量与需要解决的问题。这即是怎样解题表中的第一步，理解题目。）

二、组织探究，制定解题方案

同学们，你们能否帮助将军解决这个问题呢？由于 P 点是个动点，在移动的过程中能产生无数个线段和的情况，那到底 P 点在线段的何处时两条线段和才最小呢？

生 1：我们可以借助网络画板，将不同位置的 P 点所对应的两条线段长度求出来，再计算它们的和的长度，通过比较长度的大小进而得出长度最小时 P 点的位置就是我们所求的位置。

生 2 补充：由于 P 点是直线上的动点，所以 P 点有无数个，由此构成的线段和也有无数个值，无法全部列出，所以可能无法比较。

生 3 再次补充：虽然无数个 P 点构成了无数个线段和的值，无法全部罗列出，但是我们可以猜测一下，这些值是否有某些规律呢，如果有规律的话，就可能比较得出大小。

同学们想通过直接计算的方法得到最小值，是个不错的办法，只是过程可能稍微复杂，那还有没有其它的办法呢？想一想我们这一章学了什么内容，它能为你带来什么启发吗？

生 4：我们这一章学习的是轴对称及其性质，在轴对称图形或成轴对称的两个图形中，对应点所连的线段被对称轴垂直平分，对应线段相等，对应角也相等。

生 5：所以我猜想可以通过对称的做法，转化边求最小值。

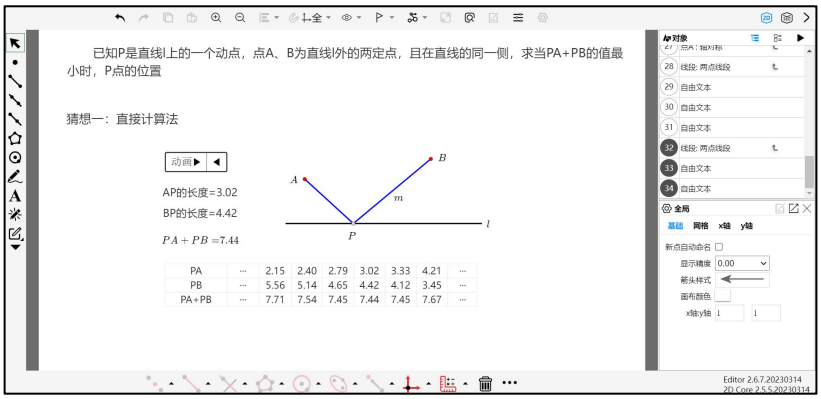
由此我们得到了两种解法的猜想，一种是直接计算，一种是通过图形的变换，即作对称转化边。接下来，请同学们利用

（**设计意图**：在理清问题本质的基础上，教师引导学生寻求解题突破口，制定探究方案。根据学生自身的经验，容易想到直接计算长度，比较长度大小进而求得最小值，确定点的位置。方法是否可行教师不能直接否定，引导学生自行探究。当学生想不出更好的办法时，老师可以适当提示，引导学生猜想出不同的想法，进而通过两种方法的对比去验证猜想。这即是怎样解题表中的第二步，拟定方案。）

（1） 自主探究，培养自学能力

中国知网 https://www.cnki.net

选择猜想一的同学，利用网络画板将线段 PA 、 PB 的长度度量出来，再计算 $PA+PB$ 的长度， P 点在直线上运动时，线段的长度会随之发生变化。通过观察数据的变化，发现点 P 在从左至右的移动过程中， $PA+PB$ 的值先减小，后增大，最小值的长度为 7.44，此时就是最终确定的点 P 的位置，如图 6.2。



6.2 猜想一探究过程

选择猜想二的同学们出现了两种不同的作图方式，一部分同学过点 A 作关于直线 l 的对称点 A'，连接 PA'，得 $PA=PA'$，使得 $PA+PB=PA'+PB$，于是根据“两点之间，线段最短”原理，即当 A'、 P、 B 在同一条直线上时， $PA'+PB$ 的值最小，最小值为 $A'B$ 的长度，此时就是最终所确定的 P 点的位置，如图 6.3。另一部分同学过点 B 作关于直线 l 的对称点 B'，连接 PB'，得 $PB=PB'$，使得 $PA+PB=PA+PB'$，最终得到 $PA+PB$ 的最小值即为 AB' 的长度，从而确定 P 点位置，如图 6.4，两种作图选择了不同的定点作对称，但最终 P 点位置是一样的。

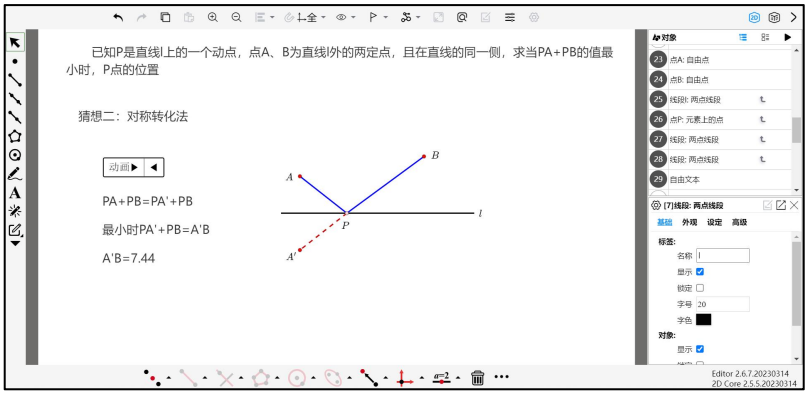


图 6.3 猜想二第一种作图方式

中国知网　https://www.cnki.net

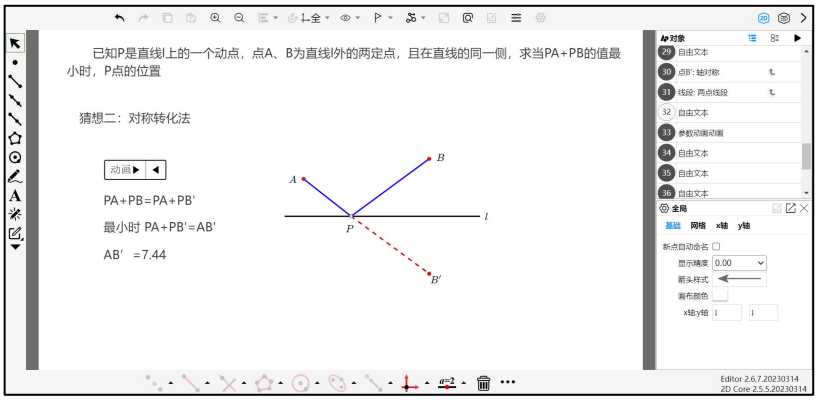


图 6.4 猜想二第二种作图方式

利用网络画板，两个解法的猜想都得到了验证，但从验证过程来看，两者存在一些步骤、原理、操作时间等上的差异，请同学们选择你更喜欢的方法，并说一说理由。

生 6：我更喜欢第二种解法，第一种解法需要计算出线段和再作比较，当线段和最小时，此时就是 P 点最终位置，但在实际解题过程中，需要度量两条线段长，再求和比较，操作步骤繁琐，且误差较大，不易实现。

生 7：我认为第二种解法更合理，且容易操作。作对称后根据图形的对称的性质，对应边相等，将其中一条边转化，转化后根据两点之间，线段最短可迅速确定 P 点位置，不需要度量长度，也不需要计算，步骤简洁且误差小。

同学们一致认同第二种解法更合理，一起总结一下“将军饮马”几何最值模型的解题步骤：

①作对称，将同侧定点转化为异侧定点。选择其中一个定点，作关于动点所在直线的对称点。

②连接异侧的两个定点，所构成的线段就是线段和的最小值，此时线段与直线的交点就是动点最终确定的位置。

③最后将两定点与动点连接起来即可。

（设计意图：巧用网络画板，引导学生自主探究，培养自学能力。猜想一利用网络画板里的度量与计算工具可快速计算出线段和，通过对动点进行追踪，观察动点在移动过程中线段和的变化情况，最终确定 P 点位置。猜想二利用对称变换及其性质转换边，再利用“两点之间，线段最短”原理迅速确定 P 点位置。验证猜想后，不能直接告诉学生正确的做法是解法二，而是让学生观察两种解法差异，引导学生自己选择出最优解法就是第二种，整个过程以学生为中心，引导学生自己得出结论，不仅能够提升学生的独立思考能力，更能让学生体会到探究过程中的成就感，同时也培养了学生的辩证思维。自主探究结束，引导学生思考探讨，归纳总结作图步骤，培养学生养成探究过程完整性的习惯与归纳总结的能力。）

中国知网　https://www.cnki.net

（2）合作探究，培养辩证思维

将军饮马问题实际上是求两个定点与一个动点，即“两定一动”所构成的线段和的几何最值模型，经历探索，我们发现可以通过作对称转化边，再利用“两点之间，线段最短”原理即可轻松解决问题。那如果有多个动点，求多条线段的和也能用同样的办法吗？请同学们拿出网络画板，小组合作探究例二，并总结解题步骤。

例 2：点 P 是 $\angle AOB$ 内的一定点，分别在射线 OA 上找一点 M，在射线 OB 上找一点 N，顺次连接点 P、M、N 构成 $\triangle PMN$，求 $\triangle PMN$ 周长最小时 M、N 的位置，如图 6.5。

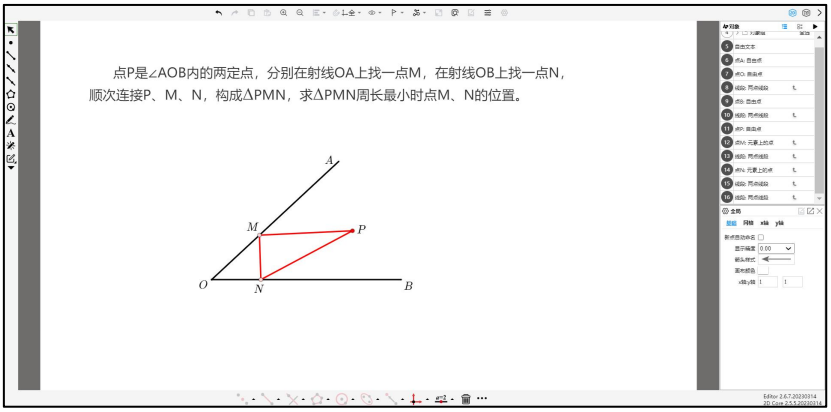


图 6.5 例 2

探究结束，同学们纷纷给出了探究结果并踊跃地分享给全班同学。

生 8：我们组的探究结果如下图 6.6，根据将军饮马的解题思路，我们也用了对称的变换，将 P 点作了两次对称得到 P'、P''，再将点 P'、P'' 连接起来，线段 $P'P''$ 与射线 OA、OB 的交点就是 M、N 的位置，再将此时的 M、N 与 P 点顺次连接起来，这个时候 $\triangle PMN$ 周长最小。

其它小组也都是这么做的吗？哪个小组能补充一下上个小组每一步作图的原理呢？

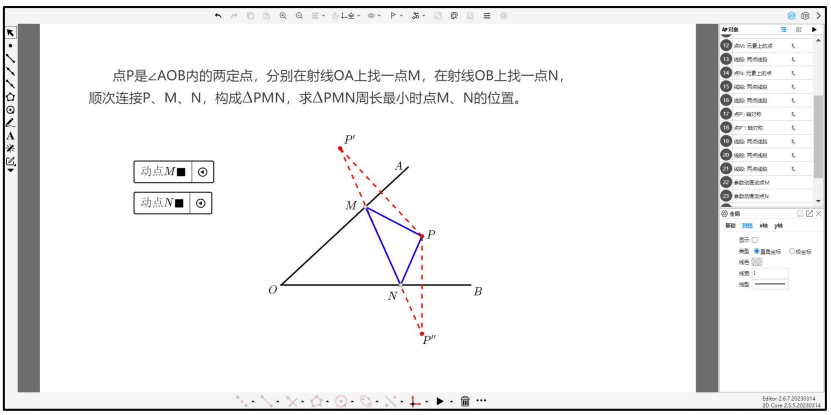


图 6.6 学生 8 探究结论展示

中国知网 https://www.cnki.net

生 9：我们小组也是这样作图的。从问题入手，求△PMN 周长的最小值实际上就是求线段 PM+PN+MN 的最小值，分别作两次对称变换就将线段 PM 转化成了线段 $P'M$ 、线段 PN 转化成了 $P''N$，即转化成了求 $P'M$+P$''N$+MN 三条线段和的最小值，再根据两点之间，线段最短原理，即当 P'、M、N、P'' 四点在同一条直线上时 $P'M$+P$''N$+MN 和最小，此时就确定了 M 、 N 两点的位置。

同学们的探究过程与探究结论都非常正确，接下来我们一起总结一下作图步骤：

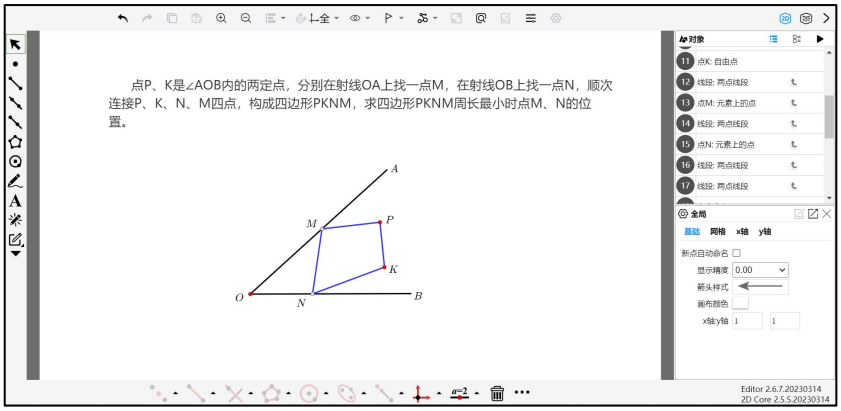
①作两次对称，过定点分别作关于两个动点所在直线的两个对称点。

②连接两个对称点，所构成的线段就是线段和的最小值，即三角形周长的最小值，此时线段与两条射线的交点就是两个动点最终确定的位置。

③最后将两动点与定点顺次连接起来即可。

例 2 求三角形周长的最小值，实际是求两个动点与一个定点所构成的三条线段和的最小值，即“一定两动”几何最值模型。接下来我们继续探索“两定两动”几何最值模型，即有两个动点与两个定点，求线段和的最小值。请同学们打开网络画板，小组合作完成例 3 的探索，并如同例 1、例 2 总结出解题步骤。

例 3: 如图 6.7，点 P 、 K 是 $\angle AOB$ 内的两定点，分别在射线 OA 上找一点 M ，在射线 OB 上找一点 N ，顺次连接 P 、 K 、 N 、 M 四点，构成四边形 $PKNM$ ，求四边形 $PKNM$ 周长最小时 M 、 N 的位置如图 。



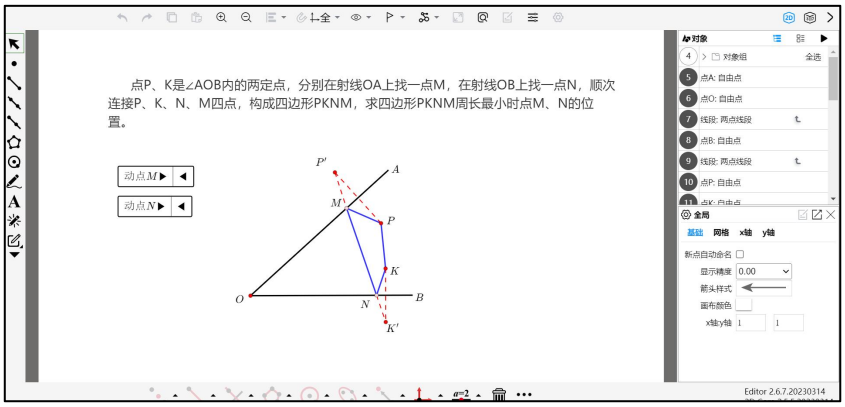
6.7 例 3

探究结束，学生分享作图步骤。

生 10：从问题入手，求四边形 $PKNM$ 周长的最小值实际上就是求线段 $PK+KN+NM+MP$ 和的最小值，其中线段 PK 是固定长度，所以只需要求 $KN+NM+MP$ 和的最小值。分别过点 P 作关于射线 OA 的对称点 P'，过点 K 作关于射线 OB 的对称点 K'，分别连接 $P'M$ 、 $K'N$，两次对称变换就将线段 MP 转化成了线段 MP'、线段 KN 转化成了 $K'N$，即转化成了求 $P'M+MN+NK'$ 三条线段和的最小值，再根据两点之间，线段最短原理，即当 P'、M、N、K' 四点在同一条

中国知网　https://www.cnki.net

直线上时 $P'M+MN+NK'$ 和最小，此时就确定了 M 、 N 两点的位置。再将此时的 P 、 K 、 N 、 M 四点顺次连接起来就得道了四边形 $PKNM$ 周长最小值，如图6.8。



6.8 学生 10 探究结论展示

师生总结“两定两动”几何最值模型解题步骤：

①作两次对称，分别过两个定点作关于两个动点所在直线的两个对称点。

②连接两个对称点，所构成的线段就是四边形其中三条线段和的最小值（两定点连线的线段长度是定值），此时线段与两条射线的交点就是两个动点最终确定的位置。

③最后将两个动点与两个定点顺次连接起来即可。

（**【设计意图】**合作探究环节，教师要为学生构建一个公正的合作平台和融洽的合作氛围，引导小组合作探究。整个探究过程以学生为中心，探究思路、探究过程、探究结论均由小组成员自行完成，并鼓励分享探究结论，老师作为引导者，可为遇到瓶颈的小组给予提示。

例 2 是在“将军饮马”问题基础上进行的变式，增加了动点的个数，提升了题目的难度。但是由于学生刚经历了“将军饮马”问题的探究，并总结了解题步骤与其中的原理，所以不难想到作对称转换边的解题思路。整个过程中，教师需要鼓励学生大胆猜想，并验证猜想，得出结论，分享结论。

有了例 1 和例 2 的经验,学生对例 3 的探究更加游刃有余,探究速度有所提高,探究过程和结论会更加完整。

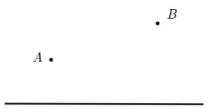
例 2、例 3 是在“将军饮马”问题的基础上逐步增加定点和动点的个数，难度有所提升，所以采用小组合作探究的模式，既培养学生举一反三、模型化等能力，更培养学生的合作意识和变式思维。）

三、深化实践，提升操作能力

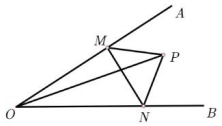
中国知网　https://www.cnki.net

1、如图，小明家在图中的点 A 处，现在他要去文具一条街买支笔，之后去学校，学校在图中的点 B 处，问：小明怎样走才能使得路程最短？

2、如图，点 P 是 $\angle AOB$ 内任意一点，$\angle AOB$=30°，$OP=8$，点 M、N 分别是射线 OA、OB 上的动点，则 $\triangle PMN$ 周长的最小值为_____。



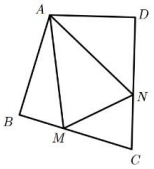
第1题图



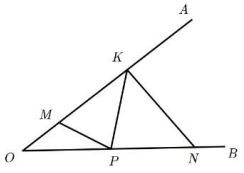
第2题图

3、如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=100°$，$\angle B=\angle D=90°$，分别在 BC、DC 上找一点 M、N，使 $\triangle AMN$ 的周长最小，则 $\angle AMN+\angle ANM$ 的度数为_____。

4、如图，$\angle AOB$=30°，点 M、N 分别是边 OA、OB 上的定点，点 P、K 分别是边 OB、OA 上的动点，记 $\angle OPM=\alpha$，$\angle OKN=\beta$，当 $MP+PK+KN$ 的值最小时，α 与 β 有怎样的数量关系：_____。



第3题图



第4题图

（**设计意图**：为了让学生在能够学以致用，根据探究的模型类型设置四道课堂练习，将学生在拟定方案环节中总结的解题步骤运用到实际题目中。

同时，课堂练习是完整的一节课的重要组成部分，是检验师生双边教学活动的一个重要手段。恰到好处的练习题不仅能够巩固知识，形成技能，还能启发思维，培养能力。四道习题均针对本堂课所学的三个几何最值模型，习题难度由易到难，逐渐富有挑战性，激发学生学习的兴趣和积极性。通过课堂练习能检验学生对新知的掌握情况，老师再根据学生实际情况进行指导，从而提高课堂教学的有效性。）

四、课堂小结，回顾探究过程

1、本节课我们研究了什么问题，我们是如何解决这个问题的？基本过程是怎样的？

本节课我们研究的是“将军饮马”问题，我们首先将将军饮马这个实际问题转化成数学问题，再用数学模型抽象出来，帮助我们进行实验观察，进而得出了两个解法猜测。然后利用网络画板进行自主探究，将猜想付诸于实践，通过严谨的逻辑证明来验证猜想，从而得到了结论。

中国知网　https://www.cnki.net

在“将军饮马”模型的基础上我们又对“一定两动”、“两定两动”模型进行了小组合作探究。

2、解决这三个几何最值模型的基本步骤是什么？

第一步，作对称变换转换边，过定点作关于动点所在直线的对称点，将边进行转化。

第二步，连线，根据“两点之间，线段最短”原理将定点与对称点相连，与动点所在的直线的交点就是线段和最小时动点的位置。

3、“对称”变换在本节课中起到了什么作用？

对称变换是为了转化边，所以起到了转换的作用，在解题中相当于桥梁的作用。

（设计意图：课堂小结环节，引导学生回顾整个探究过程，归纳解题方法，培养学生总结归纳的学习习惯，这即是怎样解题表中的最后一步，回顾。）

6.3.3 课例II：“垂线段最短”原理求最值

◆ **教学目标**

Ⅰ. 知识与技能

理解垂线段最短原理，掌握轴对称、垂直等作法，综合运用轴对称变换将线段和几何最值问题转化为“垂线段最短”原理求最值问题。

Ⅱ. 过程与方法

经历探索解决线段和最值问题的过程，体会图形的变换在解决最值问题中的作用，感悟转化思想，培养自主探究与合作探究能力，发展数学思维与模型意识。

Ⅲ. 情感态度与价值观

由历史故事引入，提高数学学习的兴趣与积极性；通过自主探究与合作探究的过程，养成自主思考与小组合作等数学学习习惯；在观察、分析、探究等数学活动过程中，培养并提高分析问题、合情推理、解决问题等的能力。

◆ **教学重难点**

Ⅰ. 教学重点

利用轴对称变换将线段和最值问题转化为“垂线段最短”问题。

Ⅱ. 教学难点

如何利用轴对称变换将几何最值问题转化为可利用“垂线段最短”求线段和的最值问题。

◆ **教法学法**

探究式教学与探究式学习

中国知网　https://www.cnki.net

◆ **教学用具**

网络画板、幻灯片课件

◆ **教学过程**

一、创设情景，激发探究欲望

回顾旧知①：

上节课我们学习了利用“两点之间，线段最短”原理求线段和的几何最值模型，同学还记得解题步骤吗？

生 1：作对称转换边，再连线。

每一步作图的原理是什么呢？

生 2：作对称变换可利用对称的性质，对应线段相等转化边，连接两个定点是根据“两点之间，线段最短”原理。

本节课我们将继续探究线和最值模型，那今天我们会学习哪些模型呢，与上一节课学习的模型有什么异同点呢?接下来一起进入今天的学习。

回顾旧知②：

例 1：如图 6.9，直线 l 外一点 P 与直线 l 上任意一点相连，可形成无数条线段，这些线段的长度有什么特点呢？

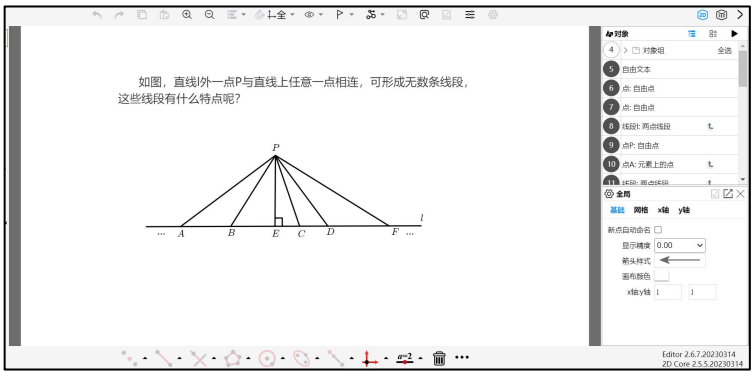


图 6.9 例 1

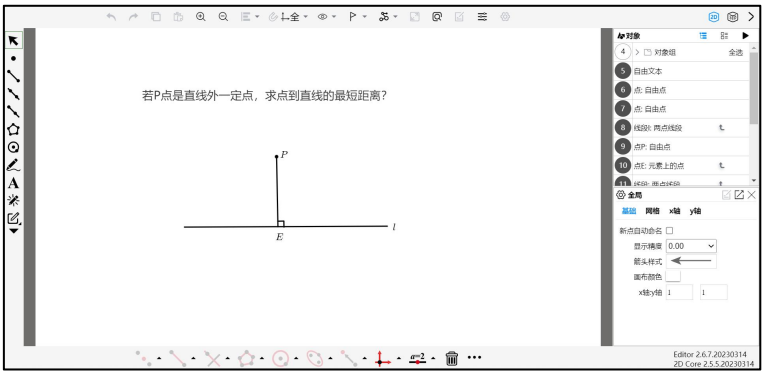
生 3：所有线段中 PE 是最短的一条。

为什么 PE 是最短的一条， PE 与直线 l 是什么位置关系？由图可以看出，$PE \perp l$，我们此前已经学过了垂线的性质，性质 1：过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直；性质 2：连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短。所以根据垂线的两条性质，我们判断出 PE 这条线段最短。

反过来，若点 P 是直线 l 外一定点，求点 P 到直线 l 的最短距离，应该如何作图？

生 4：根据“垂线段最短”原理，过点 P 作直线 l 的垂线，如图 6.10。

中国知网 https://www.cnki.net



6.10 学生 4 解法展示

再换一种问法：若点 P 是直线 l 外一定点，点 E 是直线 l 上一动点，连接 PE，求线段 PE 的最小值？请问和上述作图方法一样吗，如何确定动点 E 的位置？

生 5：跟上述作图方法一样，过点 P 作直线 l 的垂线，根据“垂线段最短”原理，与直线 l 的交点就是动点 E 的位置。

（设计意图：采用回顾旧知方式引入，既复习了上一节课所学知识点，回顾关键步骤与原理，又为本节课所学的知识点作铺垫。通过“垂线的性质”的反向运用，引出“垂线段最短”原理。创设情景环节让学生初步感受两个原理的区别与使用情境。）

二、组织探究，制定解题方案

上课开始我们回忆了垂线的性质与作法，利用“垂线段最短”原理解决了由一个定点与一个动点所构成的线段最短的几何最值问题，即“一定一动”几何最值模型。接下来我们将增加动点的个数，继续探究线段和最值问题。

例 2：如图 6.11，直线 AB、AC 相交于点 A，点 P 是平面内一定点，点 M、N 分别是 AB、AC 上的动点，求 $PM+MN$ 的最小值？

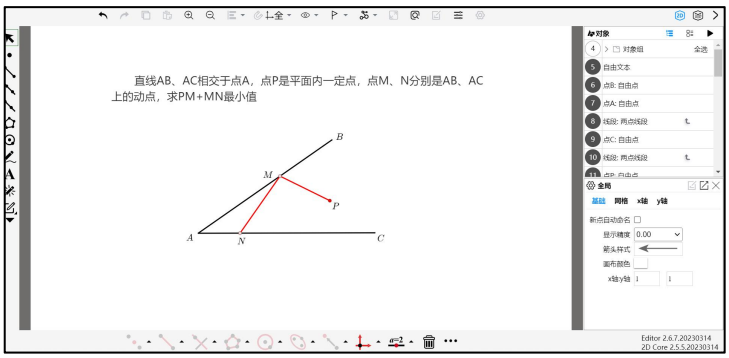
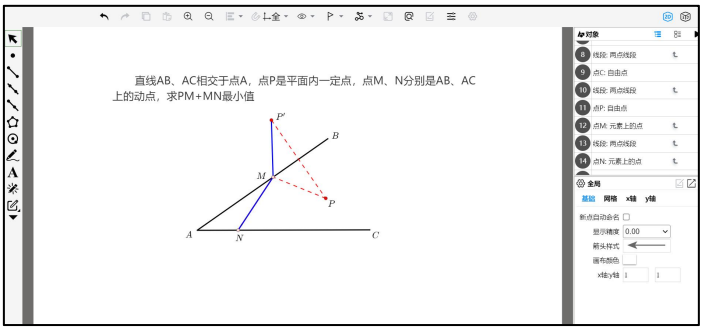


图 6.11　例 2

生 7：而本题只有两条线段，所以如图 6.12，我认为可以先过定点作一次对称转化一条边，再根据“两点之间，线段最短”原理确定两条线段和的最小值。

中国知网　https://www.cnki.net

生 8：我认为“生 7”同学的做法有问题，求三角形周长最小值时的第二步——连线，连接的是两个定点，但是这道题作了一次对称后只有一个定点 P'，N 点是动点，所以无法直接连接 P'、N。



6.12 学生 7 解法展示

生 9：作一次对称后问题转化成了求 $P'M+MN$ 的最小值，此时两条线段和最小值应该是 P'、M、N 三点在同一条直线上时，即线段 $P'N$，其原理实际就是“两点之间，线段最短”，但由于 N 点是直线 AC 上的动点，所以线段 $P'N$ 的长度是变化的，所以现在转化到求 $P'N$ 的最小值，即“一定一动”模型。

（设计意图：总结“一动一定”最值模型，为后续增加动点和定点个数的模型提供解题思路。例 2，探究求两条线段和的最小值，与上节课的“三角形周长最小值”进行对比学习。通过对比学习，引导学生发现同样是求线段和，但它们之间有区别与联系，从而引发学生们产生激烈的解法讨论，并分享自己的猜想，从而得出最终的解法猜想。）

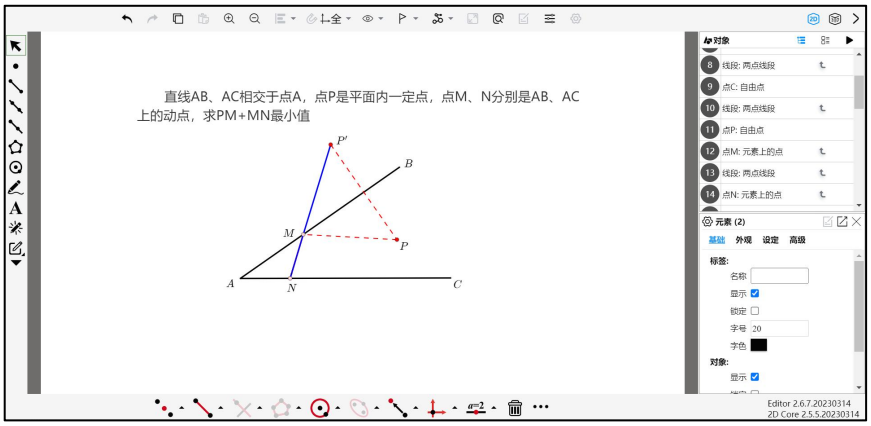
（1） 自主探究，培养自学能力

同学们在刚刚激烈的讨论之下一致认为先过定点作一次对称，转化到我们已经学过的“一定一动”模型，即可轻松解决问题。请同学们根据我们刚刚猜想出来的解题思路，利用网络画板进行自主探究，验证我们的猜想是否正确，并叙述作图步骤及其原理。

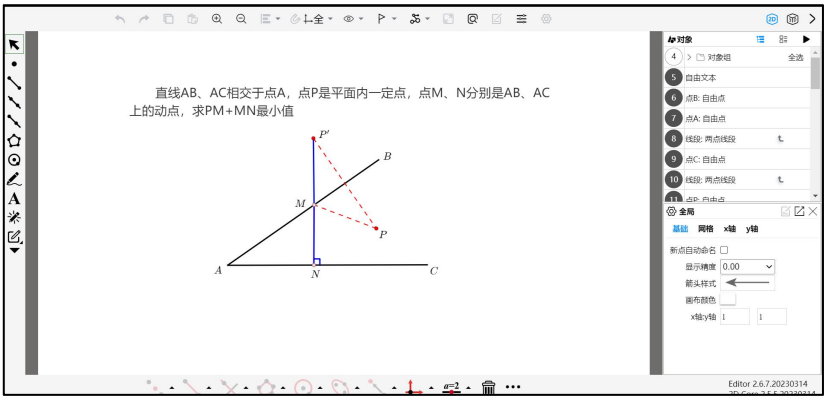
探究结束，请同学们踊跃分享你们的验证过程。

生 10：第一步：如图 6.13，过点 P 作直线 AB 的对称点 P'，连接 $P'M$，得 $PM=P'M$，即求 $PM+MN$ 的最小值转化到求 $P'M+MN$ 的最小值；第二步：如图 6.14，连接 $P'N$，当 P'、M、N 三点在同一条直线上时和最小，即求 $P'M+MN$ 的最小值转化到求 $P'N$ 的最小值；第三步：作垂直，根据“垂线段最短”原理过点 P' 作直线 AC 的垂线段 $P'N$，$P'N$ 与直线 AB 的交点就是动点 M 的位置，与直线 AC 的交点就是动点 N 的位置。

中国知网 https://www.cnki.net



6.13 学生 10 解法第一步展示



6.14 学生 10 解法第二步展示

其他同学也都是这么做的吗，有没有不同或者更简单的做法呢？

生 11：老师，我跟上一位同学的做法基本一致，但是我的做法更简略一些，我认为第二步的作图原理我们可以在心中理解，而连接 $P'N$ 的作图步骤可以省略，作完 P 点的对称点 P' 后可直接过点 P' 作直线 AC 的垂线，因为第二步是否连接 $P'N$ 对结果没有任何影响。

两位同学的做法都非常正确，第一位同学每一步都有理有据，过程完整，很符合数学是一门严谨的学科的特点；第二位同学勇于发表自己的想法，在第一位同学的解题步骤基础上进行了加工，提出了更简洁的解题步骤，能够有效提高我们的解题速度。为了省时省力且高效，在解题过程中通常我们可以适当地将不必要的步骤省略，所以在解决“一定两动”几何最值模型时，实际操作步骤只有两步，我们一起来总结一下解题步骤：

①作对称转化边，过定点作关于动点所在直线的对称点。

②作垂直，过对称点作另一个动点所在直线的垂线段。根据“垂线段最短”原理，垂线段的长度就是两条线段和的最小值，垂线段与两条直线的交点就是动点所在的位置。

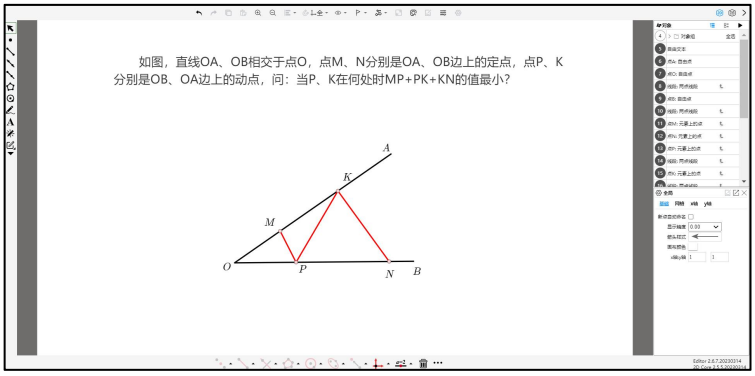
中国知网　https://www.cnki.net

（设计意图：总结同学们对于解题思路的猜想，引导同学们利用网络画板进行自主探索，验证猜想。猜想结束，留给学生分享探究过程及结论，允许不同做法或答案的出现，教师可对不同的意见进行分析总结，带领同学们一起归纳出模型的一般解法步骤。）

（2）合作探究，培养辩证思维

同学们出色的完成了“一定两动”几何最值模型的探究，接下来我们将继续增加定点的个数，完成“两定两动”模型的探究。请同学们借助网络画板，小组合作探究例 3，并总结解题步骤。

例 3：如图 6.15，直线 OA、OB 相交于点 O，点 M、N 分别是 OA、OB 边上的定点，点 P、K 分别是 OB、OA 边上的动点，问：当 P、K 在何处时 $MP+PK+KN$ 的值最小？



6.15 例 3

探究结束，请各小组踊跃分享你们的探究结论，小组代表同学进行陈述解题思路以及解题步骤。

生 13：首先我们组分析直接求三条线段和的最小值的话没有原理支撑作图，所以跟据以往的经验，我们猜测肯定需要作对称转化边，具体做法是：

第一步：如图 6.16，我们先试着作了 N 点关于直线 OA 的对称点 N'，则 $KN=KN'$，将 $MP+PK+KN$ 转化为 $MP+PK+KN'$，此时，当 N'、K、P 在同一条直线上时 $PK+KN'$ 的值最小，由于 P 点是动点，所以根据“垂线段最短”原理可以先确定 $PK+KN'$ 的最小值，但无法确认 MP 是否也是最小值。

第二步：于是，如图 6.17，由于 M 点也是定点，所以我们想再作一次对称，再转化一条边。作 M 点关于直线 OB 的对称点 M'，$MP=M'P$，将 $MP+PK+KN'$ 转化为 $M'P+PK+KN'$。此时我们发现 M'、N' 都是定点，可以直接利用“两点之间，线段最短”原理求得三条线段和最小值，这个时候我们发现第一步中作垂直的做法是不对且没有必要的。

中国知网　https://www.cnki.net

第三步：如图 6.18，连接$M'N'$，根据“两点之间，线段最短”原理，线段$M'N'$就是$M'P+PK+KN'$的最小值，也就是$MP+PK+KN$的最小值。

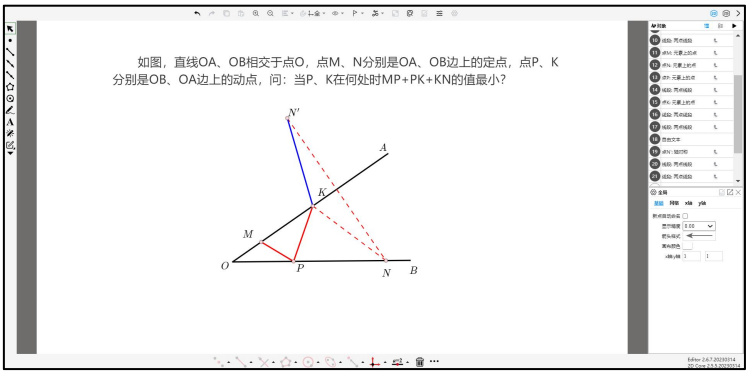


图 6.16 学生 13 解法第一步展示

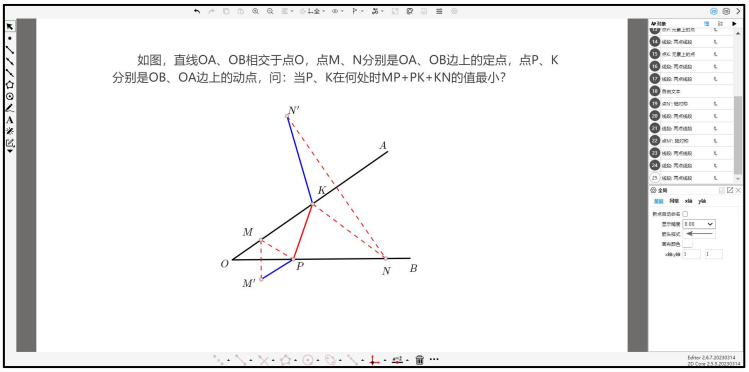


图 6.17 学生 13 解法第二步展示

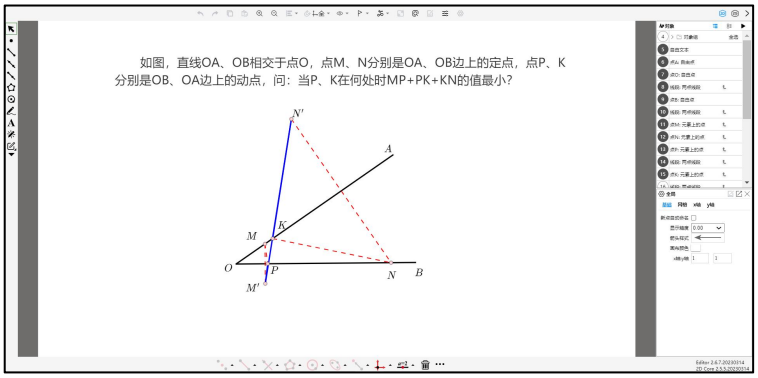


图 6.18 学生 13 解法第三步展示

分享结束后，教师提问：请同学们认真总结我们探究的最值模型，有什么发现吗？

生 14：这是“两动两定”模型，我发现和上一节课求四边形周长最小值有相似之处，将问题进行转化后是同一个模型，运用的是同一个原理。

教师进行总结：同学回答的非常正确，这道题的实质就是上节课学习的“两动两定”模型，它的图象考察形式很像我们今天学习的“垂线段最短”原理的考法，特此拿出来给同学们探究，就是为了让同学们能够区分两个原理的应用情况。

中国知网　https://www.cnki.net

题目中动点和定点个数不一样，条件不一样，辅助线的画法就不一样，采用的原理也就不一样。

（设计意图：继续改变条件，增加动点和定点的个数。由于点的个数增加，探究难度增大，所以开展小组合作探究。小组内进行解题思路猜想，再配合网络画板进行验证猜想，得出结论。探究结束，同样将时间留给学生，请各小组踊跃分享探究结论，并派代表进行陈述解题思路以及解题步骤。分享结束，教师进行总结，进一步加深学生对两个原理的理解以及区分应用场景。）

三、深化实践，提升操作能力

1、如图 6.19，将例 2 做一点改动，不改变题目的条件，将结论改为求 $PN+MN$ 的最小值，该如何作图呢？

2、如图 6.20，点 E 在等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$BE=12$，射线 $CD\perp BC$ 于点 C，点 P 是射线 CD 上一动点，点 F 是线段 AB 上一动点，当 $EP+PF$ 的值最小时，$BF=14$，则 AC 的长为_____。

（设计意图：将拟定好的方案付诸于实际，执行方案。第 1 题是例 1 的变式，增加适当的变式练习，条件不同，所作辅助线就不同，检验学生对模型的掌握情况，培养学生举一反三的应用能力，同时加深对模型的理解和应用。）

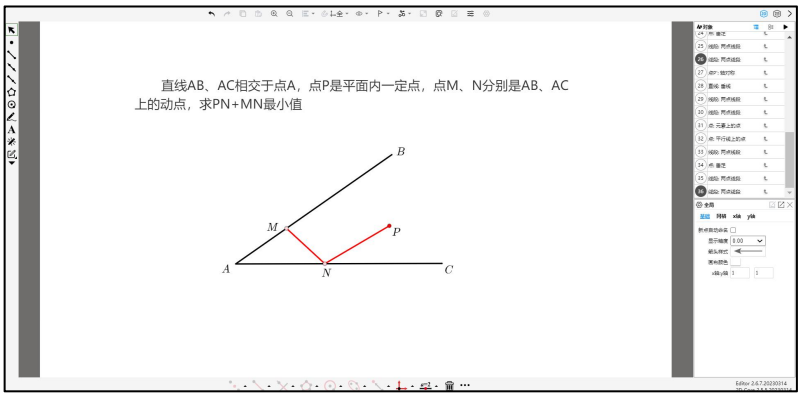


图 6.19　第 1 题图

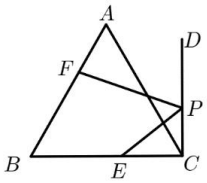


图 6.20　第 2 题图

四、课堂小结，回顾探究过程

中国知网　https://www.cnki.net

1、在合作探究环节，最终我们用到的是“两点之间，线段最短”原理，而在探究过程中有的小组错误的使用了“垂线段最短”原理，造成这样的错误的原因是什么？这对我们做题有什么启示？

动点问题往往“牵一发而动全身”，之所以错误使用原理是因为片面的求其中两条线段的和，而忽略第三条线段。所以在解题过程中我们应该把握全局，从整体分析，不能盲目使用“两点之间，线段最短”或“垂线段最短”原理。

2、通过总结发现，解题的第一步都是作对称，“作对称”的目的是什么？“对称”变换在本节课中起到了什么作用？

作对称的目的是为了利用对称的性质——对应边相等，从而转化边，对称变换起到了转换的作用，转化边后才能更好的使用“两点之间，线段最短”或“垂线段最短”原理。

（**设计意图：**通过课堂小结，回顾本节课所学内容，指出探究过程中的易错点，总结辅助线的做法目的以及所起的作用。）

6.4 实践结果

为了了解学生在经历了基于网络画板的几何最值问题的专题学习后，对网络画板辅助数学课堂教学以及学生使用网络画板进行学习的看法，笔者对所有教育实践对象进行了问卷调查。

问卷调查一共 10 道选择题，分为三个维度，分别是：对教师在“几何最值问题”专题教学过程中使用网络画板的看法、对自己在“几何最值问题”课堂学习过程中使用网络画板的看法、对网络画板辅助初中数学课堂教学和学习的看法。第一、二维度 3 道题目，第三维度 4 道题目，每道题目三个选项，详见附录 3。问卷内容主要是从学生的主观能动性出发，调查学生个体情感价值观层面的意愿与看法。

本次调查问卷共发放 95 份，收回 93 份，有效份数 93 份，有效回收率为 98%。学生回答的情况统计见图 6.21，由于每道选择题想要了解的学生的情况不同，所以每道题选项不一样，但总体维度是 A 选项表示积极的选项，B 选项表示中性的选项，C 选项表示消极的选项。

中国知网　https://www.cnki.net

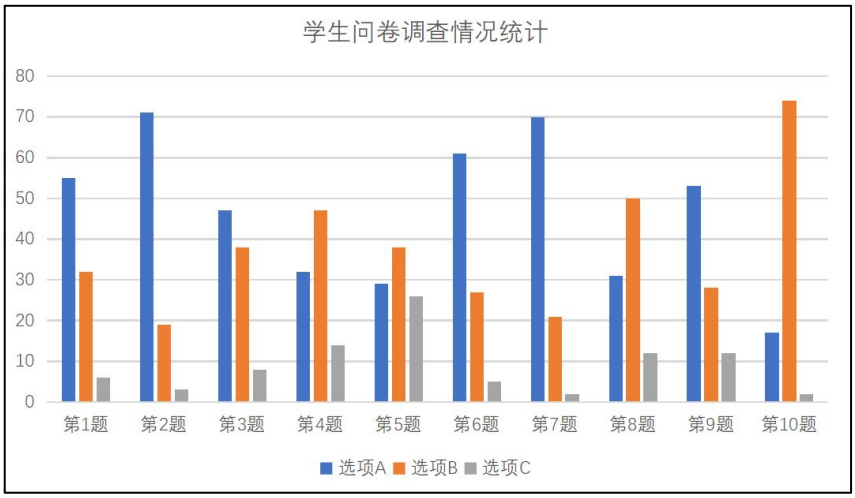


图 6.21 学生问卷调查情况统计图

通过统计图 6.24 数据情况，可以直观的看出选择 A 选项答案的最多，其次是 B 选项，每道题 C 选项的答案都是最少的，说明学生对在“几何最值问题”专题教学与学习过程中使用网络画板的整体态度是正向的，积极的。为了更具体地分析问卷数据，笔者根据不同维度更细致地对收集到的数据进行了分析，并得出了下列结论。

6.4.1 网络画板辅助教学有助于学生对“几何最值问题”专题的学习

第一个维度是调查学生对教师在“几何最值问题”专题教学过程中使用网络画板的看法，一共三个问题，分别是：1. 你喜欢老师在“几何最值问题”教学过程中使用网络画板吗；2. 老师使用网络画板教学，是否有助于你更容易或者更快速理解题目；3. 老师使用网络画板教学，是否有助于你学习几何最值模型解题的方法。学生的选择情况如表 6.1：

表 6.1 对教师在“几何最值问题”专题教学过程中使用网络画板的看法表

问题序号	选择 A 人数	占总人数百分比	选择 B 人数	占总人数百分比	选择 C 人数	占总人数百分比
1	55	0.59	32	0.35	6	0.06
2	71	0.76	19	0.20	3	0.04
3	47	0.51	38	0.41	8	0.08

表 6.1 中数据表明，59%的同学喜欢教师在“几何最值问题”教学过程中使用网络画板，35%的同学无所谓，6%的同学不喜欢；76%的同学认为教师使用网络画板教学，对自己更容易或更快速理解题目有帮助，20%的同学不清楚是否有帮

中国知网 https://www.cnki.net

助，4%的同学认为没有帮助；51%的同学认为教师使用网络画板教学，对自己学习几何最值模型解题的方法有很大帮助，41%的同学认为有一点帮助，8%的同学认为没有帮助。这说明超过半数的同学认为教师在进行几何最值问题专题教学时使用网络画板对于他们的学习是有帮助的，一定程度上更有助于他们对模型的理解以及解法的学习。

6.4.2 学生经历动手操作过程提升了网络画板的操作熟练度

第二个维度是调查学生对自己在“几何最值问题”课堂学习过程中使用网络画板的看法，一共三个问题，分别是：4.在课堂中，认为自己是否熟练操作网络画板；5.网络画板的使用，会影响你的注意力使你更专注于网络画板的操作而不是模型探究本身吗；6.你是否认为在课堂中自己动手操作网络画板对自己理解最值模型有帮助。学生的选择情况如表 6.2：

表 6.2：对自己在“几何最值问题”课堂学习过程中使用网络画板的看法

问题序号	选择 A 人数	占总人数百分比	选择 B 人数	占总人数百分比	选择 C 人数	占总人数百分比
4	32	0.34	47	0.51	14	0.15
5	29	0.31	38	0.41	26	0.28
6	61	0.66	27	0.29	5	0.05

表 6.2 中数据表明，34%的同学能够熟练操作网络画板，51%的同学一般熟练，15%的同学不熟练；31%的同学认为使用网络画板对自己的注意力有很大影响，会使自己更专注于网络画板的操作而不是模型本身， 41%的同学认为有一点影响，28%的同学认为根本没有影响；66%的同学认为自己动手操作网络画板有助于对最值模型的理解，29%的同学不清楚是否有帮助，5%的同学认为没有帮助。这说明大部分的同学认为自己动手操作网络画板进行探究对理解最值模型是有帮助的，但是熟练度较低，还有 66%的同学一般熟练和不熟练网络画板，而且只有 28%的同学认为操作网络画板对最值问题探究没有影响，其中猜想有影响的同学一定对网络画板的操作不熟练。

6.4.3 大多数同学希望在今后数学课堂中继续使用网络画板

中国知网 https://www.cnki.net

第三个维度是调查学生对网络画板辅助初中数学课堂教学和学习的看法，一共四个问题，分别是：7.你希望今后数学教师在课堂中继续使用网络画板上课吗；8.你认为数学教师使用网络画板教学可以使数学课堂变得更有趣吗;9.你认为使用网络画板进行学习可以提升自己的数学学习兴趣吗;10.今后你还会主动去了解或者使用网络画板吗。学生的选择情况如表6.3：

表6.3 对网络画板辅助初中数学课堂教学和学习的看法

问题序号	选择A人数	占总人数百分比	选择B人数	占总人数百分比	选择C人数	占总人数百分比
7	70	0.75	21	0.23	2	0.02
8	31	0.33	50	0.54	12	0.13
9	53	0.57	28	0.30	12	0.13
10	17	0.18	74	0.80	2	0.02

表6.3中数据表明，75%的同学希望今后数学教师在课堂中继续使用网络画板上课，23%的同学无所谓，2%的同学不希望；33%的同学认为数学教师使用网络画板教学可以使数学课堂变得更有趣，54%的同学不清楚，13%的同学认为不会变得有趣；57%的同学认为使用网络画板进行学习可以提升自己的数学学习兴趣，30%的同学不清楚，13%的同学认为并不能提升；18%的同学认为今后还会主动去了解或者使用网络画板，80%的同学认为有可能会，2%的同学认为一定不会使用。这说明大部分的同学还是希望今后教师继续使用网络画板进行教学，更能够提升自己对数学学习的兴趣，也可能会使数学课堂变得更有趣，但是今后会主动了解和使用网络画板的同学比较少，所以可能需要今后教师多加引导。

中国知网　https://www.cnki.net

7 研究结论与反思

7.1 研究结论

在研究网络画板辅助初中数学几何最值问题教学之前，笔者先查阅了网络画板的相关研究，进一步了解网络画板在初中数学教学中的使用现状。同时，为了了解初中生对几何最值问题的掌握情况和在解决几何最值问题上存在的难点与问题，通过测试卷和访谈的方式展开现状调查，发现初中生对几何最值问题专题中的两个基本原理的基础知识即基础原理模型的作图与应用都掌握的很好，但随着动点与定点的个数增加，题目难度加大，正确率下降，逐渐暴露出一些问题：①学生未理解模型原理及题目条件，死记硬背模型解法；②学生的模型化思维和变式思维薄弱，应用能力较差；③学生的数学信息化工具使用频率低。

基于杜威的“从做中学”理论、波利亚的“怎样解题”理论、信息化教学理论和现状调查结论总结了三点网络画板辅助初中数学几何最值问题教学的优势：网络画板使用便捷，资源丰富；动态揭示数学规律，渗透数学思想；提供自主探究平台，调动学生探究积极性。在此基础上提出教学策略：创设多样化的问题情境，理清问题本质；构建网络画板探究平台，鼓励解题探究；利用网络画板技术支持，拓展变式训练；深化几何最值模型应用，归纳解题方法。并基于以上优势和策略进行了案例设计与实践，对实践数据进行统计分析，得出以下结论：

第一，教师在“几何最值问题”专题教学中使用网络画板有助于教师的教学，学生在学习过程中使用网络画板有助于学生理解题目和对问题的探究。但教师和学生对网络画板的操作熟练度都有待提升。

第二，大多数同学认为网络画板的使用可能会使数学课堂变得更有趣，可能会增加自己对学习数学的兴趣，所以希望在今后数学课堂中继续使用网络画板。

第三，由于教学实践对学生学习“几何最值问题”起到了正向的积极效果，所以可以初步认定笔者根据波利亚的“怎样解题表”理论确定的基于网络画板的初中数学几何最值问题教学的策略是可行的，可以为初中数学教师使用网络画板进行教学提供一定的参考。

网络画板的诸多功能可吸引学生积极参与教学活动探索，能有效激发学生学习数学的兴趣，通过图形变化可帮助学生理解数学知识，提高学生的数学思维和学习能力，也是辅助教师教学的重要有利工具。但同时，网络画板更丰富的功能和优势还需要教师不断探索，才能更好的应用于初中数学课堂教学。

中国知网 https://www.cnki.net

7.2 研究反思

虽然是在基于各教学理论和现状调查的基础上制定的网络画板辅助初中数学几何最值问题教学的教学策略，但是该策略是否真实有效，还需大量运用到教学实践中，并通过学生的学习测评成绩来展示才会更具说服力。由于调研时间、数据样本和本人研究水平的限制等客观原因，在现状调查中样本数量较少，教学实验研究中只在重庆市某初级中学的两个班级内实施，不能覆盖不同职级的教师和不同层次的学生，实验样本数量较少，未进行对比实验，所以不算是严格的实验研究，只进行了初步的实践尝试，该教学策略的适用性还有待进一步考察。笔者今后将继续在一线教学中对该策略进行进一步的实践以及优化。

通过教学实践和研究结果的分析发现，网络画板在初中数学几何最值问题教学中的使用对教师的教学和学生的学习都发挥着积极的作用，并且学生也希望数学教师在今后的数学课堂中能够继续使用网络画板进行教学。但由于网络画板的发行时间较短，一线中小学教师和学生的熟知率和使用率都还处于较低的水平，而且笔者的研究水平有限，所以网络画板在初中数学教学的研究中还处于研究的初级阶段。网络画板功能强大，操作简单，容易学习，适合基础教育老师学习使用，最主要是有我国自主知识产权，所以我相信网络画板必将成为基础教育数学教学有力的辅助工具。希望今后能有更多学者研究网络画板，并将网络画板融入到中学数学教学之中，给一线教师教学提供更多的参考。同时也希望一线教师能够顺应时代潮流，发扬信息技术的优势，重视网络画板的推广应用，部分老师创造性运用资源，部分老师研究有效运用资源等，从学生认知规律的层面出发，解决怎样在课堂教学中使用网络画板课件等问题。在不断探索与实践中逐渐普及网络画板在中学数学教学中的应用，提高数学课堂教学效率，减轻学生在抽象问题、动态问题等复杂问题上的认知负荷。

中国知网 https://www.cnki.net

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2011: 1-10.

[2] 张爽, 李海红. 基于互联网的线性代数课程教学创新实践——评《互联网+动态数学》[J]. 科技管理研究,2020, 40(23): 266.

[3] 樊广顺. 信息技术与课堂教学融合的实际应用——基于网络画板的数学教学实践[C]//. 数字化教学探索与创新——第二届全国中小学数字化教学研讨会论文集, 2017: 412-421.

[4] 樊继珍. 基于网络画板社区的初中数学教与学[C]//. 数字教材·数字化教学——第四届中小学数字化教学研讨会论文案例集.[出版者不详], 2019: 718-721.

[5] 宋秋妹. 网络画板在初中数学图形变换教学中的应用[C]//. 数字教材·数字化教学——第四届中小学数字化教学研讨会论文案例集. [出版者不详], 2019:751-755.

[6] 曾召文. 动态数学：化繁为简、化静为动、化虚为实——运用网络画板优化小学数学课堂教学[C]//.融合信息技术·赋能课程教学创新——第六届中小学数字化教学研讨会论文案例集.[出版者不详], 2021: 311-316.

[7] 张朝立. 网络画板在初中数学几何教学的应用——以“圆周角”教学为例[C]//.融合信息技术·赋能课程教学创新——第六届中小学数字化教学研讨会论文案例集. [出版者不详], 2021: 551-555.

[8] 白东云. 网络画板在初中课堂中的应用探究——以“反比例函数的图像与性质”为例[J]. 中学数学教学参考, 2022(30): 69-70+78.

[9] 邵俊雯, 刁露,杨晓芳. 网络画板在初中二次函数中的应用[J]. 内江科技, 2022, 43(07): 38+16.

[10] 尹洁, 侯小华. 网络画板在高中函数教学中的应用[J]. 中国教育技术装备, 2020(13): 36-37.

[11] 贺媛. 网络画板在初中函数教学中的应用研究[D]. 贵州师范大学, 2020.

[12] 卢怡, 李玉叶. 网络画板在多边形的内角和教学中的应用[J]赤峰学院学报(自然科学版), 2022, 38(03): 78-80.

[13] 张朝立. "网络画板在初中数学几何教学的应用——以“圆周角”教学为例". 融合信息技术·赋能课程教学创新——第六届中小学数字化教学研讨会论文案例集. Ed. 王志刚, 2021, 551-555.

[14] 金东风. 网络画板在初中数学教学中的应用研究——以图形变换为例[J]. 基础教育论坛, 2021(23):103-104.

中国知网 https://www.cnki.net

[15] 王锦秋, 韦煜, 陈小红. 网络画板在立体几何教学中的应用——以“球的表面积与体积”教学为例[J]. 高中数学教与学, 2022(16):51-54.
[16] 龙应菊. 基于网络画板的初中数学“图形与几何”教学研究[D]. 贵州师范大学, 2020.
[17] 李萌. 基于网络画板的小学生数学抽象思维能力培养研究[D]. 沈阳师范大学, 2020.
[18] 杜佳佳. 应用网络画板培养小学生几何直观能力的教学策略研究. 2021. 新疆师范大学
[19] 邱雪莲. 应用网络画板提升学生高阶思维能力的探究[D]. 沈阳师范大学, 2019.
[20] 李赵容. 基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究[D]. 贵州师范大学, 2021.
[21] 伍雪莲. 基于网络画板的初中数学探究教学研究[D]. 四川师范大学, 2020.
[22] 郭宴宏. 信息技术与初中数学学科教学整合的研究[D]. 河南科技学院, 2020.
[23] 向红瑜. 利用网络资源进行初中数学教学的实践研究[D]. 西南大学, 2020.
[24] 王素媚. 基于网络画板的高中数学数形结合思想教学研究[D]. 海南师范大学, 2020.
[25] 刘永智. 几何最值问题的求解思路探索[J]. 理科考试研究, 2022, 29(04):28-31.
[26] 张海霞. 以模型为例 探究几何最值问题[J]. 数理化解题研究,2021(35):34-35.
[27] 杨世奇. 初中几何最值问题的数学史模型[J]. 初中数学教与学, 2021(20): 32-34.
[28] 丁力. 初中数学几何最值问题探究——以“将军饮马”问题模型的解题策略为例[J]. 数学教学通讯, 2020(14): 79-80.
[29] 韩雨池. 初中数学几何背景下最值问题求解策略[J]. 现代中学生(初中版), 2021(12): 17-18.
[30] 朱江. 初中几何最值学习障碍与改正策略分析[J]. 现代中学生(初中版), 2022(04): 5-6.
[31] 李宛珊. 初中二次函数背景下几何最值的解题障碍研究[D]. 广州大学, 2022.
[32] 汤奎. 初中生几何最值学习障碍调查及教学策略研究[D]. 四川师范大学, 2021.
[33] 蒋雁. 基于核心素养背景下初中几何最值问题的解题方法[J]. 数理化解题研究, 2019(20): 33-34.
[34] 郑胜. 用数形结合思想解决最值问题的应用探讨[J]. 名师在线, 2019(12): 71-72.
[35] 戚容睿. 运用数形结合方法解决初中数学中相关问题[J]. 中学数学, 2019(10): 46-47.
[36] 徐欣. 基于变式教学的初中动点问题教学策略研究[D]. 重庆师范大学, 2020.
[37] 王玉梅. 数学概念在几何最值问题中的有效应用[C]//. 教育理论研究（第十辑）. 2019: 293.
[38] 郭小蔚. 微课助力直观解惑几何动态问题[J]. 中学理科园地, 2022, 18(02): 34-36.
[39] 王思敏. 动态数学技术融合初中动态几何问题的教学研究[D]. 广西师范大学, 2021.
[40] 吴世平. CAMI 在初中几何教学的应用研究[D]. 湖南科技大学, 2015.
[41] 梁哲溪. 基于超级画板的初中数学动点题的解题策略的研究[D]. 辽宁师范大学, 2021.
[42] 刘珠伊. 几何画板辅助平面几何中动点问题的教学实践研究[D]. 湖南师范大学, 2019.
[43] 网络画板. [EB/OL]. (2022-11-1)https://www.netpad.net.cn.
[44] 罗雪英. 几何最值问题的解题策略[J]. 初中数学教与学, 2008(09): 5-6.

中国知网 https://www.cnki.net

[45] 陶海萍. 论“从做中学”学习理论对我国基础教育改革的启示[J]. 科技视界, 2014(16): 150+261.

[46] 阮应红. 从“将军饮马”问题谈两线段和的最值问题[J]. 课程教材教学研究(中教研究), 2021(Z4): 33-42.

[47] Bokosmaty S, Mavilidi M F, Paas F. Making versus observing manipulations of geometric properties of triangles to learn geometry using dynamic geometry software[J]. Computers & Education, 2017, (113): 313-326.

[48] Schimpf F, Spannagel C. Reducing the graphical user interface of a dynamic geometry system[J]. ZDM Mathematics Education, 2011, 43(3): 389-397.

中国知网 https://www.cnki.net

附录 A：初中数学几何最值问题学生测试卷

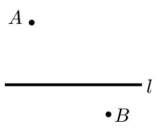
初中数学几何最值问题测试卷

（注意：所有填空题均需要保留作图痕迹）

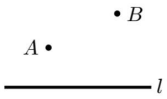
1. 如图，点 A、B 位于直线 l 两侧，请你在直线 l 上找到一点 P，使 $PA+PB$ 的值最小；

2. 如图，点 A、B 位于直线 l 同侧，请你在直线 l 上找到一点 P，使 $PA+PB$ 的值最小；

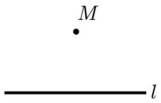
3. 如图，点 M 是直线 l 外一定点，点 N 是直线 l 上一动点，请你画出当点 M 到直线 l 距离最短时点 N 的位置；



第 1 题图



第 2 题图

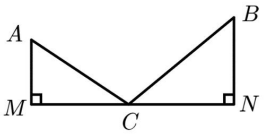


第 3 题图

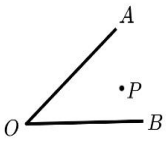
4. 如图，已知 $AM \perp MN$，$BN \perp MN$，垂足分别为 M、N，点 C 是 MN 上使 $AC+BC$ 值最小的点，若 $AM=3$，$BN=5$，$MN=15$，则 $AC+BC=$_____。

5. 如图，点 P 是 $\angle AOB$ 内的一定点，M 是 OA 上的一个动点，N 是 OB 上的一个动点，请你分别画出当 $\triangle PMN$ 周长最小时，M、N 两个点的位置。

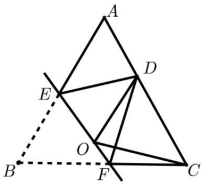
6. 如图，将等边 $\triangle ABC$ 折叠，使点 B 恰好落在 AC 边上的点 D 处，折痕为 EF，O 为折痕 EF 上的动点，若 $AD=2$，$AC=6$，则 $\triangle OCD$ 的周长最小值为_____。



第 4 题图



第 5 题图



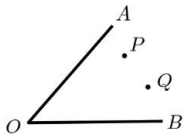
第 6 题图

7. 如图，点 P、Q 是 $\angle AOB$ 内的两个定点，M 是 OA 上的一个动点，N 是 OB 上的一个动点，请你分别画出当四边形 $PQMN$ 周长最小时，M、N 两个点的位置。

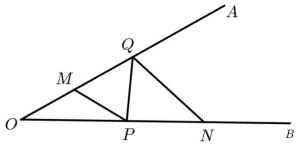
8. 如图，$\angle AOB=30°$，点 M、N 分别在边 OA、OB 上，且 $OM=1$，$ON=3$，点 P、Q 分别在边 OB、OA 上，则 $MP+PQ+QN$ 的最小值是_____。

9. 如图，A、B 是定点，P、Q 是直线 m 上的两个动点，P 在Q的左侧，且 PQ 间长度恒定，请你在直线 m 上画出 P、Q 两点，使得 $PA+PQ+QB$ 的值最小。

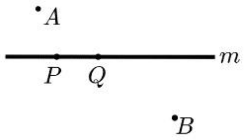
中国知网 https://www.cnki.net



第 7 题图



第 8 题图

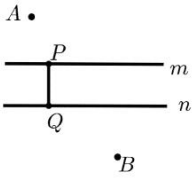


第 9 题图

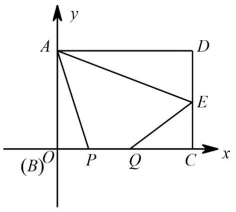
10. 如图，A、B 是定点，P、Q 分别是直线 m、n 上的两个动点，PQ 间长度恒定，请你按要求画出 P、Q 两点，使 $PA+PQ+QB$ 的值最小。

11. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 B 在原点，点 A、C 在坐标轴上，点 D 的坐标为 $(6,4)$，E 为 CD 的中点，点 P、Q 为 BC 边上两个动点，且 PQ=2，要使四边形 $APQE$ 的周长最小，则点 P 的坐标应为_____.

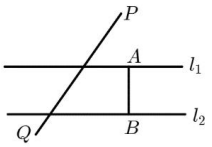
12. 如图，已知直线 $l_1 /\!/ l_2$，l_1、l_2 之间的距离为 8，点 P 到直线 l_1 的距离为 6，点 Q 到直线 l_2 的距离为 4，$PQ=4\sqrt{30}$，在直线 l_1 上有一动点 A，在直线 l_2 上有一动点 B，满足 $AB \perp l_2$，且 $PA+AB+BQ$ 最小，此时 $PA+BQ=$_____。



第 10 题图



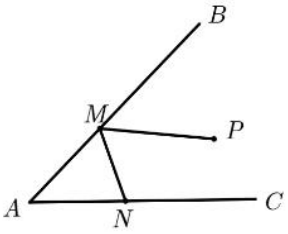
第 11 题图



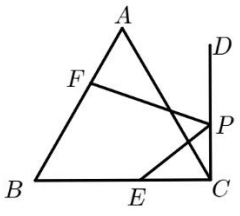
第 12 题图

13. 如图，直线 AB、AC 相交于点 A，点 P 是平面内一定点，点 M、N 分别是 AB、AC 上的动点，请你画出当 $PM+MN$ 有最小值时点 M、N 的位置。

14. 如图，点 E 在等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$BE=12$，射线 $CD \perp BC$ 于点 C，点 P 是射线 CD 上一动点，点 F 是线段 AB 上一动点，当 $EP+PF$ 的值最小时，$BF=14$，则 AC 的长为_____。



第 13 题图



第 14 题图

中国知网 https://www.cnki.net

附录 B：学生访谈提纲

一、了解学生对初中几何最值基本问题的掌握情况；

1. 我们已经学过的初中几何最值问题有哪些模型？
2. 已经学习过的解决几何最值问题的理论原理有几个，分别是什么？

二、了解学生在做几何最值问题时遇到的主要困难及具体原因；

3. 你在学习几何最值模型阶段和应用模型解决问题阶段是否感到有困难，哪个阶段最难？
4. 你在解决几何最值问题时觉得哪种类型最难，具体难在哪里，是辅助线的连接还是计算过程，或者是其它？

三、了解学生在几何最值问题学习过程中多媒体技术辅助学习的情况，特别是对网络画板的了解程度。

5. 在学习几何最值问题时数学老师是否用计算机辅助教学工具进行教学，如果是，用的是什么工具呢？
6. 你知道哪些计算机辅助学习工具呢，你是否自己用过这些工具帮助学习数学或者解决数学问题？
7. 你希望教师在几何最值问题教学中使用信息技术辅助教学吗，你是否希望自己也能够有机会使用信息技术工具进行学习？
8. 你了解网络画板吗，是否用过呢？如果用过，当时用它来干什么？

中国知网 https://www.cnki.net

附录 C：初中生对网络画板在数学课堂中应用的看法调查问卷

亲爱的同学：

你好！数学课程刚刚结束了“几何最值问题”专题的学习，课上数学老师带领同学们使用了网络画板进行探究学习，为了了解同学们的学习情况，将对同学们进行一次简单的问卷调查。本次问卷调查采取不记名的方式，答案没有对错之分，希望同学们根据自身情况认真思考，并在你认为合适的选项打“√”，谢谢你的配合！

一、对教师在“几何最值问题”专题教学过程中使用网络画板的看法：

1.你喜欢老师在“几何最值问题”教学过程中使用网络画板吗？

A 喜欢（ ） B 无所谓（ ） C 不喜欢（ ）

2.老师使用网络画板教学，是否有助于你更容易或者更快速理解题目？

A 有帮助（ ） B 不清楚（ ） C 无帮助（ ）

3.老师使用网络画板教学，是否有助于你学习几何最值模型解题的方法？

A 有很大帮助（ ） B 有一点帮助（ ） C 无帮助（ ）

二、对自己在“几何最值问题”课堂学习过程中使用网络画板的看法：

4.在课堂中，认为自己是否熟练操作网络画板？

A 熟练（ ） B 一般（ ） C 不熟练（ ）

5.网络画板的使用，会影响你的注意力使你更专注于网络画板的操作而不是模型探究本身吗？

A 有很大影响（ ） B 有一点影响（ ） C 根本没有影响（ ）

6.你是否认为在课堂中自己动手操作网络画板对自己理解最值模型有帮助？

A 有帮助（ ） B 不清楚（ ） C 无帮助（ ）

三、对网络画板辅助初中数学课堂教学和学习的看法：

7．你希望今后数学教师在课堂中继续使用网络画板上课吗？

A 希望（ ） B 无所谓（ ） C 不希望（ ）

8．你认为数学教师使用网络画板教学可以使数学课堂变得更有趣吗？

A 可以（ ） B 不清楚（ ） C 不可以（ ）

9．你认为使用网络画板进行学习可以提升自己的数学学习兴趣吗？

A 可以（ ） B 不清楚（ ） C 不可以（ ）

10. 今后你还会主动去了解或者使用网络画板吗？

A 一定会（ ） B 可能会（ ） C 一定不会（ ）

中国知网 https://www.cnki.net