

学校代码: 11078



学 号: 2112106002

广州大学

硕士学位论文

题目: 基于网络画板的中学数学探究性学习实证研究

学 生 类 型: ☒ 学术学位硕士
☐ 专业学位硕士

学 位 论 文 作 者: 李 静

导 师 姓 名 及 职 称: 张景中 教授

学 院: 计算机科学与网络工程学院

学 科 专 业: 教育技术学

论 文 提 交 日 期: 二〇二四年 五 月

学校代码： 11078

学 号： 2112106002

广州大学硕士学位论文

基于网络画板的中学数学探究性学习实证研究

An Empirical Study on Inquiry-based Maths Learning in Secondary School Supported by Netpad

李静

学 科 专 业： 教育技术学

研 究 方 向： 智慧教育软件应用

论 文 答 辩 日 期： 2024年05月25日

指 导 教 师（ 签 名 ）：

答辩委员会主席（签名）：

答辩委员会委员（签名）：

摘 要

深度融合信息技术是数学教育发展的必然趋势。当下，以网络画板为代表的动态数学系统是我国基础教育阶段数学学科教学的主流信息化工具。现有研究表明，动态数学系统对数学的教与学都有积极的促进作用，但动态数学系统对探究学习的影响存在不同观点。因此，如何使用动态数学系统开展深入高效的探究性学习仍是亟待研究的问题。

本文开展了基于网络画板的中学数学探究性学习实证研究，重点关注以下两方面问题。问题一：使用网络画板对中学生数学探究学习效果的影响如何？问题二：如何使用网络画板进行数学探究学习可以获得更好的学习效果？本文研究工作包括：

（1）结合相关理论设计实证研究方案。该方案采用准实验研究法，以构造思想、认知科学和学习兴趣发展理论为基础，以正多棱锥/棱柱为探究内容，共设计四组探究方式：A. 构造虚拟模型，B. 观察虚拟模型，C. 观察实物模型，D. 构造实物模型。实验采用前测、后测、延迟后测以及学习兴趣问卷评价不同干预条件下学生在即时学习效果、知识保留和学习兴趣方面的表现。对比 A 组和 D 组，以及 B 组和 C 组回答问题一；对比 A 组和 B 组回答问题二。该方案为基于动态数学系统进行探究学习提供了实证参考。

（2）基于上述方案开展教学实验，收集分析数据，讨论实验结果。本实验组织了 137 名七年级学生参与实验。运用协方差和 t 检验分析收集到的实验数据。数据分析结果表明：对于问题一，采用构造策略探究时，使用网络画板探究的学生在即时学习效果、知识保留程度和学习兴趣水平方面表现更好；采用观察策略探究时，两种工具对学生的即时学习效果影响相当，但使用网络画板探究的学生知识保留水平更高、学习兴趣更强。对于问题二，与观察策略相比，在网络画板中采用构造策略探究的学生进步更快，知识保留程度更高，激发和维持的学习兴趣也更强。该结论证明动态数学系统对数学探究学习有积极影响，且采用构造策略使用动态数学系统是更有益的方式。

（3）基于上述研究结果，设计基于网络画板的玫瑰曲线构造性探究学习路径。该路径以构造曲线图像进行观察的方式，探究玫瑰曲线方程系数和曲线图像叶片数量关系。具体包括基于梯子模型提出问题、数形结合求解方程、类比联想构造方程图像、以及猜想验证完善方程图像四个探究环节。此项工作充分发挥了信息技术的优势以辅助数学探究学习，为培养学生的探究能力和探究思维提供了有价值的教学参考。

关键词：动态数学系统；网络画板；数学探究；构造法；玫瑰曲线

ABSTRACT

Deep integration of information technology is an inevitable trend in the development of mathematics education. Nowadays, Dynamic Mathematical System (DMS), such as Netpad, has become the mainstream information technology tool applied in mathematics discipline. Existing studies indicate a positive impact of DMS on maths teaching and learning, but a controversial impact on the outcomes of inquiry-based maths learning for students in secondary school. Hence, how to promote inquiry-based maths learning in secondary school by means of DMS is a pressing issue to be addressed.

This paper performed an empirical study on inquiry-based maths learning in secondary school supported by Netpad. The following research questions are explored: Q1. how is the impact of DMS on the outcomes of inquiry-based maths learning for secondary school students? Q2. how can better outcomes be obtained by using DMS for inquiry-based maths learning? The primary focus of this study involves:

(1) Designing an empirical research program under the guidance of relevant theories. A quasi-experimental research mode was adopted in this study. Theoretical basis came from perspectives of constructive thinking, cognitive science, and the four-phase model of interest development. The regular polygonal pyramids/prisms were taken as inquiry-based learning tasks. A total of four investigation groups were designed, i.e., A. constructing virtual models, B. observing virtual models, C. observing physical models, and D. constructing physical models. Pre-test, post-test, delayed post-test, and learning interest questionnaire were used to evaluate students' performance in terms of immediate learning outcomes, knowledge retention, and learning interest under different intervention conditions. Q1 is addressed by comparing the performance between group A and group D, and between group B and group C. Q2 is addressed by comparing group A and group B. This program provides empirical references for related studies on inquiry-based maths learning supported by DMS.

(2) Implementing the experiment, collecting and analyzing data, and making conclusions. 137 seventh grade students were organized to participate in the experiment. ANCOVA and t-test were used to analyze the collected experimental data. The results show that: for Q1: in the context of construction, students employing the DMS exhibited superior immediate

learning outcomes, greater knowledge retention, and higher learning interest compared to their peers who utilized physical manipulatives; while in the case of observation, the virtual and physical manipulatives yielded similar impacts on students' immediate learning outcomes, but students who involved in the DMS demonstrated higher knowledge retention and learning interest. For Q2: regarding the DMS environment, students who engaged in constructive manipulation surpassed their peers who engaged in observing manipulation. The findings demonstrate that DMS has a positive impact on students' inquiry-based maths learning and that DMS with a construction strategy is a more beneficial approach.

(3) Designing a method for exploring rose curves based on the conclusions drawn from Q1 and Q2. To explore the relationship between the number of rose curve petals and coefficients of rose curve equation, the rose curves were constructed with Netpad for observation. The exploration process consists of four sessions, i.e., posing a question based on the ladder model, solving equations by combining abstract mathematical language with intuitive images, constructing images of the equations by means of analogy and association, and perfecting the equation image by making conjectures and verifying. This work leverages the benefits of information technology to enhance inquiry-based maths learning, and offers valuable insights for developing students' inquiry skills and thinking.

Keywords: Dynamic Mathematics System, Netpad, Mathematical Inquiry, Constructive Method, Rose Curve

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究问题.....	3
1.3 研究方法.....	3
1.4 研究意义.....	4
1.5 研究框架.....	5
第二章 概念界定及文献综述	7
2.1 数学探究学习.....	7
2.2 数学探究学习工具.....	9
2.3 动态数学系统.....	12
2.4 网络画板教学应用.....	15
2.5 本章小结.....	17
第三章 基于网络画板的中学数学探究学习实验方案设计	19
3.1 实验假设及理论依据.....	19
3.2 实验思路及框架设计.....	26
3.3 实验探究任务设计.....	26
3.4 实验探究工具选取.....	27
3.5 学习效果测量工具.....	28
3.6 本章小结.....	29
第四章 基于网络画板的中学数学探究学习实验实施与结果	31
4.1 实验对象.....	31
4.2 实验实施过程.....	32
4.3 数据整理与分析.....	33
4.4 实验结果与讨论.....	40
4.5 本章小结.....	43
第五章 基于网络画板的玫瑰曲线探究学习案例设计	45
5.1 玫瑰曲线概述.....	45
5.2 玫瑰曲线探究现状.....	47
5.3 玫瑰曲线构造性探究路径设计	47
5.4 本章小结.....	62
第六章 总结与展望	63
6.1 研究总结.....	63
6.2 研究不足.....	64
6.3 研究展望.....	64

参考文献.....	67
附录 1 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(一).....	75
附录 2 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(二).....	77
附录 3 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(三).....	79
附录 4 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(四).....	81
附录 5 学习兴趣问卷调查	83
附录 6 辅助探究表格	85

第一章 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 数学探究性学习是培养创新人才的重要途径

数学作为基础教育阶段的重要学科之一历来备受国内外学者的广泛关注，而数学探究作为人才培养的有效途径一直也承载着丰富的数学教育价值^[1]。

近年来，为引导我国基础教育的未来发展，国务院出台了两份重要文件——《关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》和《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》，其中都强调了“启发式、互动式、探究式”学习的重要性。2022版《义务教育数学课程标准》指出要保证充分的时间和空间让学生进行探究学习，注重引发学生的探究欲、提升学生的探究热情，形成对数学的好奇心与想象力，发展学生的探究意识和能力，进而为创新人才的培养打下坚实基础^[2]。2020年修订版《普通高中数学课程标准》将数学探究活动确立为高中数学课程的四大核心主线之一，鼓励中学生体验数学探究活动的各个环节、经历完整的探究过程，从而拓展中学生的数学视野，强化创造性思维能力，并全面提升其数学学科核心素养^[3]。可见，作为我国国家课程方案和课程标准规定的重要内容，数学探究学习已然成为培养创新人才的重要方式之一。

国际上，美国的《新一代科学教育标准》(Next Generation Science Standards)和《K-12科学教育框架》(A Framework for K-12 Science Education)^[4]均持续强化了探究学习的核心理念，不仅提倡激发学生对探究的热情和兴趣，更将探究能力其视为重要的国民科学素养。英国牛津大学数学入学考试 MAT 中设计了极具特色的分层递进考查模式，重点考查学生的数学探究能力^[5]。国际文凭组织(International Baccalaureate Organization)强调学生应积极主动地参与学习，通过探究解决各种问题，并将数学探究能力视为达成“培养具有求知欲、知识渊博和关心他人的年轻人”这一目标的有效教学模式^[6]。另外，国际数学与科学趋势研究项目(Trends in International Mathematics and Science Study)将数学探究能力作为评价参与国数学认知能力的重要评价维度^[7]。可见，国际上多个国家和组织十分肯定与重视数学探究学习对创新人才培养的重要性。

综上，各国政府及相关国际组织机构都非常看重数学探究性学习对创新人才的培养作用，围绕数学探究学习进行的相关研究是数学教育领域的重点研究内容和热门话题。

1.1.2 深度融合信息技术是数学教育发展的必然趋势

当今社会,信息技术一日千里,并逐渐成为推动人类社会思维方式、组织架构和运作模式发生根本性变革和全方位重塑的重要力量。在为大家提供机遇的同时,也带来了新的挑战,并促使我们积极应对这些挑战。信息技术的应用发展早已渗透到社会各个领域,也必将对数学教育的未来发展产生深远影响^[8]。

《中国教育现代化 2035》明确指出,要全面整合并高效利用信息技术,不断丰富和创新课程形式,从而推动中国教育高质量发展,以满足新时代教育需求。《“十四五”国家信息化规划》也指出要开展终身数字教育,推进信息技术与教学融合的教育教学变革。教育新基建相关政策强调加强线上教育资源建设和应用工作,鼓励与学科深度融合的教育数字资源高质量发展,提倡利用信息技术辅助开展科学实验^[9]。在我国基础教育领域,初、高中最新版数学课程标准明确要求:要实现信息技术与数学课程的深度融合,鼓励学生运用现代信息技术进行学习、探索并解决各类问题,培养学生形成利用信息技术进行学习探索的良好习惯,从而全面提升其数学核心素养和综合能力^{[2][3]}。可见,深度融合信息技术是我国数学教育改革的创新的着力点。

自上世纪八十年代起,国际教育领域的研究人员便对信息技术在数学教学中的积极影响给予了高度关注^[10]。他们普遍认为,信息技术有助于提升数学教学的质量和效率,对于数学教学具有不容忽视的促进作用。欧盟、北美等国家和地区的政府指出信息技术在如今的教与学中是不可或缺的组成部分,纷纷出台多项政策措施,支持并促进信息技术在数学教育现代化进程中发挥积极作用^[10]。国际调研显示,中国、日本、芬兰、美国、德国、俄罗斯等 14 个国家的高中数学课标中,关于信息技术使用的内容部分,所占比例呈逐年上升的明显趋势,信息技术的种类和涉及的知识领域也更加多样和丰富^[11]。可见,国际上多个国家和组织也十分重视信息技术与数学教育的融合创新。

近年来,在基础教育阶段的数学学科教学中,动态数学系统已逐渐发展成为应用广泛、且具有代表性的学科信息化工具^[12]。自上世纪 90 年代开始,动态数学系统为数学教学注入了新的活力,深刻影响了国内外的数学教育改革^[13]。尽管信息技术与数学教育深度融合是人们美好的愿景,也是国内外一系列数学课程政策、项目和行动计划关注的重点,但现实中以动态数学为代表的信息技术徘徊于数学教学外围的情况仍然存在^[9]。所以,深入研究信息技术支持下的数学教学,特别是动态数学系统支持下的数学探究性学习,是必修的时代命题。

1.2 研究问题

基于上述研究背景以及后续国内外研究现状,为更好的运用信息技术促进中学数学探究性学习,本研究关注数学学科中应用最广泛的信息技术——动态数学系统,并以网络画板为例,基于认知科学相关理论设计实证研究方案,考察使用动态数学系统进行探究学习对中学生学习效果的影响,明晰如何使用动态数学系统进行探究学习可以获得更好的学习效果。此外,为了丰富信息技术促进中学数学探究性学习的理论与实践,本研究还将进一步基于实证研究结果优化现有的数学探究活动设计,以玫瑰曲线这一极具趣味性、挑战性的主题为例,设计完整的、循环式的探究路径,以启示相关教学实践。

本文拟解决的研究问题具体如下:

- (1) 使用网络画板进行探究学习对中学生数学学习效果影响如何?
- (2) 如何使用网络画板进行数学探究学习可以获得更好的学习效果?

1.3 研究方法

(1) 文献研究法

文献研究法是一种通过收集和分析文献资料深入了解特定主题或现象的研究方法。本研究采用文献研究的方式,通过知网和 web of science 等国内外权威数据库,查阅有关数学探究、信息技术与数学学科融合、动态数学、构造思想、具身认知、认知负荷、学习兴趣等主题的文献资料。通过梳理相关概念及演变过程,明晰理论的各种观点,熟悉国内外的相关研究现状,为本研究的进行打下了扎实的理论基础。

(2) 德尔菲法

德尔菲法指选取该领域有代表性的权威性专家,采用匿名发表意见的方式,对希望收集的信息展开轮次意见征集工作。通过询问、收集、归纳以及修改,最终形成相对一致的意见。本文在编制学习效果测试问卷(即前测、后测和延迟后测试卷)以及改编兴趣问卷时都采用了专家咨询法。在本领域权威专家以及一线教师的意见和指导下,完成了评价测试工具的编制工作。

(3) 问卷调查法

问卷调查法是指通过发放问题调查表来收集、测量、分析研究问题状况的方法。本研究中采用问卷调查法来对比和评价中学生运用不同工具和不同使用策略进行探究活动后在数学学习兴趣水平方面的差异。本研究中所使用的兴趣问卷改编自吴洪艳和刘晓

琳编著的《初中生数学学习兴趣问卷》。由于本文重点关注探究工具对数学探究性学习的影响，并考虑实际实验条件的限制，在参考 Hidi 和 Renninger 提出的学习兴趣四阶段模型框架基础之上，选取了部分问卷题项进行数学探究学习兴趣水平的测试。基于实验数据，对最终的问卷进行了信效度检验，以保证测量工具的有效性和可用性。

（4）准实验研究法

准实验研究是指从自然群体中选取多组实验对象进行对比分析的实验方式。本研究选取广州市某中学七年级四个自然班级的学生参与实验。方案设计为与实物探究工具进行对比，最大程度控制变量，以此来研究动态数学系统对中学生数学探究学习活动的影 响；并进一步对比评价工具使用策略（即观看策略和操作策略）对探究性学习效果的影响。通过前测调查学生的基础水平，通过后测评价学生的即时学习效果，再通过延迟后测测量学生的知识保留水平。采用 t 检验以及协方差分析的方法分析处理数据，得出相应的结论并结合理论进行分析。

（5）实证研究法

实证研究法是一种基于已有科学理论，以实践需求为导向的研究方法。该方法通过精心设计的实验，在自然条件下，系统地操纵特定变量，并仔细观察、详细记录与测量与之相关的现象变化。通过这样的操作，研究人员能够科学地确定不同干预条件与实际的实验现象之间的因果关系。本研究采用实证研究设计，通过精心控制教学策略，对实验班与对照班进行了教学实验，并详细记录了实验过程中的各种变化。最终，基于实验数据的分析，得出了具有科学依据的结论。

1.4 研究意义

1.4.1 理论意义

（1）丰富了基于信息技术进行数学探究学习的研究框架

本研究依据构造思想、认知科学、学习兴趣等理论观点，综合研究现状和实验可行条件，分别以观看与构造两种策略为前提，设计准实验研究方案，更加精准的考察了基于信息技术的数学探究学习在即时学习效果、知识保留程度以及学习兴趣水平方面的优势与不足。该研究方案的设计进一步细化了现有研究框架。

（2）补充了基于信息技术进行数学探究学习的实证研究

当前关于信息技术与数学探究学习的研究侧重于思辨研究法，对于实证研究法的关

注和运用相对较少。为弥补这一不足，研究人员设计并实施了准实验研究，以考察为动态数学技术对数学探究学习的影响，进一步扩充了该领域的相关实证研究，在研究方法上进行了丰富。

（3）拓展了玫瑰曲线的探究理论

玫瑰曲线作为趣味性极强的探究学习内容，容易引发学生强烈的探究欲，进而锻炼学生的探究能力和数学思维。针对现有玫瑰曲线探究模式浮于表面的不足，本研究深入分析玫瑰曲线的生成原理，并借助网络画板实现相应的构造探究路径，为教学实践提供了理论参考。

1.4.2 实践意义

（1）探索了网络画板对数学探究学习的影响

本研究对网络画板提升学生探究学习效果进行了实证探索和检验，明确了网络画板在即时学习效果、知识保留程度以及学习兴趣水平方面的作用，为动态数学技术对数学探究学习的影响提供实证数据，为教学实践提供了有益的参考和启示。

（2）形成了基于信息技术进行数学探究学习的实践案例

对网络画板支持的数学探究学习进行了实证探索与考查，形成了有关棱锥棱柱的探究式教学案例，设计了基于网络画板的玫瑰曲线探究路径，为教学一线的老师能更好理解其中的本质提供了有价值的教学参考。

（3）落实了初中和高中数学课程标准的要求

遵循初中和高中数学课程标准的指导，结合课程标准对于信息技术应用和数学探究活动的具体要求，设计并实施了信息技术支持下的数学探究学习研究，为真实数学教学活动提供了切实有效的指导，有助于切实推进数学课程标准的贯彻落实。

1.5 研究框架

本文共六个章节，具体内容如下：

第一章主要内容为分析时代背景，提出研究问题，概述研究方法，论述研究意义；

第二章主要内容为梳理相关概念及研究现状，以明确现有研究的争议点和不足之处；

第三章主要内容为梳理相关理论观点，设计实证研究方案，明确实验中探究学习内容和工具，并编制测量工具；

第四章主要内容为实证研究方案的实施过程，数据收集与分析，以及实验结果讨论；

第五章主要内容为基于前述实证研究结论设计的玫瑰曲线构造性探究路径；

第六章主要内容为总结本次研究，反思不足之处，并提出研究展望。

研究设计思路如图 1-1 所示：

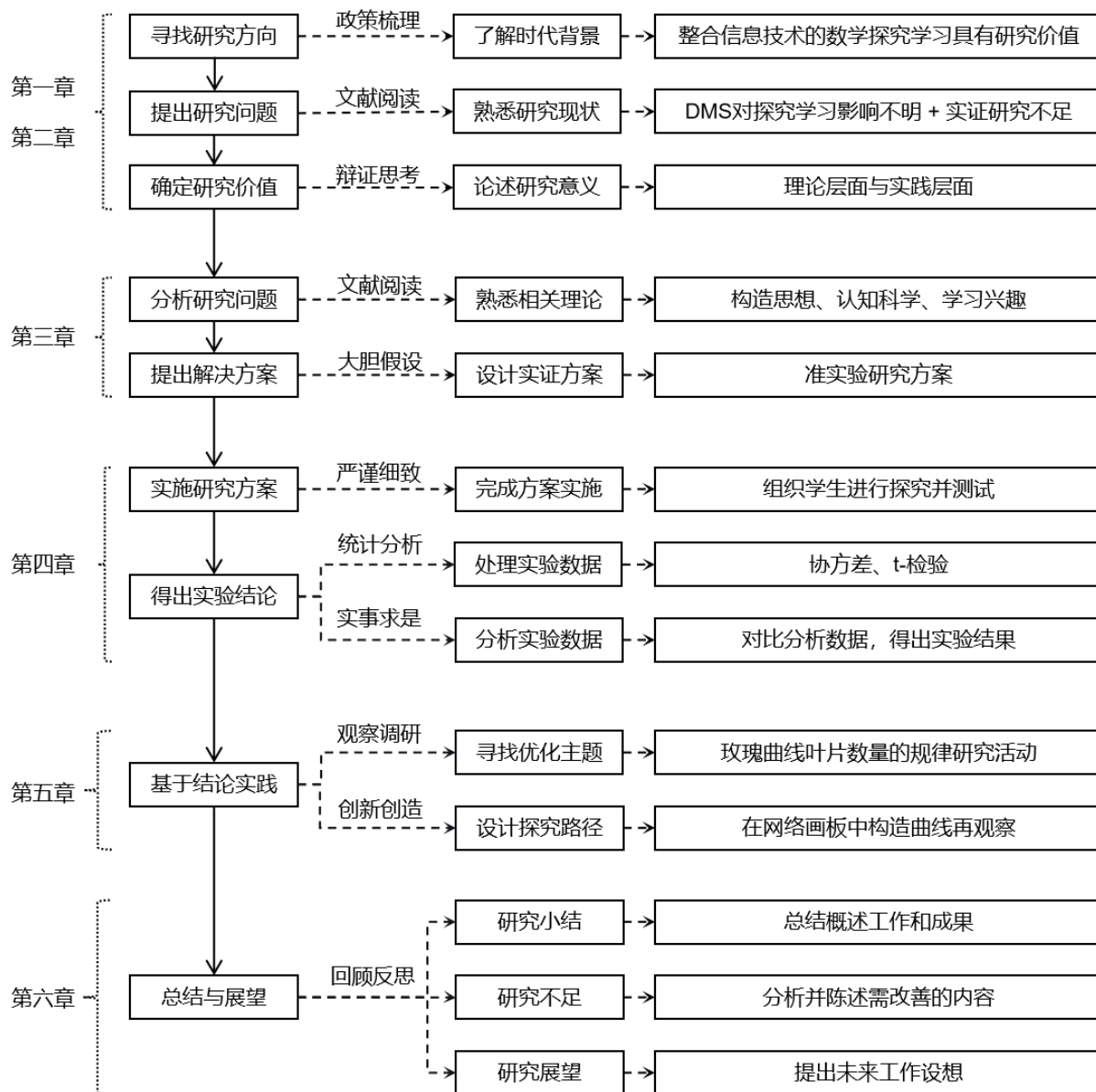


图 1-1 研究设计思路

第二章 概念界定及文献综述

本章围绕研究问题，通过文献分析法梳理数学探究学习、数学探究工具、动态数学系统和网络画板的含义、特点以及研究现状。

2.1 数学探究学习

2.1.1 数学探究学习的内涵

探究学习思想的萌芽可以追溯到诸多古代先哲的深刻思考。如我国伟大思想家、教育家孔子提出的“不曰‘如之何，如之何’者，吾未知之何也”，古希腊哲学家苏格拉底用问题步步紧逼以启发人们思考的“精神助产术”等等^[14]。这些宝贵的思想无一不透露出学习其实是一个不断探索知识的过程。直到 20 世纪，实用主义哲学家杜威提出了“做中学”的教学思想^[15]，并给出了操作性极强的“思维五步问题教学法”（即在面对复杂问题时，首先要构建一个合理的问题情境，确定问题的核心要点；随后，针对问题提出明确的假设，为解决问题提供方向；接下来，制定科学、可行的解决方案，确保每一步操作都符合逻辑和实际情况；最后，基于严谨的实验和数据分析验证假设，确保问题得到有效解决）。此后，由杜威引领的探究学习思想在全球多个国家引发回响，众多学者都积极探讨了探究学习的内涵和外延。其中萨其曼、施瓦布和布鲁纳正式提出了“探究式教学”的理论，并认为探究式教学需要引导学生进行主动积极的学习和探索，将获取知识的全过程视作探究活动的具体过程，从而让学生习得知识并锻炼解决问题的能力。

数学探究源于波利亚的“数学发现”和弗赖登塔尔的“再创造”教育思想^[1]。波利亚在其著作《怎样解题》和《数学与猜想》中说明了探究活动的几个层次，如详细描述探索过程和操作方法，提出了启发式学习数学的思想，以及从思维的层面讨论了探究过程。而弗赖登塔尔则认为学习者应该通过自己的努力和实践来获取知识，而不是仅仅被动地去接受教师传授的知识，强调学习者在学习过程中的思考、探究、实践和反思，且主张学习不仅仅是认知活动，还涉及到情感、态度和价值观的培养。

关于数学探究学习的含义，《新课标》指明“数学探究活动是一种将数学知识应用于实际问题的综合性实践活动。数学探究活动主要是围绕特定的数学问题展开，强调学生的自主探究与团队合作，最终目标是解决这些问题。在这一过程中，学生需要发现并提出有价值的数学问题，合理推测数学结论，提出解决问题的策略和方法，并通过独立

探索和团队研究来验证数学结论”^{[2][3]}。

综合多位学者对数学探究学习的观点,研究人员认为数学探究学习的含义包括:围绕具体数学问题,在老师的引导下,以学生为中心进行教学活动。在探究活动中,学生需要经历解决问题的全过程,包括错因分析等挫折训练。在运用数学知识、数学方法和数学思维解决问题的过程中,培养探究能力,提升数学基本素养。而且,数学探究学习不仅具备探究学习活动的基本特性,例如突出学生的主动性、实践的过程性、动态的发展性和开放的环境性,还独具高度的抽象性、广泛的应用性和逻辑的严谨性。在数学探究中,其独特的形式、内容和方式使得思维参与和活动丰富性显得尤为重要。问题解决活动成为了数学探究的核心形式,而数学直觉则成为了关键的探究途径^[1]。

2.1.2 数学探究学习研究现状

围绕数学探究学习,国内外学者进行了大量研究。基于知网和 Web of Science 等主流数据库的文献检索显示,从 20 世纪 70 年代开始出现数学探究学习的相关研究起,研究热度只升未降。研究方法以思辨法、文献法、案例研究法为主,课堂观察、实证研究等较少。研究内容主要集中在数学探究方法、数学探究价值、数学探究评价、以及数学探究与信息技术等方面^[1]。

对于数学探究方法,比起单一的、顺序式的探究流程,不断完善的、反复的循环式探究流程更加受到重视^[1]。除了类比联想、归纳与演绎等探究方法,数学探究还可涉及观察实验法、比较分类法、抽象概括法等,以此引导学生数学探究的方向^[16]。另外,尚颖异研究设计了三种针对 STEM 数学探究教学的策略^[17]。蒋彬在其研究中强调了合理分组对探究学习的重要影响,以及要重视信息技术的使用^[18]。

对于数学探究价值,研究者关注成绩、学习兴趣、学习能力、以及数学核心素养等方面的表现。Li 在其研究中指出,探究式学习已在教学中迅速普及,且探究式学习被公认为可以提高学生的学习成绩,并能培养学生的多项技能^[19]。Lu 等人通过研究发现协作式数学探究学习对培养学生的高阶思维能力有很大助力^[20]。

对于数学探究评价,刘西燕研究并编制了针对初中数学探究课堂的评价指标体系^[21]。朱哲民等基于 SIRA 理论建立了针对小学和初中的数学探究学习评价,具体包括“探究主体、探究互动、探究资源和探究能力”四个维度^[22]。苏洪雨针对微探究设计了基于数学问题的评价框架,包括“问题设计和探究、交流与反思、以及总结和评价”^[23]。

对于数学探究与信息技术,宁连华认为要避免使用信息技术进行数学探究时的滑过

现象^[24]。侯立伟总结信息技术可以为教学提供多样化表征的环境,师生可以从多种角度学习知识^[25]。蒋培杰等呼吁在融合信息技术与数学教学时,相关研究应重视实证实验和设计研究^[13]。温建红认为信息技术有助于组织巧妙的数学探究活动,并且能很好的引导学生发现并提出问题^[26]。

对于影响数学探究学习的因素,Ramlee 等认为探究模式是学生的学习效果不同的原因之一,并通过实验证明了有教师引导的探究学习模式优于学生完全自主探究的模式^[27]。Huang 等的在研究中国学生和荷兰学生的探究偏好时发现,探究经验越丰富会更倾向于尝试探究,而较复杂的任务也更能激发学生的探究欲望^[28]。Murphy 等则通过研究发现老师和学生的性格差异也会影响到数学探究性学习^[29]。

综上,数学探究学习的相关研究主要聚焦在方法、价值、评价以及与信息技术的结合方面,知识学习和保持以及学习兴趣仍是重点关注的学习效果。在进行数学探究学习设计时,应包含不断完善的循环式探究环节。特别是在融合信息技术的数学探究活动设计中,应充分发挥信息技术的优势,与探究内容和方法有机融合,尽量避免滑过现象的出现。此外,影响信息技术辅助数学探究学习的因素仍是值得研究的内容,并可多采用实证研究的方式进行。

2.2 数学探究学习工具

2.2.1 数学探究学习工具涵义及分类

探究学习工具属于教具的一种,是探究过程中用于辅助教学活动,并能提供各种感知信息的工具。数学探究学习工具则是在数学教学中,特别是探究式教学中,帮助学生理解数学概念、发现数学问题、验证数学规律的一系列工具的统称。此外,数学探究工具是让学生能够体验并深度经历知识形成过程的重要载体^[30]。

随着时代的变迁,数学探究工具的形态也由单一的实物形态发展为实物化、电子化、信息化、数字化等多元形态并存的现状^[31]。具体而言,数学探究工具可分为实物探究工具和虚拟探究工具两大类别。查阅文献可知,对于实物探究工具的含义争议不大,即特指一类由实物材料制成的、可供学生和老师操作从而辅助完成教学活动的教学工具。但是,对于虚拟探究工具的定义,国内外相关研究人员的观点略有不同。王辞晓认为虚拟教具一般指通过模拟实体教具而设计开发的探究教学工具,这类工具需要借信息技术实现观察、操作等行为^[32]。陈文瑜认为数学虚拟教具是一种动态的视觉表征,具体而言,

它具有可交互性的功能，并遵循程序性模式，基于它与数学对象进行的交互，可以帮助使用者形成相关图式，完成数学知识的自主建构^[33]。Bouck 认为虚拟教具（或者也可称之为教学模拟）是指一种专注于教学的、灵活动态的、并且可以进行计算的可交互系统，系统的状态完全受到用户对它进行的操作或实施的计算行为^[34]。

不难发现，虚拟探究工具的特征明显，具体可总结理解为：一种允许师生基于信息技术观察或构建数学对象视觉表征及其变化，从而促进自主建构数学知识的工具。在数学教育领域，网络画板等动态数学系统属于典型的虚拟教具。

2.2.2 数学探究学习工具研究现状

作为重要的教学要素，探究学习工具对教学效果的影响不容忽视，因此受到国内外诸多学者的关注。围绕数学探究学习工具，国内外相关研究主要关注两方面的内容，一个是对比使用探究工具与不使用探究工具对学生学习效果产生的影响，另一个是对比实体探究工具和虚拟探究工具对学习效果产生的影响。前者争议不大，以使用探究工具学习效果更佳为主；后者则存在较大争议。

针对概念型知识的学习，一类观点认为实体探究工具和虚拟探究工具对学生学习效果的影响相当。Yuan 等人研究发现，使用虚拟探究工具和实物探究工具探索多边形后，学生的学习效果相同，仅在学习策略上略有差异^[35]。Baki 以“三维图形”为学习内容，对 96 名职前数学教师进行了测试，A 组受试者使用 Cabri3D 进行探究，B 组受试者使用实体工具进行探究，C 组为对照组接受传统教学，以 Purdue 空间可视化测试为测量工具，发现虚拟探究工具与实体探究工具在发展部分（developments section）和旋转部分（rotations section）对学生成绩的影响相当^[36]。

一类观点认为虚拟探究工具对学习效果的影​​响优于实体探究工具。Yilmaza 等人探讨了使用动态数学软件 Cabri II Plus 和实物操作材料对职前教师几何图形变换成绩的影响，发现在识别知识和特征知识部分，动态数学组的成绩优于实物工具组^[37]。Bokosmaty 等人以三角形的性质为主题在五年级学生中进行实验发现，比起传统的观看静态图像的学习方式，观看教师在动态数学环境中操作三角形与学生亲自使用动态数学软件探究三角形两种方式均会以较少的认知负荷取得更好的学习成绩和知识迁移能力，而学生亲自使用动态数学软件的学习方式仅在学习成绩这一点上优于观看教师操作的方式^[38]。Md Sullah 等人以七巧板游戏软件和 PowerPoint 幻灯片以及一套积木拼图和闪卡为工具，比较了虚拟操作材料和实物操作材料在几何课堂中的效果，结果表明两种操作工具都对学

生的学习产生了积极影响,且虚拟操作材料组的学生会取得更好的成绩^[39]。Disbudak 和 Akyuz 研究了五年级学生对四边形概念理解的差异,发现在动态数学系统中练习的建构方法比实物操作法更有助于学生对几何的理解,使用动态数学系统的学生更容易克服误解和困难^[40]。

还有一类观点则认为实体探究工具对学习效果的影响优于虚拟探究工具。Ng 等通过细致的实验设计,对比了在动态数学环境中观察探究几何体和使用 3D 打印技术构造探究几何体两种条件下,小学生几何学习成绩的差异;研究发现使用动态数学工具进行探究学习后学生取得的即时成绩更好,但是使用 3D 打印技术进行探究学习后学生知识的保留水平更高^[41]。

基于上述文献可以看出,针对概念型知识,实物探究工具与虚拟探究工具对数学探究学习效果的影响不一。关于动态数学系统对学生数学学习成绩的影响的研究结果仍然存在相互矛盾之处。因此,针对动态数学系统对学生数学探究学习效果的影响还存在一定的研究空间。

尽管 Ng 等人的研究提供了详细而有启发性的数据分析,但本研究人员注意到两种技术所采用的学习策略不一致,即一组学生采用观察策略使用探究工具,另一组学生则采用构造策略使用探究工具。由于数学教育中探究工具的有效性取决于如何使用它们^[42],这种学习策略上的差异引入了一个潜在的影响因素。因此,研究人员猜想,从工具使用策略(即观看还是构造)入手分析,可能有助于解释目前的争议。故,将使用策略作为影响不同学习效果的关键因素纳入研究,以期为解决问题作出有意义的尝试。

另外,基于上述文献分析还可看出,动态数学系统已逐渐成为数学教育中应用广泛的虚拟探究工具,而实物探究工具则多种多样。至于 Bokosmaty、Disbudak 和 Baki 等人的研究,调查对象是小学生或职前教师而不是中学生。考虑到动态数学系统和实物探究工具的有效性也可能因学生的发展阶段和已有知识而异,因此,针对中学生群体的研究将有助于进一步分析和了解中学阶段的情况。

由于是否有工具介入,对数学探究学习效果有影响,因此在考察网络画板对中学生探究学习效果影响时,不以空白组(即不使用任何工具进行探究学习)为对照,而是以使用实物工具探究为对照组,可以最大程度控制变量,获取更加准确真实的实验结果。

鉴于国内相关研究较少,且尤其缺乏实证研究,综合上述分析,研究人员认为进行以实物探究工具为对照,分观察和构造两种情景,考察以网络画板为代表的动态数学系统对中学数学探究性学习效果影响的实证研究,具有值得期待的实践和理论价值。

2.3 动态数学系统

2.3.1 动态数学系统含义及特点

1990 年,为描述《几何画板》所呈现出的支持功能性交互的几何图像,其设计者 Nick Jackiw 和出版商 Steve Rasmussen 首次提出“dynamic geometry”这一概念。“动态几何”一词用于描述在画板中拖动数学图像的能力,该能力通过无限个连续相关的示例实现,且所有这些示例都共享用于构建它们的相同的数学定义。从那时起,该术语就用于描述“快速呈现的、连续的、交互式的直接操作以及变化结果”。2007 年,张景中院士在《动态几何教程》中也提出:“对于在计算机显示器上呈现出的几何图形,如果在运动变化中,能保持其几何约束关系不变,那么这样的图形就叫做动态几何图形。而有关动态几何图形的相关理论以及应用的学科,就叫做动态几何”^[12]。

初等数学一直有两个分支:代数和几何。计算机代数系统(Computer Algebra System, CAS)侧重于表达式的操作,包括 Mathematica、Matlab 以及 Maple;而动态几何系统(Dynamic Geometry System, DGS)则侧重于点、线、圆等几何元素之间的关系。因此,在动态几何系统基础上,结合计算机代数系统的平台则称之为动态数学系统^[12]。

在动态数学系统中,使用者能够在保持对象几何约束关系不变的情况下动态拖动对象以比较和观察其中不变的规律,正是这一特性使得动态数学系统成为了深入数学学科的信息化探究工具^[43]。此外,使用者还可以通过动态数学系统与几何对象进行方便快捷的交互,并能即时获得对其操作的可视化响应。这种快速交互和响应十分有利于数学概念的理解^[44]。同时,快速可视化学生的想法,以及证实/证伪其假设的即时反馈,都有助于提高解决问题效率。因此,动态数学系统是进行数学探究学习的得力工具。

2.3.2 动态数学系统的发展溯源

动态数学系统的历史与计算机图形学的发展息息相关。20 世纪 60 年代初期,麻省理工学院一位年轻的博士研究生——伊凡·苏泽兰完成了三维交互式图形系统的相关研究,并成功开发了基于研究成果的应用系统。这就是著名的画板(sketchpad)系统,历史上首个交互式绘图系统。这位后来被称为计算机图形学之父的图灵奖获得者,首次使得人和电脑之间以图形的方式真正建立了联系。

随后,计算机技术和数学教育碰撞出了一些微弱但意义非凡的火花。如西摩尔·帕

普特 (Seymour Papert) 发明了 Logo 语言, 通过输入指令可以让界面上的小海龟移动起来, 通过合理的组合和排序, 学生可以创造出各种图案, 这种基于计算机进行的非常有趣的几何学习方法就是著名的“海龟几何” (Turtle Geometry) 学习法^[45]。

另外, 在位于美国 Massachusetts 牛顿市的教育发展中心的支持下, Judah L. Schwartz 和 Michal Yerushalmy 于 1985-1988 年间开发了新型计算机程序 Geometric Supposer, 这开创了全新的几何教学环境。该程序由三个独立的软件包组成, 即 The Geometric Supposer: Triangles, The Geometric Supposer: Quadrilaterals, 以及 The Geometric Supposer: Circles^[46]。尽管 Geometric Supposer Series 不支持学生拖动几何对象, 只能让学生探究设置好的特定图形, 但是这一尝试仍然具有极大的启发意义。

直到 20 世纪 90 年代, 几何画板 (Geometer's Sketchpad, GSP) 的出现^[47], 在数学教育领域掀起了一场影响深远的革命风暴。该系统源于斯沃斯莫尔学院的 Eugene Klotz 博士和 Doris Schattschneider 博士主持的可视几何项目 (Visual Geometry Project)。受美国国家科学基金会资助, 旨在开发用于几何教学的新技术材料。Nicholas Jackiw 在两位老师的指导下开发了第一版几何画板 (该名称正是为了致敬 Ivan Sutherland 1963 年开发的 Sketchpad 程序)。Key Curriculum 出版社的 Steven Rasmussen 因看中其巨大的教育潜力而帮助推进了 1991 年的商业版发布。此后的十年间, GSP 大量应用于教学实际中, 并有众多研究人员研究并肯定了 GSP 的教育意义和价值。

同一时期, 法国计算机科学家、数学家和离散数学研究员 Jean-Marie Laborde 带领博士生 Philippe Cayet、Yves Baulac 和 Franck Bellemain 开发了 Cabri-geometre, 以探索几何对象的属性及其关系。1988 年, Cabri-geometre 第一版受到苹果公司的关注, 并被授予年度教育奖杯。1989 年, 在法国教育部支持下, Cabri-geometre 进入法国教育市场, 并在许多国家推出 MacOS 或 DOS 版本。随后, 该软件还升级有 Cabri II, Cabri Geometry II Plus 以及 Cabri Junior 版本, 并于 2004 年新增了 Cabri3D, 以支持立体几何学习^[48]。

21 世纪以来, 由于动态数学软件在数学教育界的深远影响, 世界各国都涌现出很多优秀的动态数学软件。如 Cinderella、超级画板 (SuperSketchpad)、GeoGebra、几何图霸、几何表达式 (Geometry Expressions)、几何专家 (geometry expert)、英壬画板 (inRm3D)、网络画板 (Netpad) 等等。部分动态数学系统如图 2-1 所示。

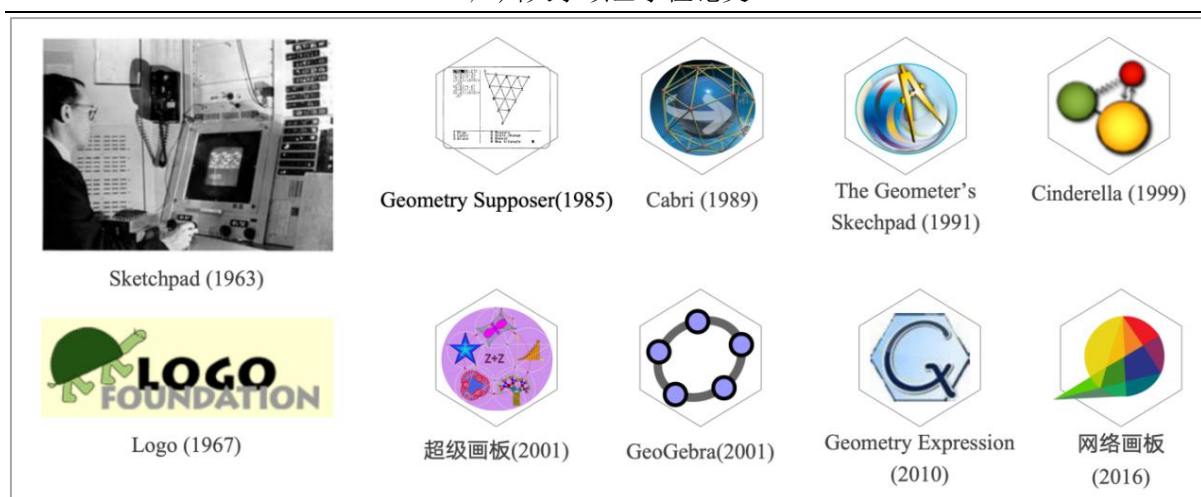


图 2-1 国内外动态数学系统示例

我国在 20 世纪 90 年代乘着电化教育的改革之风在计算机辅助数学教学方面作了尝试。1990 年，北大电教中心林建祥和朱万森两位教授向附中老师展示了基于 Mathtool 制作的动态课件，随后在北大附中的应用也取得了很好的效果。1994 年起，北京海淀区 4 校联合立项了 Mathtool 教学实验，并推广到了全国中师系统。据北大附中王鹏远老师回忆，MathTool 为中学数学教师展示了崭新的信息技术现代化舞台，促进了教学观念的更新，其意义影响深远^[49]。

1996 年，由人民教育出版社将几何画板的中文版引入我国，该工具的应用为我国数学教与学产生了深刻而深远的影响。以“几何画板”为关键词在知网进行检索可以发现，在引入该软件后的十年，是相关教学研究的活跃期，涉及到课程设计和课程改革的诸多方面，而且还辐射到了物理、化学等学科的教学应用中^[50]。

同样在 1996 年，我国科研人员也开始探索研发动态数学软件。在时任中科院院长周光召院士的号召下，由中科院成都计算机应用研究所立项，与广州师范学院（现广州大学）的教育软件研究所合作，开始了《数学实验室》软件的研发。在该阶段，主要由导师指导研究生编程，以解题为主，数理化分为了十个软件。随后，张景中院士带领团队在广州大学开始研发“Z+Z”智能教育平台。这一阶段则过渡到以教师和科研人员编程为主，专注于数学软件，关注教与学的环境。刚开始是将高中和初中几何代数分开进行，后来就集中为一个“超级画板(Supper-Sketch Pad, SSP)”^[43]，并于 2001 年正式发布。超级画板是我国自主研发的首款动态数学软件。该产品丰富了教学手段，为我国信息技术教育的深入推广提供了有益的思路和策略。在 2008 年的世界数学教育大会上，“超级画板(SSP)”作为中国唯一代表，向世界同仁进行展示，这标志着属于我们自己的动态数学软件开始在国际上推广，这一创新性的成果积极推动了我国教育事业的发展。

2015 年,为适应移动互联网时代的需求,张景中院士团队升级了超级画板^[44],并于 2016 年正式发布了开放共享的动态数学学科教学工具——网络画板 (Netpad)^[51]。很快,网络画板进入国家及省市平台,与各大软、硬件产品进行了对接和深度融合。2018 年,网络画板推出 3D 功能^[52],并于第 74 届全国教育装备展亮相。2019 年,网络画板进入湘教版高中教材,并且协助一批中学建设了“网络画板数学实验室”。截止 2023 年底统计数据,平台汇聚课件资源超过 100 余万,用户数量已经超过 350 余万。

2.4 网络画板教学应用

以网络画板和 Netpad 为关键词,在知网及 web of science 上检索发现,从 2016 年开始出现网络画板相关的研究,近十年间,发文量呈稳步上升的趋势,如图 2-2 所示。进一步使用 VOSviewer 分析文章关键词,可发现近十年围绕超级画板和网络画板的相关研究在数学教与学的理论与实践层面都有涉猎,如图 2-3 所示。



图 2-2 近十年网络画板相关研究趋势概览

深入梳理相关文献内容可知,在 2016 年网络画板正式发布之前,已有部分研究表达了对动态数学技术网络化的需求。例如,石深敏研究了在 GSP 和网络环境中的高中数学实验学习模式,任小康讨论了在网络环境中基于 GSP 实现合作学习的可能,迟杰探索了具体的网络化 GSP 实验学习模式^[53]。

在 2016 年网络画板正式发布后,有关教学应用研究则主要集中在探讨教学案例及其意义、学生数学素养及思维发展培养、教师信息化素养培养、信息技术为教学带来的变革等方面,具体如下。

关于具体的教学案例研究:赵海清等以“一次函数图像”教学为例,探讨了网络画板如何与数学教学深度融合,并凝练了“提出问题-形成猜想-验证证明-得出结论”的“真”探究教学模式^[53]。Gao 利用网络画板在北京市国立丰台中学七年级 A 班进行了“几何基

础”的教学实践的探索,研究发现使用网络画板教学可以很好的调动学生数学学习兴趣,提高初中生的平面几何理解能力^[54]。方王洋等人则探讨了网络画板在“二次函数”中的教学应用^[55]。付小华等基于网络画板探讨了一种新型的、直观的圆锥曲线证明方法;该方法基于丹德林双球模型和内切球的性质特点,充分利用了网络画板 3D 功能进行了辅助识别、分析构造、思考探索以及推理计算等^[56]。布合丽切木针对少数民族学生的数学学习,以网络画板和参数几何意义为例进行了教学实验和研究^[57]。可见,网络画板在义务教育阶段的几何板块以及函数板块有较好的助力作用。

关于学生数学素养及思维发展培养:姚瑶、杜佳佳、李赵容等进行了基于网络画板培养学生几何直观、直观想象的教学实践和教学策略研究,验证了采用网络画板在培养几何直观能力中的有效性和可行性^[58],并提出了“情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思”等具体的教学策略^[59],构建了包含“数据分析、学情追踪、探究实操、变式深化、归纳测评、资源共享、数据分析”的“1+5+1”教学模式^[60]。庞培钦针对情景教学视角下的高中学生的数学思维能力,总结了 7 种情景教学的应用策略^[61]。巩江源为网络画板助力逻辑推理素养培养提出了与情境、操作、合作以及支架相关的四种策略^[62]。李萌提出教师合理使用网络画板可以促进小学生数学抽象思维能力的培养^[63]。王素媚则以函数为例讨论了网络画板有利于培养高中学生的数学数形结合思想^[64]。邱雪莲的研究认为网络画板有助于提升学生的高阶思维能力^[65]。可见,在学生的数学素养与思维发展方面,网络画板可以起到积极的促进作用。

有关基于网络画板的数学教师信息素养培养研究:徐章韬等分析了网络画板环境中的实践活动影响教师核心素养与能力的机制^[66]。陈如仙等为提升数学教师的 TPACK 能力,以网络画板为例分析研究并设计构建了基于 SECI 理论的培训模式,该模式强调“经验的共享、情境式的学习、知识组合以及实践应用”,而且该模式在成都市武侯区的实践验证表明基于网络画板的培训可以有效提升教师的 TPACK 能力^[67]。牟天伟等以网络画板为媒介研究了在深度学习过程中,如何培训中学数学教师的策略^[68]。唐浩松在其硕士毕业论文中系统分析了在义务教育阶段,数学老师应用网络画板的相关情况^[69]。可见,作为面向数学学科的重要信息化工具,教师掌握网络画板的状况是教师信息化素养的具体体现,也是必然要求。

关于信息技术为教学带来的变革:方海光等基于网络画板和改进的 iFIAS 课堂观察分析系统,对深度融合教学教研的机制和方法进行了研究,并在实际课堂中验证了融合的有效性^[70]。张华等探索了在“双减”背景下,于课前、课中、以及课后环节中,基于

网络画进行高效课堂教学的策略,如教师备课和学生备学、趣味引入、互动探究、师生交流、拓展应用、总结反馈等^[71]。樊甜甜研究了在智慧环境下,提出“三段十环”模式以解决如何在初中数学教学中设计和使用网络画板的问题^[72]。袁黎基于网络画板探讨并实践了在深度学习的视角下针对小学生的数学智慧课堂教学^[73]。方海光和张旭等以网络画板为载体,研究了深度学习视角下学科融合的逆向教学模型^[74]。可见,以网络画板为扳手,信息技术在数学课堂教学中已经引发了一系列的变革。

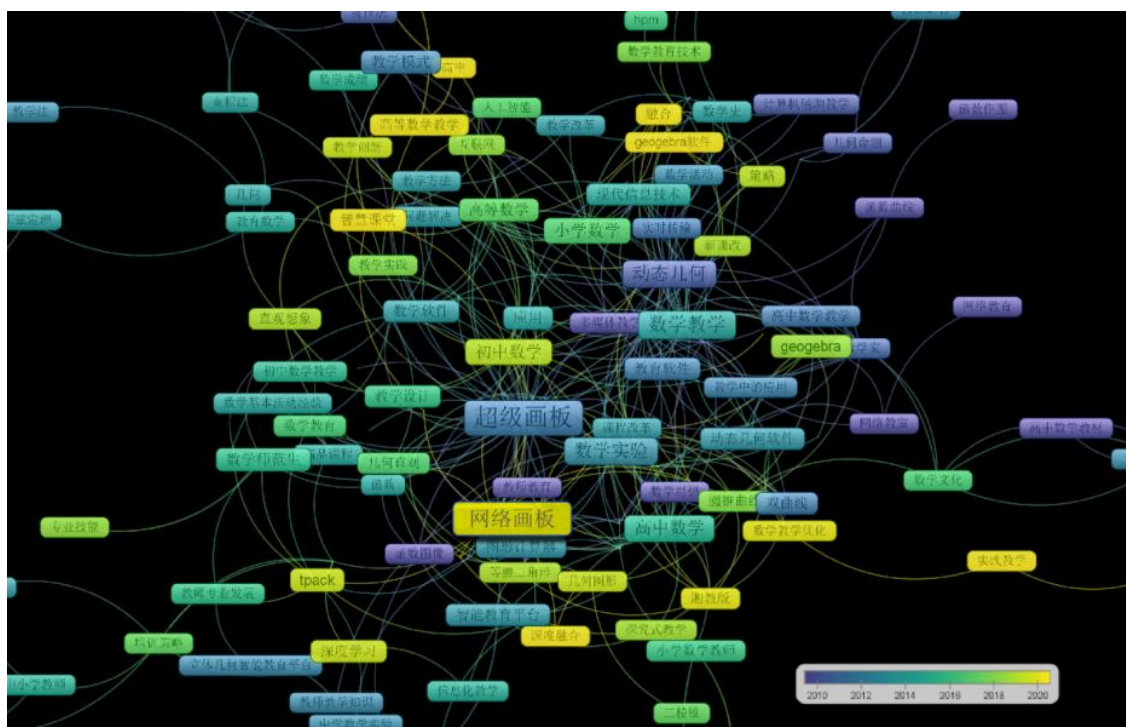


图 2-3 近二十年超级画板和网络画板研究关键词

2.5 本章小结

本章围绕研究问题,通过文献分析法梳理相关概念及研究发现:数学探究学习要求学生经历运用数学知识、数学方法和数学思维解决问题的全过程,是培养探究能力以及创新思维的重要途径。围绕数学探究学习的研究众多,在数学探究工具影响数学探究学习效果的研究中,研究结论出现了较大的争议。动态数学系统和实物工具作为主流的研究对象,其使用策略的不一致是导致研究结论各异的潜在因素。进一步梳理动态数学系统的发展,以及网络画板的应用现状发现,动态数学系统已在国内广泛应用,但是相关研究以思辨为主,实证研究较少。因此,有必要通过实证的角度,进一步探究网络画板对数学探究学习的影响。

第三章 基于网络画板的中学数学探究学习实验方案设计

本章主要内容包括围绕研究问题梳理相关理论观点并设计实证研究方案。具体论述实验假设及理论依据，提出研究思路并形成研究框架，明确实验中探究任务的内容和工具，以及编制测量工具。

3.1 实验假设及理论依据

3.1.1 实验假设

基于第一、二章中的研究背景和相关文献综述，以及后续章节提及的理论依据，研究人员将工具的使用策略作为动态数学系统影响数学探究学习效果的潜在重要因素。

为回答研究问题（1）“使用网络画板进行数学探究学习对中学生的学习效果影响如何”，本研究以工具为自变量，即时学习效果、知识保持和学习兴趣为因变量，并提出以下两个实验假设：

假设 1：在运用构造策略的前提下，与使用实物探究工具相比，使用网络画板进行数学探究活动后，学生在即时学习效果、知识保持和学习兴趣方面表现更好。

假设 2：在运用观察策略的前提下，与使用实物探究工具相比，使用网络画板进行数学探究活动后，学生在即时学习效果、知识保持和学习兴趣方面的表现更好。

为回答研究问题（2）“如何使用网络画板进行数学探究学习可以获得更好的学习效果”，本研究以工具使用策略为自变量，即时学习效果、知识保持和学习兴趣为因变量，并提出以下一个实验假设：

假设 3：与运用观察策略使用网络画板进行数学探究学习相比，运用构造策略使用网络画板后，学生在即时学习效果、知识保持和学习兴趣方面的表现更好。

3.1.2 构造思想

（1）数学中的构造思想

数学中的构造思想由来已久。在我国古代，以《九章算术》、《刘徽注》等为代表构建的中国传统数学体系具有构造性与机械化的特色^[75]。简单说，构造思想就是一种基于已知事物的特点和规律，去推导、理解和分析未知事物的思想方法^[76]。到 19 世纪末，数学直觉主义学派提出了构造性数学，即用已知的数学结论，通过逻辑演绎与创造性思

考，去证明未知的结论。构造数学特别强调思维构造性与创新能力的运用。

数学领域的构造策略描述的是面对具体问题时，深入剖析数学问题的已知条件和目标结论，基于它们之间的属性或特征，将已知条件中的元素视作出发点，有效地利用既有的数学关系和结果作为支架，通过缜密的思维活动，经由特定方式和有限步骤，构造出相应的数学对象或数学模型，进而实现概念定义或命题证明的方法。通过实施构造策略，可以有效培养和提升学生的多项关键能力，如对问题的理解能力、抽象分析的能力、发散思考的能力、数学工具的运用、实践验证的能力以及创新创造的能力^[77]。

（2）构造法的心理分析及启示

奥苏贝尔的有意义学习理论阐述了一个核心观点^[78]：“学习的过程实际上是新知识与旧认知结构中的相关观念不断融合与协调的过程。人类能够进行有效学习的原理在于新知识可与已有认知结构中的相关观念建立起联系并相互影响。”奥苏贝尔的同化理论不仅解释了知识从高级向低级分化的过程，也阐释了知识从低级向高级不断抽象和概括的机制，更揭示了知识在横向维度上的整合与贯通。这为教育工作者提供了坚实的理论基础，指导他们如何在教学中帮助学生构建和优化认知结构，进而提升学习效果。

构造策略具体关联到同化过程中的上位同化模式。当待探究的问题在概括层次上处于探究主体现有的认知框架之上时，便会触发这种上位同化过程。在此情境下，由于主体已有的认知架构中不存在现成的同化点作为参照，因此需要通过深入剖析问题的核心属性，通过类比、联想等方法，创造性地构建出各种实例，以推动问题的有效解决^[79]。

上述分析从认知心理的角度，阐述了构造操作影响知识学习以及创新创造能力培养的原理，如图 3-1 所示。因此，在考查如何使用动态数学系统利于学生探究学习时，是否有构造行为的参与应当作为影响因素之一。

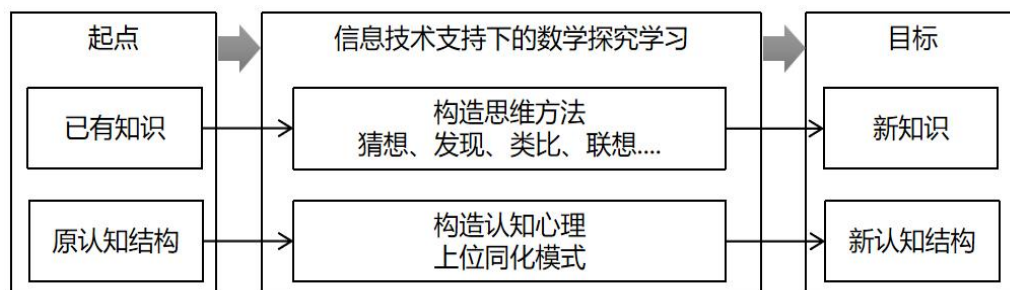


图 3-1 构造法认知原理

（3）构造法的思维模式及启示

构造法的一个思维特点是较为直观,即思路十分自然。此外,综合性是构造法思维特点的另一个典型特征,即运用多种思维方式从已知到达未知。例如,数学发现的思想,其核心在于通过观察与分析,深入探索问题的各个环节及其内在联系,从而为寻找解决方案奠定坚实基础;类比思想,即自然而然地关联已有知识中与当前问题类似或相关的情况,为构建模型提供参照;化归思想,将零散的结论关系有机整合起来,通过适当手段转化为已知,形成构造模型的有效工具;甚至还涉及猜想、试验、归纳等数学思想^[80]。

上述构造法的思维模式会对学生的探究学习效果产生积极的影响,如图 3-1 所示。因此,在设计实证研究方案时,将构造策略作为变量之一,可更加精准考查动态数学系统对数学探究学习的影响。

3.1.3 具身认知理论

(1) 具身认知的含义

认知科学是研究人类行为或智慧行为的科学。第一代认知学科通过模拟计算机处理信息的流程来解释人学习的过程,这种方式无视了人类认知具有意向性和体验性的特点,因此,这种在抛开“人”(或者说“离身”)的情景下进行的研究,并不能很好的解释各种认知行为和现象。随后,哲学家如 Edmund Husserl、Martin Heidegger 以及 Maurice Merleau-Ponty 等对身体和心智进行了大量的深刻思考,认知心理学家如 Vygotsky 和 Piaget 等对感知运动能力进行了大量的探索,以具身性(即关注人本身)为重要特征的第二代认知科学日益发展并备受重视^[81]。

心智的具身性意味着身体的生理和神经结构以及结构的运动会左右心智功能。该观点强调了身体在认知过程中的重要性,认为心智和身体之间存在着密切的联系和相互作用。认知的具身性是指,认知过程源自于身体与世界之间的动态交互作用。这种交互作用不仅塑造了我们的认知方式,同时也为我们的思考和行动提供了基础。因此,通常将那些主张身体及其体验对认知活动产生影响的理论统称为具身认知理论^[82]。

由于涉及动手操作的数学探究学习存在具身认知行为,因此,将认知科学的前沿理论——具身认知理论的相关观点纳入研究,将有助于启发研究人员,进而深入分析并解决本文中的研究问题。

(2) 具身认知理论的观点及启发

信息在心智中的存在方式即为表征。知识表征是信息在人脑中的存储与展现形式，关于知识表征的原理是认知科学领域中一个至关重要的议题。具身认知理论对知识表征的阐述有两个代表性模型，即概念隐喻理论模型和知觉符号理论模型。符号的意义并不仅仅依赖于与其他符号的联系，身体经验同样可以成为其获得意义的重要途径^[83]。其基本观点包括：

- 知觉符号（即构成认知的基本单元）是大脑感觉运动区神经表征的直接产物；
- 知觉符号源自多元化的感官通道，涵盖了人在感知特定事物时通过听觉、触觉、味觉等不同模态所获得的编码信息，并涉及到与物体相关的各种操作动作；
- 事物的表征是以多模态信息的形式存储于长时记忆中，该表征会保留获取概念意义时主体与外界交互所生成的感知觉痕迹；
- 实现学习迁移需要先将已获得的感觉运动经验内化，而这一内化过程是基于知觉和交互的丰富性所带来的经验^[84]。

综上，以上观点强调了基于工具操作或和环境交互而产生的运动感觉经验参与了认知形成、知识储存（保留）、知识迁移等环节，且都发挥了不可或缺的重要作用，如图 3-2 所示。因此，在考查探究学习效果时，与探究工具的交互是一大潜在的影响因素。

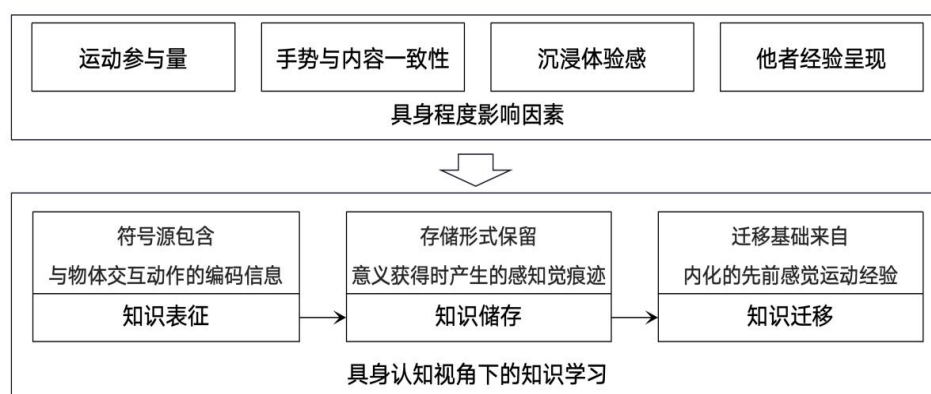


图 3-2 具身认知影响因素

（3）具身程度及启示

学习环境或工具的具身程度主要体现在学习者的运动参与量多少、手势与内容是否一致以及一致的程度、沉浸体验感的质量以及他者经验的呈现状况，如图 3-2。特别强调，手势作为一种有效的沟通工具，不仅能将内部的认知过程与外部的对象间建立映射，而且能够保持这种映射关系的稳定性。通过手势，个体可以更好地检索相关记忆和理解抽象概念^[85]。为了更准确地描述和分析学习环境中的不同参与方式和行为特征，以及更精确地评估学习环境中学习者身体参与对学习效果的影响，王辞晓等人将学习的具身程

度划分为：全身交互类型、涉身交互类型、控件交互类型、以及替代交互类型，具身程度依次降低。其中，控件交互类型更适用于中小学探究教学以及陈述性知识的学习^[86]。

目前，具身程度相关研究结论在数学学科教学研究中的应用相对缺乏。尽管上述研究认为控件交互适合中学生操作，但是控件交互中还可因为运动参与量、手势与内容的一致性等因素进一步细分为以观察为主和通过构造观察的两种具身程度。这种情况在使用动态数学系统时尤为普遍，也是导致动态数学系统辅助数学探究学习效果不明确的原因之一。因此，本研究将基于具身程度相关研究结论，设置在网络画板中构造和观看两种情形，精细地探究动态数学系统对数学探究学习的影响。

3.1.4 认知负荷理论

（1）认知负荷理论基本观点

认知负荷理论由认知心理学家约翰·斯威勒在 1988 年提出，是理解并优化教育和学习过程的重要视角。该理论在资源有限理论和图式理论的基础上，深入探讨学习任务与环境对人类认知负荷的影响，并强调有效教学设计在平衡这两者关系中的重要性^[87]。

人类的认知结构包括一个庞大的长期记忆系统，用于储存海量信息；以及一个工作记忆系统，其容量和持续时间均相对有限，主要负责处理新接收的信息^[88]。认知负荷理论指出，教学的意义在于将信息以图式的形式存储于长时记忆中。图式是一种特定的知识组织和存储机制，围绕某一核心主题对知识进行系统化表征。图式形成于旧知识与新信息之间的关联，并通过“同化”和“顺应”两种心理过程实现知识的整合与发展^[89]。

认知负荷指学习者适应学习任务和环境的要求而实际分配的工作记忆容量，主要包括三种类型：A.内部认知负荷，由学习材料所蕴含的待学习知识的本质与学习者已有的知识进行交互时而产生，是教师进行教学设计的前提，而无法对其进行改变；B.外部认知负荷，指在学习所需认知负荷部分以外，由于教学设计不当或其他不利因素而额外消耗的认知负荷；C.相关认知负荷，实际用于学习的工作记忆量，也就是用于图式构建以及自动化所分配的认知负荷量。这三种认知负荷可以叠加，并且仅有外部认知负荷和相关认知负荷会受到教学设计者的影响^[90]。

由于相关认知负荷是实际用于学习知识或技能的工作记忆量，即用于形成图式所需的负荷，所以当学习者能投入更多相关认知负荷到探究学习中，那么该学习者就可以进行更高层次的认知加工，例如抽象、比较和推理等。因此，教学设计应有助于学习者提升心理投入，积极参与和图式构建相关的认知加工活动^[91]。

(2) 认知负荷理论的启示

经研究证实，教具所具备的知觉和交互性特点对于学生实现深度认知投入、优化学习成效具有显著作用。良好的交互性质可以为学生提供更为丰富、与任务紧密相关的认知行为体验，进而帮助学生更为深入、精确地理解和专注于学习内容^[92]。

另外，学习过程中，在与环境中交互中获得的感觉运动经验具有至关重要的作用。研究表明，感觉运动经验可以扩大个体的工作记忆容量^[93]。而且，这种现象在处理需要更多工作记忆资源的复杂学习任务时尤为显著^[38]。

此外，信息技术在模拟实物工具或场景时的逼真程度亦会对学习成效产生显著影响。对于数学学科而言，采用与学习内容无关的信息呈现得越少，越能降低认知负荷，提升其学习效率。相反，高保真模拟的虚拟即时呈现可能会引入更多与学习主题不直接相关的认知负荷，从而对学习效果产生一定的干扰^[32]。

综上，本研究在考查动态数学技术对数学探究学习效果的影响时，基于认知负荷理论相关观点的启发，认为动态数学系统的交互性和视觉呈现特征可能会影响相关认知负荷、外部认知负荷以及扩大工作记忆，从而造成学习效果的不同，如图 3-3 所示。

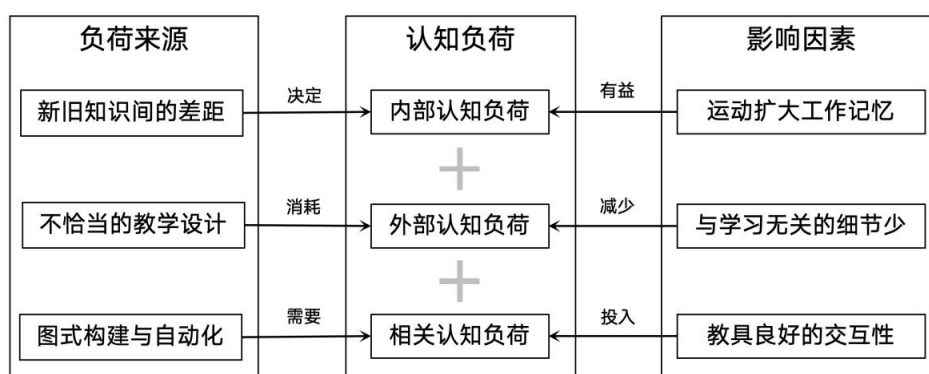


图 3-3 认知负荷影响因素

3.1.5 学习兴趣四阶段发展理论

(1) 学习兴趣的重要性

学习兴趣向来在学生在学习数学的过程中扮演着至关重要的角色，它对学生数学学习可以产生四两拨千斤的导向作用和动力功能^[94]。正如顾明远先生在《中国教育路在何方：教育漫谈》中提到“缺乏兴趣将阻碍学习的进程”。在研究初中生数学学习兴趣和数学学业成绩的关系时发现，对于初中学生数学学习而言，学习兴趣和学业成绩之间呈现显著的正相关关系。Broda 在其基于情绪价值论的研究中也发现，九年级学生数学学习兴

趣水平的不同与数学学习成绩、学业压力和寻求挑战的行为的差异关系密切。这些研究进一步证实了学习兴趣对学生数学学业成绩的重要促进作用^[95]。

中学阶段对于学生兴趣的培养与发展具有至关重要的作用。在这一时期，中学数学的学习特点表现为直观具体与严密抽象相结合的学习方式。数学内容高度的抽象性和逻辑性，往往导致中学生在数学学习中出现两极分化现象。如果教师能够采取恰当的教学方法，则能够有效激发学生对数学学科的兴趣与热爱；相反，学生可能会对数学失去兴趣，甚至放弃数学学习。因此，教师在中学数学教学中应充分重视中学学生兴趣的引导与培养，以促进学生的全面发展^[96]。

（2）学习兴趣四阶段发展理论及启示

正因为学习兴趣的重要性得到了肯定，如何激发和维持学习兴趣就称为了数学教育不断探索的话题之一^[97]。学习兴趣结构研究的标志性成果之一就是学习兴趣四阶段发展理论^[98]。具体而言，学习兴趣结构包括情境兴趣与个体兴趣。个体兴趣（初现、成熟两阶段）被定义为一种长期的、深入的个性倾向，它源于个人与某一特定主题或领域的持续联系；而情境兴趣则是指完成学习任务时引发的、短暂而积极的心理状态，其源于个体被这些特征引发的内在吸引。Hidi 和 Renninger 在深入研究学习兴趣的基础上，将情境兴趣进一步划分为“激发的情境兴趣”和“维持的情境兴趣”，如图 3-4 所示。前者描述短暂的情感与认知过程变化，由外部环境和文本特征所激发，后者描述接下来的心理状态，包括持续的注意力和毅力，主要由任务的意义性和个人参与来维持^[99]。

综上，学习兴趣对于数学学习有巧妙的助力作用，而情景兴趣又受到外部环境、文本特征、任务意义和个人参与的影响，因此为考查动态数学系统在激发和维持学生学习兴趣方面的影响，本研究将结合动态数学系统的特点，通过对照实验，采用兴趣四阶段理论为基础的初中数学兴趣问卷，调查动态数学系统这一信息技术工具在数学探究活动中对学生情景兴趣水平的影响。受探究条件和时间的限制，本次研究暂不涉及个体兴趣的考查。

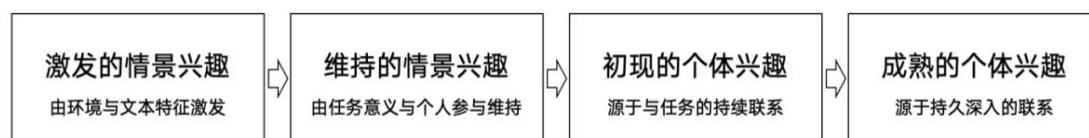


图 3-4 学习兴趣发展四阶段及影响因素

3.2 实验思路及框架设计

本文采用准实验研究模式设计教学实验，如图 3-5 所示。

基于构造思想、具身认知、认知负荷以及学习兴趣四阶段理论，考虑构造操作、感觉运动体验及程度、工具特征及交互性等因素的影响，分为观看和构造两种情形，共设计四种探究干预条件，分别为 A、在网络画板中构造虚拟模型，B、在网络画板中观察虚拟模型，C、在实际场景中观察实物模型，D、在实际场景中构造实体模型。

在开展正式的探究活动前对实验对象进行前测，以评估学生的初始水平。然后，各组学生在不同干预条件下进行探究活动，活动结束后进行后测和兴趣测试，以评估学生的即时学习成果和学习兴趣水平。最后，在探究活动结束后两个月后进行延迟后测，以评估各组学生的知识保留程度。

实验采用独立样本 t 检验和协方差分析法(ANCOVA) 处理数据。其中，前测得分将作为协变量用于后测和延迟后测的数据分析。

最后，对比学生在 A 条件和 D 条件下的学习效果验证实验假设 1，对比学生在 B 条件和 C 条件下的学习效果验证实验假设 2，对比学生在 A 条件和 B 条件下的学习效果验证实验假设 3。

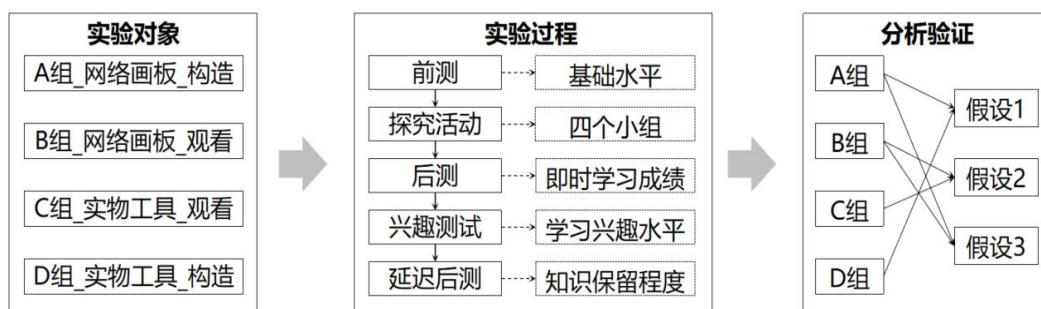


图 3-5 实证研究思路

3.3 实验探究任务设计

根据我国义务教育数学课程指导文件，学生在小学阶段已熟练掌握长方体和正方体的性质；升入初中后，要通过实验探究的方法、直观发现的操作、推理论证的思路等学习图形，经历探索图形和物体性质的过程^{[2][3]}。

基于上述学生知识水平和能力的预测，本实验设计选取正方体和长方体的相关性作为前测内容，以此测量被试学生的初始水平用于后续分析，同时判断是否具备完成棱

锥/棱柱探究活动的知识基础。另外，本实验设计选取探究正多棱锥/棱柱的顶点、棱和面之间的数量关系这一主题作为探究学习的内容，以此考查学生在各自探究条件下的学习效果和学习兴趣。

3.4 实验探究工具选取

本实验采用的动态数学系统是网络画板（www.netpad.net.cn），如图 3-6 所示。在网络画板的三维环境中，学生可以自由绘制正多棱锥和正多棱柱进行观察或构造探究，教师可以事先制作好正多棱锥和正多棱柱的课件供学生观察探究。

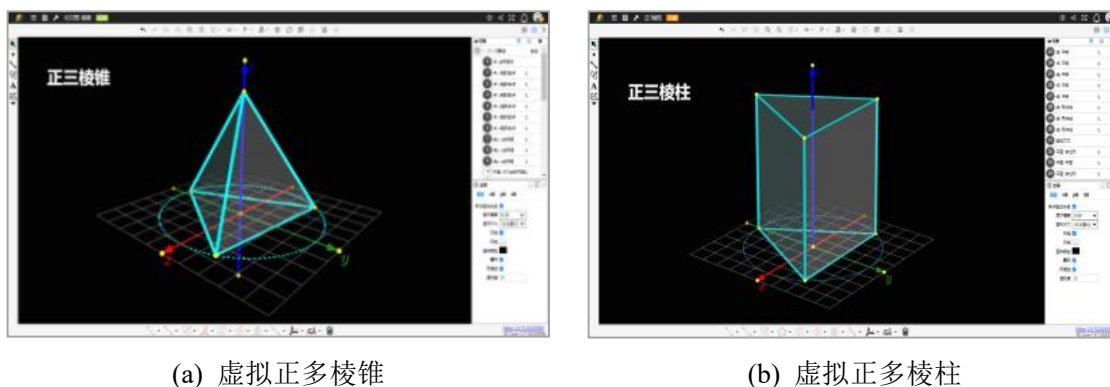


图 3-6 网络画板探究环境

本实验使用的实物探究工具为超轻黏土和小竹签，以及用超轻黏土和小竹签预制的正多棱锥/柱模型，如图 3-7 所示。其中，超轻黏土购于品牌官方旗舰店并附有质量保证证书，以确保学生使用过程的安全性。

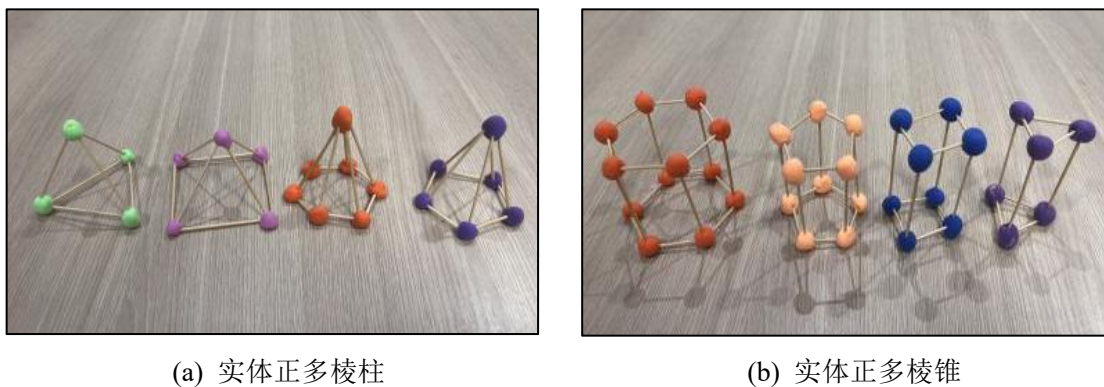


图 3-7 实物探究工具

此外，还提供了纸质辅助探究表格，以帮助学生进行探索活动。同时，也便于记录和评估学生的探索行为。探究表格详见附录 6。

3.5 学习效果测量工具

3.5.1 前测、后测和延迟后测试卷的编制

为评估各个实验干预条件下学生的学习效果,研究人员基于 Oi-Lam Ng 等人在其研究中使用的、经过验证的测量工具^[41],并在本市初中数学教研员和一线数学老师的共同指导下,参考范希尔几何思维水平划分标准,编制前测、后测和延迟后测试卷。此外,三份试卷均接受了信度和效度测试,结果显示达到可接受水平。具体而言,每套测试卷均由 16 道填空题组成,其中包括 6 道“简单题”,6 道“难题”,2 道“综合简单题”,2 道“综合难题”。简单题对应范希尔几何思维模型的水平一和二,即直观和分析层次;难题对应水平三,即非正式演绎层次。评分时,简单题、难题、综合简单题和综合难题答对分别记 1 分、2 分、3 分和 4 分,答错记 0 分。表 3-1 列出四种题型的示例和相应的计分标准。完整试卷详见附录 1-4。

表 3-1 前测、后测、延迟后测试题难度示例及评分标准

难度	例题	计分	
		答对	答错
简单题	正九棱锥一共有____个顶点。	1 分	0 分
难题	有二十二个顶点的正棱柱是正____棱柱。	2 分	0 分
综合简单题	一个有十三个面的正棱柱总共有____个顶点。	3 分	0 分
综合难题	有二十二条棱的正棱锥一共有____个面。	4 分	0 分

3.5.2 中学数学学习兴趣问卷

本研究采用问卷调查法来对比和评价各组学生在各自的干预手段实施后所呈现的学习兴趣水平情况。由于本文重点关注探究工具及使用策略对数学探究性学习的影响,同时考虑实际实验条件的限制,研究人员基于 Hidi 和 Renninger 在 2006 年的研究中提出的学习兴趣四阶段模型的理论框架,采用德尔菲法收集专家意见,改编了吴洪艳等编制的《初中生数学学习兴趣问卷》^[98]。为了保证改编兴趣问卷的有效性和可用性,研究人员对其进行了信度和效度检验。检验结果显示信效度良好,因此该测量工具可用于本研究的进行。

本兴趣问卷包含两个部分,分别测试各组学生完成各自的探究学习后,学生被激发

的情境兴趣水平，以及学生能维持的情境兴趣水平。具体而言，该兴趣问卷是五点李克特量表，共包含 10 个题项，每个题项均采用五点计分法（即 A. 非常不同意=1，B. 不同意=2，C. 既不同意也不不同意=3，D. 同意=4，E. 非常同意=5）。反映学生学习兴趣的总分（X）为所有项目得分之和。总分分为四个等级：无兴趣（ $n \leq x < 2n$ ）、兴趣不稳定（ $2n \leq x < 3n$ ）、有兴趣（ $3n \leq x < 4n$ ）和强烈兴趣（ $4n \leq x \leq 5n$ ），其中 n 代表所有项目的数目。完整问卷详见附录 5。

3.6 本章小结

本章主要内容是围绕研究问题设计的实证研究方案。通过梳理构造思想、具身认知、认知负荷以及学习兴趣四阶段等相关理论，总结出动态数学系统影响数学探究学习的潜在因素，如构造操作、感觉运动体验及程度、工具特征及交互性等。据此，研究人员提出了三项实验假设，设计了四种探究干预条件，选取了实验探究任务内容和工具，并编制了用于测量学习效果的试卷和学习兴趣的问卷工具。最终，针对研究问题设计了理论基础扎实的实证研究方案。

第四章 基于网络画板的中学数学探究学习实验实施与结果

基于第三章的实证研究设计，本章主要内容为实验实施过程的具体细节、实验数据的收集及分析、以及结合相关理论讨论得出的实验结论。

4.1 实验对象

参与本次实验的中学生来自广州市一所公立学校。在该校七年级随机抽取了四个班级，其中，每个班级的学生人数都超过 30 人。总共 137 名十一至十三岁的学生参加了探究实验，其中包括 64 名女生和 73 名男生。四个班级被随机分配到四个观察条件中，如图 4-1 所示，A 组学生在网络画板系统中构造多棱锥和多棱柱，B 组学生观察网络画板课件中预先制作好的虚拟模型，C 组学生观察棱锥和棱柱的实物模型，D 组学生用超轻黏土和小竹签制作实物棱锥和棱柱。另外，涉及在动态数学系统中进行探究学习的学生均提前完成了为期三个月的网络画板兴趣课程，对网络画板的基本操作非常熟悉。



(a) A 组_网络画板_构造策略探究



(b) B 组_网络画板_观察策略探究



(c) C 组_超轻黏土_观察策略探究



(d) D 组_超轻黏土_构造策略探究

图 4-1 各小组学生进行探究学习场景示意

此外，主持实验的主讲教师和助教是来自景中动态数学研究院的特级培训师，且具有两年以上的教学经验。在正式实验前，教师们充分沟通，熟悉了实验设计意图和流程步骤，确保四个班级进行的探究学习活动符合相应的研究设计。

4.2 实验实施过程

本实验实际由四节课组成，具体实施过程如图 4-2 所示。其中，受实际研究条件的限制，实验具体实施时，将探究活动主体分为两次课进行，相应的后测也分为两步完成。在第一节课中，各组学生练习使用并熟悉各自的探究工具，然后完成前测。第二节课在随后的一周进行，在开展自主探究活动之前，教师首先引导学生认识正多棱锥的顶点、棱和面；随后各组学生运用规定的探究策略使用各自的工具，探究正多棱锥的顶点、棱和面之间的数量关系；在自主探究活动结束后，教师对探究关系进行总结，以便学生修正自己的观察和推理；最后，学生完成棱锥后测后，结束本次课程。第三节课的流程与第二节课相似，仅将探究主题换成探究正多棱柱的顶点、棱和面之间的数量关系；此外，兴趣问卷也在第三节课后立即发放给学生进行填写。在两个月后的第四次课上，所有学生在简单地回顾所学知识后，完成延迟后测。

整个实验过程中，四个小组之间保持一致的学习流程和时间分配，区别仅在于学生运用相应的探究策略使用各自的工具进行自主探究活动。具体来说，为了解决探究问题，A 组学生通过点、线、圆和面等基本几何元素，以及平移和旋转等基本几何变换，在网络画板中构造出至少五个正多棱锥/棱柱用于探究其顶点、棱和面的数量关系；B 组学生通过操作变量滑块变换图形或改变视角，在网络画板中观察五个事先制作好的虚拟多棱锥/棱柱进行探究；C 组学生则观察五个多棱锥/棱柱实物模型进行自主探究学习；D 组学生使用超轻黏土和小竹签制作实物正多棱锥/棱柱用于探究。在四个干预条件下，学生都有足够的时间完成探究活动。在活动过程中，教师提醒学生在构建/观察的同时，记录每个正多棱锥/棱柱的顶点、边和面的数量。

在网络画板中构造棱锥的方法有多种。例如：作法向为 z 轴正方向且圆心在 z 轴上的圆，以此圆作为棱锥的底面，取圆上一点旋转 $360^\circ/N$ ，依次作出 N 棱锥底面的顶点，再取 z 轴上一点，依次连接 z 轴上的点与圆上的点，完成棱锥框架的构造，进一步可使用多边形工具作出棱锥的各个面；另一种构造方法方法是以上述方法思路为基础，先作出一条侧棱，再以 $360^\circ/N$ 为转角旋转 $N-1$ 次，得到正 N 棱锥的框架。同样，在动态数学环境中构造棱柱的方法也有多种，例如：作法向为 z 轴正方向且圆心在 z 轴上的圆，以此圆作为棱锥/棱柱的一个底面所在平面，取圆上一点以 $360^\circ/N$ 为转角旋转 $N-1$ 次得到棱柱底面的顶点，然后将此面的顶点以 z 轴正方向平移一段距离，依次连接上下两个面的顶点，完成棱柱的构造，进一步可使用多边形工具作出棱柱的各个面；另外一种方

法是以上述方法思路为基础，先作出一条侧棱，再进行旋转得到正 N 棱柱的框架。

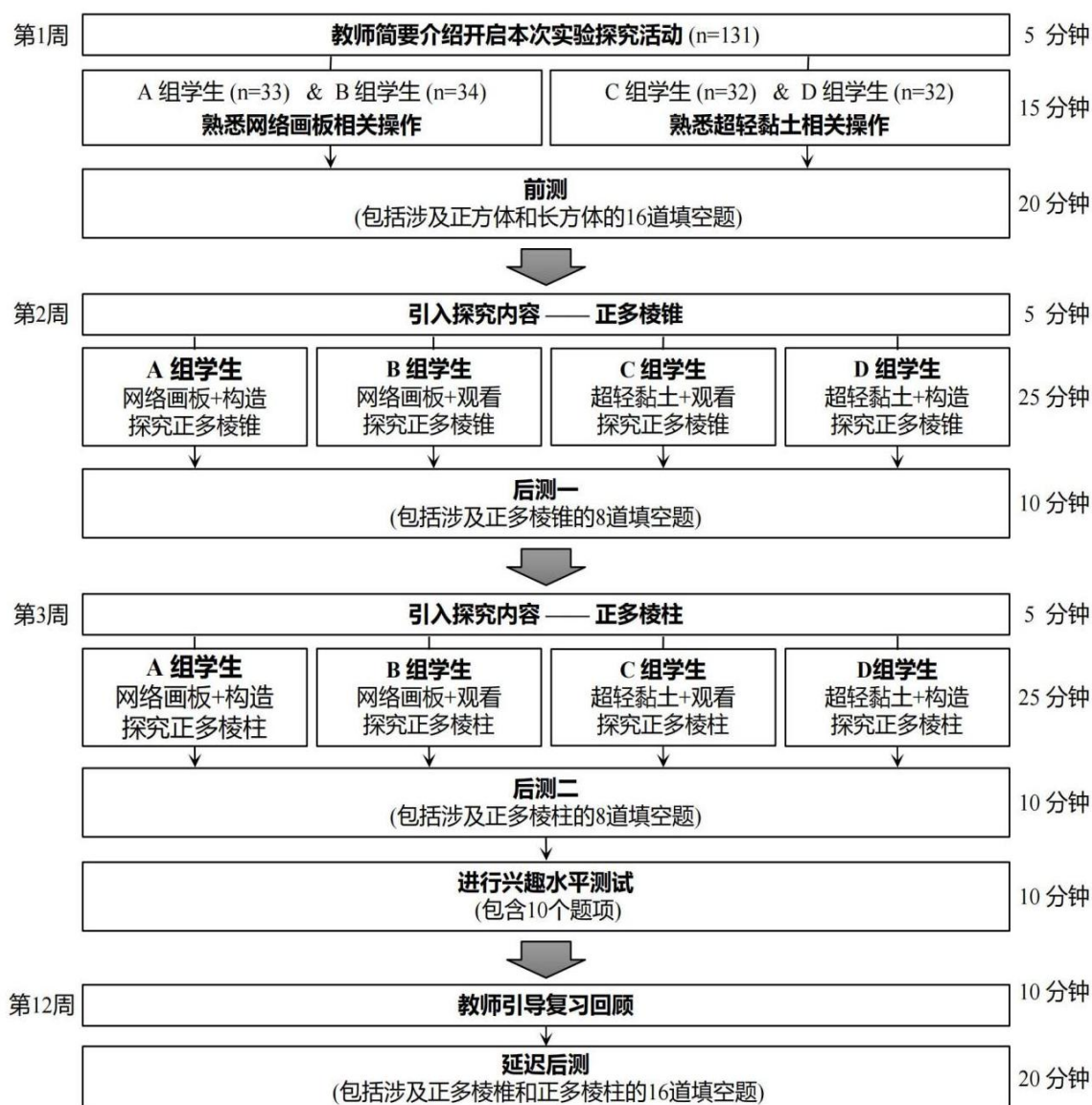


图 4-2 实验流程图

4.3 数据整理与分析

在实验完成后，研究人员收集所有的试卷和调查问卷，根据签到记录，整理确定因个人原因而没有参与完整探究活动过程的学生，并将他们已完成的和未完成的答卷均视为无效答卷。这些原因包括并不限于因为生病请假而当天未到校学习、因参与篮球比赛等集体项目而错过本探究课程等事项。最终，有效参与研究的学生的总人数为 131 人，样本数量超过题项数量的 5 倍，属于合理范围。其中，A 组回收有效答卷 33 份；B 组回收有效答卷 34 份；C 组回收有效答卷 32 份；D 组回收有效答卷 32 份。

经计算,前测试卷、后测试卷和延迟后测试卷的 Cronbach's alpha 系数分别为 0.747、0.854 和 0.898,属于可接受范围,问卷数据可用于进一步的研究。另外,研究人员还通过 KMO 和 Bartlett 检验评估了三次测试的结构效度,结果分别为 0.622、0.765 和 0.821,表明三次测试结构效度良好,能够反映预期的测量结果。经分析整理,表 4-1 中列出 A、B、C、D 四组学生前测、后测以及延迟后测总分的平均值及其变化;表 4-2 列出后测和延迟后测成绩的协方差分析结果;表 4-3 列出前测、后测以及延迟后测成绩变化率及 t 检验情况,并细分为总成绩、难题成绩以及简单题成绩进行呈现。

4.3.1 前测数据分析

本研究使用 SPSS 统计软件 (V26) 来分析所收集试卷的区分度指数和难度指数。参照临界比率的计算方法,区分度指数是高分组 (High-score Group, HG) 和低分组 (Low-score Group, LG) 平均值之间的差距,区分度指数是高分组和低分组之间的 t 检验结果。对于前测试卷,区分指数为 0.465,区分水平显著 ($p < 0.05$),表明前测试卷区分度较好。另一方面,每个题项的难度指数由答对该题目的人数除以总人数计算得出。经检测,前测试卷的题目难度介于 0.221 至 0.984 之间,题项难度分布属可接受范围。因此,前测试卷数据可以用于后续的实验分析。

表 4-1 A、B、C、D 四组学生前测、后测、延迟后测总分平均值及变化

	A 组 (DGS_构造)	B 组 (DGS_观看)	C 组 (实物_观看)	D 组 (实物_操作)
前测 (T1)	20.82	23.59	24.09	22.97
后测 (T2)	27.33	27.26	26.41	24.84
延迟后测 (T3)	23.21	22.00	17.50	20.84
后-前差值 (T2-T1)	6.52	3.68	2.31	1.88
后-前差率 (T2-T1)/T1	0.31	0.16	0.10	0.08
延-前差值 (T3-T1)	2.39	-1.59	-6.59	-2.13
延-前差率 (T3-T1)/T1	0.11	-0.07	-0.27	-0.09

本研究中,前测的设计目的是为调查参与学生是否具备进一步学习所需的基础知识,以及了解四组学生的基础水平。如表 4-1 所示,A 组、B 组、C 组和 D 组学生在前测中获得的平均分分别为 20.82 分、23.59 分、24.09 分和 22.97 分。鉴于前测试卷的满分为 32 分,这些平均分均处于中上水平,反映出四个小组的学生都非常熟悉长方体和正方体

有关顶点、棱和面的数量的性质。这一结果表明，参与实验的学生具备进一步探究棱锥和棱柱有关顶点、棱和面的数量关系的基础知识。此外，基于实验设计和实际实验条件，接下来对后测和延迟后测进行分析时，会参考测所反映出来的四组学生之间差异。

4.3.2 后测数据分析

经分析，后测试卷的区分度指数为 0.468 ($p < 0.05$)，题目难度范围为 0.664 至 0.984，区分度和难度良好。鉴于后测目的是评估学生在特定干预措施指导下开展探究活动后所取得的学习成果，首先，从平均分来看，四组学生在后测中的成绩表现分别优于前测成绩，这表明他们在各自的教学干预措施下取得了一定的进步。其次，为减少前测分数差异带来的影响，本研究采用协方差分析的方法，将前测分数作为协变量来比较各组的后测分数。此外，研究人员还通过独立样本 t 检验对各组前测成绩与后测成绩之间的变化进行了对比，以进一步探究各组之间的差异，从而揭示不同教学干预措施的效果。

对比 A 组和 D 组数据：如表 4-1 和 4-2，A 组学生后测的平均得分为 27.33，高于 D 组学生的平均得分 (24.84)，协方差分析结果显示两者差异显著 ($p = 0.011$)。如表 4-1 和 4-3，A 组学生从前测到后测的平均得分变化率 (0.31) 也高于 D 组学生的表现 (0.08)，且 t 检验结果显示差异显著 ($p = 0.004$)。此外，表 4-3 中的数据进一步展示了学生成绩从前测到后测的变化细节。在简单题部分，A 组学生成绩的平均分变化率增加了 0.06，而 D 组学生的得分变化率则减少了 0.13，且 t 检验结果表明差异具有统计学意义 ($p = 0.047$)。在难题部分，A 组学生的平均分变化率 0.54 高于 D 组学生的平均分变化率 (0.27)， t 检验也表明差异显著 ($p = 0.000$)。因此，就采用构造策略探究而言，A 组学生与 D 组学生相比进步更快，取得的成绩更好，而且这些优势在范希尔几何思维水平 1-3 级上均较为明显。

对比 B 组和 C 组数据：如表 4-1、4-2 和 4-3，B 组学生的后测平均分 27.26 高于 C 组学生的后测平均分 (26.41)，但协方差分析显示二者差异无统计学意义 ($p = 0.378$)；虽然 B 组学生从前测到后测的平均分变化率 0.16 高于 C 组学生成绩的变化率 (0.10)，但 t 检验的结果表明这种差异并不显著 ($p = 0.326$)。此外，如表 4-3，两组学生在简单问题部分总分变化率上的差异 ($p = 0.22$) 和在难题部分总分变化率上的差异 ($p = 0.519$) 均无统计学意义。因此，在采用观察学习策略进行探究学习时，B 组学生和 C 组学生取得的成绩不相上下。

对比 A 组和 B 组数据：如表 4-1 和 4-2，A 组学生在后测考察时取得的平均分 27.33

高于 B 组学生的表现（27.26 分），但协方差分析结果显示差异不显著（ $p = 0.378$ ）。进一步，如表 4-1 和 4-3，A 组学生从前测到后测的平均分变化率（0.31）高于 B 组学生的变化率（0.16），且 t 检验结果表明差异有统计学意义（ $p = 0.028$ ）。此外，如表 4-3，在简单问题部分，两组学生平均分变化率的差异无统计学意义（ $p = 0.093$ ），但在难题部分，两组学生平均分变化率的差异显著（ $p = 0.011$ ）。因此，在动态数学探究环境中，A 组学生和 B 组学生取得的成绩相当，但 A 组学生进步更快，且这种优势主要体现在范希尔几何思维水平 3 这一层面。

表 4-2 前测、后测、延迟后测协方差分析

	A 组 V.S. D 组	B 组 V.S. C 组	A 组 V.S. B 组
后测总分对比	$F = 6.806$	$F = 0.788$	$F = 1.255$
	$p = 0.011 < 0.05$	$p = 0.378 > 0.05$	$p = 0.267 > 0.05$
延迟后测总分对比	$F = 5.385$	$F = 4.855$	$F = 1.919$
	$p = 0.024 < 0.05$	$p = 0.031 < 0.05$	$p = 0.171 > 0.05$

*各组后测成绩协方差分析和延迟后测成绩协方差分析均以前测成绩为协变量进行

4.3.3 延迟后测数据分析

本研究中的延迟后测旨在评估学生在探究学习活动结束两个月后的知识保留情况。经检验，延迟后测试卷的区分度指数为 0.722，具有统计学意义（ $p < 0.05$ ）；延迟后测试卷的题目难度在 0.473 至 0.870 之间，属于可接受程度。四组学生在延迟后测中的成绩均比各组学生后测成绩有所下降，这表明各组学生在探究活动完成后，对所习得的知识均有一定程度的遗忘。此外，与前测相比，A 组学生在延迟后测中的平均得分较高，而 B 组、C 组和 D 组学生的情况则相反。这一观察结果表明，A 组学生对棱锥和棱柱知识的保持优于对长方体和正方体知识的保持；相反，B 组、C 组和 D 组学生则没有表现出这种优势。考虑到前测成绩有别，即各组学生间的基础水平有所差异，仍以前测得分作为协变量，对延迟后测成绩进行协方差分析；同时，也对前测与延迟后测之间的差异进行 t 检验，以此进一步加强实验分析。

对比 A 组和 D 组数据：如表 4-1 和 4-2 所示，A 组学生在延迟后测试中的表现优于 D 组学生，其平均得分为 23.21，而 D 组学生得分仅为 20.84，协方差分析也证实了这一差异的显著性（ $p = 0.024$ ）。此外，如表 4-1 和 4-3，A 组学生平均得分变化率（0.11）

也高于 D 组学生的表现 (-0.09)，且独立样本 t 检验结果表明两者之间差异显著 ($p = 0.004$)。此外，从表 4-3 中有关前测到后测更详细的数据可以看出：对于简单问题部分，A 组学生的平均分变化率下降了 0.11，而 D 组学生的平均分变化率则下降了 0.29；t 检验数据显示差异显著 ($p = 0.012$)。对于难题部分分析，A 组学生的平均分变化率 0.32 高于 D 组学生的平均分变化率 0.08；t 检验结果同样证实了这一差异具有统计学意义 ($p = 0.001$)。因此，就采用构造策略运用探究工具进行探究学习而言，与 D 组学生表现相比，A 组学生的知识遗忘速度较低，知识保留水平较高，进一步分析表明这种优势在范希尔几何思维模型的水平 1-3 层面上都较为明显。

对比 B 组和 C 组数据：如表 4-1 和 4-2 所示，B 组学生在延迟后测试中获得的平均分 (22.00 分) 高于 C 组学生的平均成绩 (17.50 分)，以各组前测成绩为协变量的协方差分析结果显示这种差异显著 ($p = 0.031$)。此外，如表 4-1 和 4-3，B 组从前测到后测的平均分下降率 (0.07) 也低于 C 组学生的下降率 (0.27)，且这种差异经独立样本 t 检验后显示有统计学意义 ($p = 0.326$)。再如表 4-3 所示，对于简单问题部分，B 组学生延迟后测的平均分变化率下降了 0.27，而 C 组学生则下降了 0.29；可是 t 检验表明这一差异在统计学上并不显著 ($p = 0.326$)。对于难题部分，B 组学生延迟后测的平均分变化率 0.11 高于 C 组学生 (-0.20)；且 t 检验证实了这一差异具有统计学意义 ($p = 0.004$)。因此，在采用观察学习策略使用工具完成数学探究性学习后，与 C 组学生的表现相比，B 组学生的遗忘速度较低，知识保留水平更高，且这种优势在范希尔几何思维水平 3 这一层面体现得比较明显。

对比 A 组和 B 组数据：4-1 和 4-2 所示，A 组学生在延迟后测试中获得的平均总分 (23.21 分) 高于 B 组学生的平均总分 (22.00 分)，但协方差分析结果表明差异不显著 ($p = 0.171$)。然而，结合表 4-1 和表 4-3 分析，A 组学生从前测到后测的平均分变化率 (0.11) 高于 B 组学生的表现 (-0.17)，且独立样本 t 检验结果表明两组之间的差异有统计学意义 ($p = 0.005$)。此外，如表 4-3 所示，对于简单问题部分，A 组学生延迟后测的平均分变化率下降了 0.11，而 B 组学生则下降了 0.27；但 t 检验结果表明，这种差异没有统计学意义 ($p = 0.112$)。对于由难题组成的部分，A 组学生的平均分变化率 0.32 高于 B 组学生的平均分变化率 (0.11)；且 t 检验结果证实差异显著 ($p = 0.012$)。因此，在动态数学环境中，A 组学生和 B 组学生的知识保持水平相当，但 A 组学生的遗忘速度较低，且这种优势在范希尔几何思维水平 3 这一层面的体现更为明显。

表 4-3 前测、后测、延迟后测成绩变化率及 t 检验结果

	变化率				t 检验					
	A 组	B 组	C 组	D 组	A 组 V.S. D 组	B 组 V.S. C 组	A 组 V.S. B 组			
后测总分	0.31	0.16	0.10	0.08	$t = 2.992$ $p = 0.004 < 0.05$	$t = 0.989$ $p = 0.326 > 0.05$	$t = 2.231$ $p = 0.028 < 0.05$			
后测简单题	0.06	-0.06	-0.13	-0.13	$t = 2.017$ $p = 0.047 < 0.05$	$t = 1.214$ $p = 0.229 > 0.05$	$t = 1.695$ $p = 0.093 > 0.05$			
后测难题	0.54	0.33	0.27	0.27	$t = 3.643$ $p = 0.000 < 0.05$	$t = 0.648$ $p = 0.519 > 0.05$	$t = 2.586$ $p = 0.011 < 0.05$			
延迟后测总分	0.11	-0.07	-0.27	-0.09	$t = 3.105$ $p = 0.003 < 0.05$	$t = 0.989$ $p = 0.326 < 0.05$	$t = 1.989$ $p = 0.050 = 0.05$			
延迟后测简单题	-0.11	-0.27	-0.36	-0.29	$t = 2.562$ $p = 0.012 < 0.05$	$t = 1.059$ $p = 0.326 > 0.05$	$t = 1.604$ $p = 0.112 > 0.05$			
延迟后测难题	0.32	0.11	-0.20	0.08	$t = 3.471$ $p = 0.001 < 0.05$	$t = 3.011$ $p = 0.004 < 0.05$	$t = 2.571$ $p = 0.012 < 0.05$			

4.3.4 数学学习兴趣分析

(1) 激发的情景兴趣分析

经项目分析, 该问卷中“激发的情景兴趣”部分信度仅为 0.396。进一步分析发现其中第四题信度较差, 而除去第四题后的该部分问卷信度达到 0.724。因此, 研究人员将第四题去掉, 仅保留第一、第二、第三和第五个问题, 用于后续的数据分析。

根据量表要求, “激发的情景兴趣”总分 (x) 划分为: 无兴趣 ($4 \leq x < 8$)、兴趣不稳定 ($8 \leq x < 12$)、感兴趣 ($12 \leq x < 16$) 和非常感兴趣 ($16 \leq x \leq 20$) 四个区间。如图 4-3 所示, A 组学生 (16.83 分)、B 组学生 (16.16 分) 和 D 组学生 (16.78 分) 的“激发的情景兴趣”总分分别都达到了“非常感兴趣”的水平, 而 C 组学生的“激发的情景兴趣”总分 (15.12 分) 只达到了“感兴趣”的水平。

由于 A 组学生和 B 组学生最终达到的“激发的情景兴趣”水平分别高于 D 组学生和 C 组学生, 这表明与使用实物操作工具相比, 使用动态数学技术激发了更高的情景兴趣水平。与此同时, A 组学生和 D 组学生完成实验后的“激发的情景兴趣”水平分别高

于 B 组学生和 C 组学生，这一观察结果表明，与采用观察策略使用动态数学系统相比，采用构造策略使用动态数学系统更能激发学生学习数学的情景兴趣。

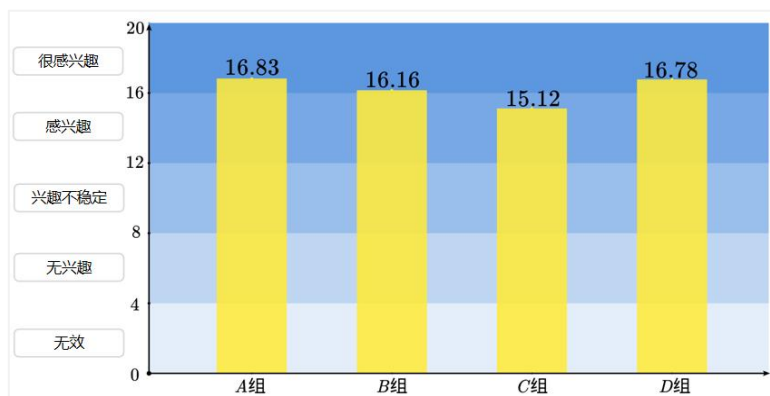


图 4-3 激发的情景兴趣水平

（2）维持的情景兴趣分析

经分析，“维持的情景兴趣”问卷信度为 0.657，故该问卷涉及的五个项目均可纳入后续研究中。根据量表的要求，“维持的情景兴趣”总分（x）划为：无兴趣（ $5 \leq x < 10$ ）、不太感兴趣（ $10 \leq x < 15$ ）、感兴趣（ $15 \leq x < 20$ ）和非常感兴趣（ $20 \leq x \leq 25$ ）四个区间。

如图 4-4 所示，A 组学生（20.79 分）和 D 组学生（20.29 分）“维持的情景兴趣”水平达到了“非常感兴趣”的程度，而 B 组学生（19.70 分）和 C 组学生（15.12 分）“维持的情景兴趣”水平仅达到了“感兴趣”的水平。此外，A 组学生和 B 组学生“维持的情景兴趣”总分分别略高于 D 组学生和 C 组学生的表现，这表明，与使用实物操作工具相比，使用动态数学系统有助于维持较高的兴趣水平。与此同时，A 组学生和 D 组学生分别比 B 组学生和 C 组学生维持了更高的兴趣水平，这一结果则说明，在动态数学系统中，采用构造策略比采用观看策略更容易维持相对较高的学习兴趣。

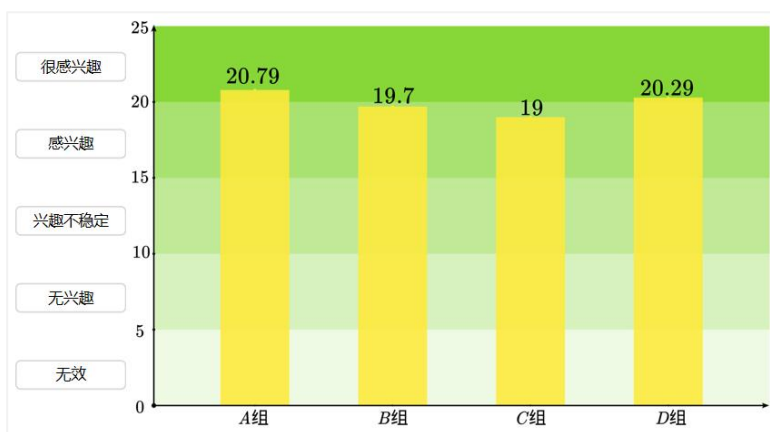


图 4-4 维持的情景兴趣水平

4.4 实验结果与讨论

4.3.1 构造策略前提下，网络画板比实物工具对探究学习效果的影响更积极

数据分析显示，在网络画板中进行构造探究的学生比在实物环境中进行构造探究的学生取得了更好的后测成绩和延迟后测成绩，证实了实验假设 1。即，采用构造策略进行数学探究学习时，使用网络画板比使用实物工具在即时学习成绩和知识保留程度上的效果更好。

就后测成绩而言，结合对探究辅助表格的分析统计，还存在一个显著现象，即在网络画板环境中，学生不仅能构造更多数量的棱锥或棱柱，还能构造出棱数更多棱锥或棱柱。具体而言，使用网络画板的学生平均构造了 5.5 个棱锥和 4.3 个棱柱，而使用超轻黏土构造的学生平均只建造了 3.2 个棱锥和 2.4 个棱柱；在使用网络画板进行探索的过程中，有一些学生甚至绘制作出了 13 棱锥或棱柱、20 棱锥或棱柱等正多棱锥/棱柱，而使用超轻黏土构造的学生则没能够制作出类似的模型；另外，在使用超轻黏土的小组中，有几名学生因为没有构造出足够多的模型而没有找到棱、顶点和面的正确数量关系。很明显，在相同的时间内，比起实物工具对照组，使用网络画板可以支持学生做更多的构造行为，从而更好进行探究学习^[32]。在两个组的探究活动流程保持一致的前提下，这种工具构造效率不同的特性是造成后测实验结果的因素之一。

就知识保留程度而言，具身认知理论和认知负荷理论都强调了运动感觉体验及其程度、以及手势与内容一致性的重要性^[32]。例如，运动被认为能扩大工作记忆的容量、手势尤其能促进持久学习等^[38]。在本实验中，学生在网络画板中操作鼠标进行构造时，涉及到与几何变换一致或相关的拖动动作，相应地会产生与内容同步的手势动作；而在实物构造活动中，学生不可避免地需要相应的手部动作来完成棱锥/棱柱的构建。实验结果也表明，使用网络画板进行构造的学生与使用超轻黏土进行建构的学生相比，知识保持率更高。这意味着在网络画板中操纵鼠标进行构造所产生的感知运动经验并不亚于实物操作材料所能提供的经验。

因此，在时间和空间都允许学生进行构造探究的情况下，网络画板比实物工具对学生数学探究学习的影响更好，应鼓励师生采用网络画板这类动态数学系统进行陈述性知识的探究学习。例如，针对义务教育课程标准中有关“图形变化”的相关内容，在学习图形的平移、旋转、轴对称等内容时，可以借助网络画板，让学生亲身构造并体验平移、

旋转、轴对称等变化过程。针对普通高中数学课程标准中有关“立体几何”的内容，鼓励学生数学使用网络画板构造立体几何图形，通过旋转、缩放、透视等方式认识并探究其性质。

4.3.2 观看策略前提下，网络画板比实物工具对探究学习效果的影响更积极

实验数据分析结果显示，在网络画板中进行观察探究的学生与在实物环境中进行观察探究的学生后测成绩相当，但是在网络画板中进行观察探究的学生取得了更好的延迟后测成绩，特别是在难题方面表现更好。这一结果验证了研究假设 2 的部分内容，即在网络画板中进行观察探究可以让学生取得和观察实物进行探究相当的即时学习效果和更高的知识保留程度。

正如上一节所述，工具特性的区别会导致在相同时间内学生无法获取相当的学习资料。在本实验的观察条件中，两组学生都观察和探究了相同数量的棱锥/棱柱，而两组学生取得的即时学习效果相似，说明观察虚拟几何体和观察实物几何体的学习效果相似。

此外，根据认知负荷理论，细节过多的呈现会增加外部认知负荷，而无关细节较少的操作可以降低学习者的外部认知负荷，而且，这对于处理需要增加工作记忆资源的复杂学习任务尤其有效^[32]。在本实验中，虚拟模型是通过网络画板中最基本的点、线、面等几何元素来模拟的实物棱锥/棱柱；而实物材料由于可用性很广，部分学生并不专注于将其应用在数学探究活动中。另外，学生可通过网络画板与几何体进行交互，包括拖动、旋转、放大、缩小等，这种较实物工具更为丰富的交互体验可以帮助学生将习得的知识保留的更久。因此，网络画板有助于探究学习的优势在于能提供降低外部认知负荷的视觉呈现，帮助学生投入更多的相关认知负荷用于处理新知识，以及提供丰富的交互体验。

在仅能提供观察探究环境的情形下，网络画板和实物工具均有助于学生的即时学习效果，师生可依实际情况进行选择。由于网络画板比实物工具更有助于学生的知识保留，所以在仅能观察的探究条件下，更鼓励师生采用网络画板这类动态数学系统进行学习。例如，针对义务教育课程标准中有关“图形与坐标”的相关内容，鼓励师生基于网络画板观察坐标系中图形进行探究学习。针对普通高中数学课程标准中有关“几何与代数”的内容，鼓励师生借助网络画板进行数形结合等探究学习活动，通过变量滑块的控制，直观观察图像变化趋势及规律。

4.3.3 在网络画板中探究时，构造策略比观看策略带来的学习效果更积极

实验结果显示，与在网络画板中运用观察策略进行探究的学生相比，在网络画板中运用构造策略进行探究的学生取得了更好的后测成绩和延迟后测成绩。这一结果验证了研究假设 3 的内容，即与运用观察策略使用网络画板进行数学探究学习相比，运用构造策略使用网络画板进行数学探究活动后，学生在即时学习效果、知识保持和学习兴趣方面的表现更好。

从构造法的角度看，探究活动中的构造操作涉及上位同化模式和猜想类比等思维方法，这些过程均有助于知识的学习和保持^[75]。从具身认知的角度看，知识的表征、存储以及迁移都离不开感觉运动的体验，而运动参与量和手势内容一致性又能加深具身程度，同时有助于知识的稳固^[86]。就网络画板环境而言，除了可以借助其观察不同的几何物体外，网络画板还支持学生基于几何元素通过几何变换去构造几何体，其中会涉及到丰富的交互以及与内容相似的操作动作，可以帮助学生进行有效的认知输入，从而提高学习效果。在本实验中，观察策略下与几何对象的交互主要是指学生通过鼠标拖动和旋转来观察棱锥/棱柱；而在构造策略下，学生使用鼠标勾画点、线、面，然后通过平移或旋转这些元素来建构棱锥/棱柱，与观察策略的情况相比，所涉及的与几何对象的交互（手势和动作）明显更加丰富、更加深入。显然，与网络画板观察组相比，构造组学生在网络画板中的操作动作和交互功能更多。因此，在网络画板环境中，采用构造策略进行概念性知识的探究学习会收获更好的即时学习效果 and 知识保留水平。

在教学实际中，应鼓励教师和学生掌握网络画板这类动态数学系统的使用，尽可能亲自动手，通过构造的方式进行探究活动。例如，针对义务教育课程标准中有关“图形的性质”的相关内容，教师可以引导学生在网络画板中构造各类几何图形，在运动变化中观察、寻找并证明几何图形蕴含的规律与性质。针对普通高中数学课程标准中有关“数学建模和数学探究活动”的内容，鼓励师生基于网络画板这类动态数学系统，可视化自己的思维和想法，完成探究学习

4.3.4 使用网络画板进行数学探究学习能更好的激发和维持情景兴趣

数据分析结果显示，无论是在构造策略还是观察策略前提下，网络画板在激发和维持学生的数学学习兴趣方面都比实物探究工具表现更好；在网络画板环境中，比起观看，通过构造操作能更好的激发和维持学生的学习兴趣。这一结果验证了研究假设 1、2 和 3

中关于学习兴趣的部分。

根据学习兴趣发展的四阶段模型，激发的情境兴趣主要由环境和文本的特征所激发；维持情境兴趣主要由任务的意义和个体的参与所维持^[98]。网络画板环境的特征主要体现在保持几何对象约束关系不变的情况下可以动态拖动对象以比较和观察其中不变的规律，同时还允许使用者与几何对象进行方便快捷的交互，并能即时获得对其操作的可视化响应^[51]。此外，几何元素呈现以及文本呈现具有非常直观的特征。在本次实验中，学生在通过网络画板探究棱锥和棱柱的过程中，能够体验到顺畅且回应即时的交互。特别是采用构造策略使用网络画板进行探究学习的学生，探究过程会有较高的个人参与度。这使得基于网络画板的探究学习激发出学生更高的学习兴趣，并将激发出的兴趣维持得更久。

因此，鉴于学习兴趣对数学学习的重要作用，鼓励师生在课内外使用网络画板这类动态数学系统进行学习和探究。例如，针对义务教育课程标准中有关“综合与实践”的相关内容，教师可引导学生基于网络画板开展具有一定挑战性的趣味任务，进一步激发学生的探究热情和学习兴趣。针对普通高中数学课程标准中有关“数学文化”的内容，鼓励借助网络画板这类动态数学系统，感受数学之美，提升数学学习兴趣。

4.5 本章小结

本章主要包括组织实验对象按照实证研究设计进行实验，收集整理实验数据，用协方差方法和 t 检验分析数据，最后讨论得出实验结论。研究表明，无论是采用观看策略还是构造策略，与实物工具相比，使用动态数学系统对数学探究学习都有更积极的影响。使用动态数学系统时，采用构造策略比采用观看策略更能带来积极的学习效果。研究结论为更好的认知和选择探究工具的提供了实证依据。

第五章 基于网络画板的玫瑰曲线探究学习案例设计

本章主要内容为基于前述章节的实证结论设计玫瑰曲线探究路径。旨在通过构造、观察、推理、验证和表达，让学生的思维在网络画板中沉浸式体验数学知识的生成过程，进一步培养学生的创新意识和实践能力。

5.1 玫瑰曲线概述

5.1.1 玫瑰曲线的历史及应用

玫瑰线作为一条优美有趣又形态多变的封闭曲线，自意大利数学家 Guido Grandi 在 17 世纪首次对其进行研究以来，一直吸引着人们的目光。

如今，玫瑰曲线因其独特的美感和数学特性已被广泛应用于实际的生产生活中。例如，基于玫瑰曲线建构的二步法圆形编织结构具有效率高、成品质量好的优势，加入玫瑰曲线元素的纺织品图案更加丰富有趣，依照玫瑰曲线运动的摆碾由于受力更加均匀而可以更好的保护摆头，融合玫瑰曲线的红外线扫描算法可以实现低误差、高精度以及实时转换的效果。

在数学教育中，因其极强的趣味性和所展现的数学之美与几何之韵，有关玫瑰曲线的话题也逐渐引起了中学数学教育，特别是探究式教学的关注。

5.1.2 玫瑰曲线的探究学习实录

研究人员在广州市某校开展了针对中学生的动态数学探究课程，在“奇妙轨迹”章节中，引导学生在网络画板中通过轨迹和功能构造出四叶玫瑰曲线，如图 5-1 所示。

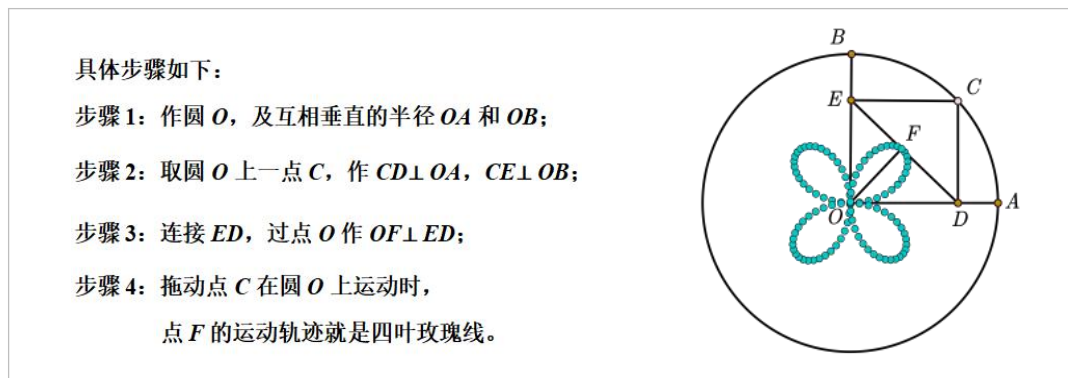


图 5-1 构造玫瑰曲线

在课堂上，完成四叶玫瑰曲线的构造后，有两位学生开始思考，想进一步探究三叶玫瑰曲线、五叶玫瑰曲线甚至有更多叶片数量的玫瑰曲线该如何构造。并且，他们立即在网络画板中作出了有趣且大胆的尝试：

卢同学猜想半径 OA 不垂直于 OB 时可能会出现多叶玫瑰曲线，并尝试构造了互相不垂直的半径 OA 和 OB ，如图 5-2(a)和 5-2(b)所示。结果发现可以出现两对叶片大小不一的玫瑰线，或者是两叶玫瑰线，但没有出现三叶或更多叶片数量的玫瑰曲线。

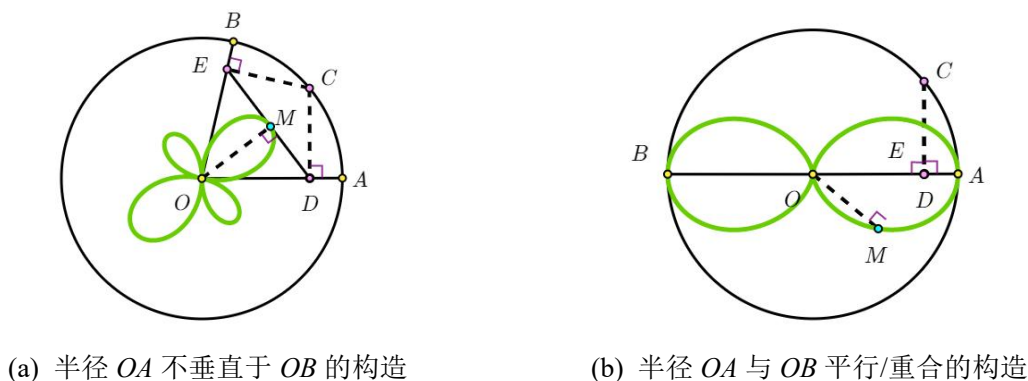


图 5-2 多叶玫瑰曲线的构造尝试 1

何同学猜想把圆 O 换成多边形可能会出现不同叶片数量的玫瑰曲线。于是，他在三角形、四边形、五边形的基础上模仿梯子模型构造方式绘制轨迹，如图 5-3 所示。结果发现叶片形状有变化，叶片中心位置也会影响叶片形状，但叶片数量仍然是 4 片或 2 片。

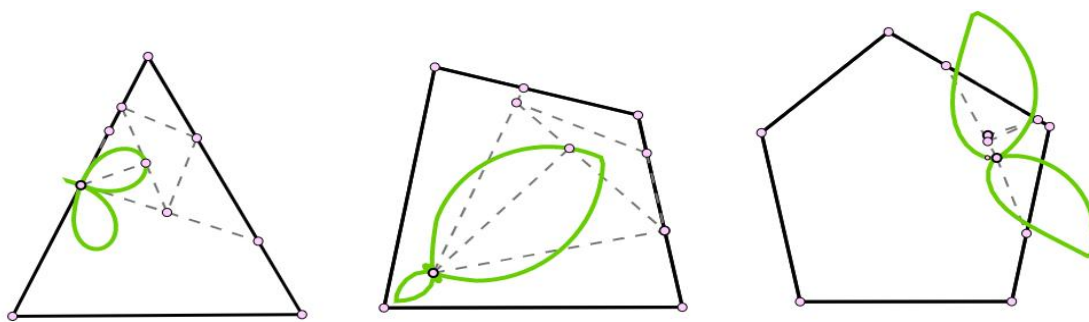


图 5-3 多叶玫瑰曲线的构造尝试 2

尽管结果不如预期，但是学生在动态数学环境中被激发出的探究意识和大胆尝试令人眼前一亮。在网络画板环境中，学生与几何元素可以便捷的进行交互，并且系统对操作有及时的响应，这使得学生可以快速实现并验证自己的猜想，十分有利于学生开展探究活动。因此，有必要围绕在网络画板中探究玫瑰曲线这一主题做进一步的研究，以丰富信息技术促进数学探究学习的实践。

5.2 玫瑰曲线探究现状

根据国内外相关文献记载,在中学阶段,有关玫瑰曲线的探究学习活动主要是利用实物工具或借助信息技术开展,以探究玫瑰曲线叶片数量与方程系数关系为主题,重在锻炼学生的观察、推理以及归纳能力。例如,高云峰设计并提出一个寻找四叶草的 STEM 教学案例,引导学生探究了三叶玫瑰曲线的形成原理,并制作实物画出了三叶玫瑰曲线。徐伟提出了一个用数学软件(Mathcad)探究叶片数与方程系数关系的案例,通过观察不同系数方程对应的有趣图像总结规律^{[100][101]}。Tuyetdong 则进一步深入思考了使用信息技术探究玫瑰曲线的方式,在动态数学系统 GeoGebra 中画出了各种玫瑰曲线,并通过与直角坐标系中的三角函数图像做对比,通过类比的思想方便学生理解极坐标曲线^[102]。

尽管国内外学者进行过诸多有益尝试,但是仍存在一些缺陷。例如,高老师的案例很好地展示了三叶玫瑰曲线的数学本质,并建议学生按照同样的探索方法进一步绘制其他叶片数量的玫瑰曲线,是探究玫瑰曲线的优秀范例。但是,随着叶片数量的增多,原理分析并不简单;另外,由于曲线仪制作的时间和经济成本相对较高,且精确度有限,并不是验证、探索各种玫瑰曲线的高效方法。在徐老师和 Tuyetdong 老师的案例中,主要是通过观察不同的函数图像来探索玫瑰曲线的性质,即在动态数学系统中输入带有系数变量的方程,再调节变量,就能快速绘制出各种图像,便于学生观察规律。虽然通过信息技术快速作图帮助师生节省了精力,但是改变变量后直接显示图像结果的方式,略过了函数图像的绘制过程,使得曲线蕴含的数学本质被掩盖。

综上,在探究玫瑰曲线这一主题的相关教学活动中,信息技术工具的优势并没有充分发挥出来^[103],导致既有的玫瑰曲线探究模式深度不够,没有让学生深入体验数学探究的全过程,存在内容挖掘不充分的遗憾。鉴于玫瑰曲线的趣味性和所体现出的数学之美,研究人员有必要基于前面章节的结论,即在网络画板中采用构造的方式,尝试改进完善玫瑰曲线的探究路径。

5.3 玫瑰曲线构造性探究路径设计

研究人员采用网络画板,以探究玫瑰曲线叶片数量规律为主题,通过构造曲线图像进行观察的方式,设计基于梯子模型引入、求解方程、构造方程图像、完善方程图像的玫瑰曲线探究路径,如图 5-4 所示。

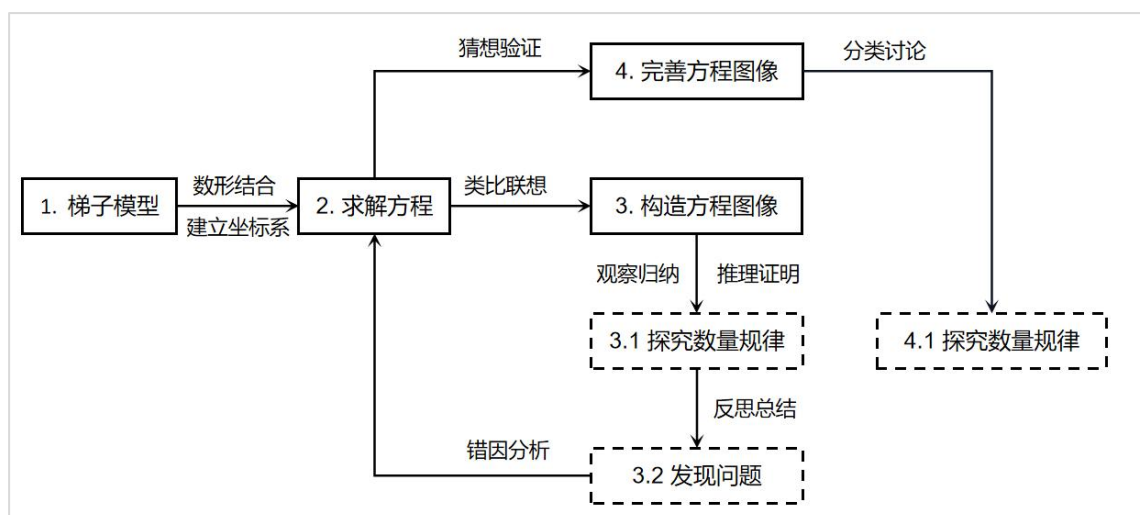


图 5-4 玫瑰曲线构造性探究路径

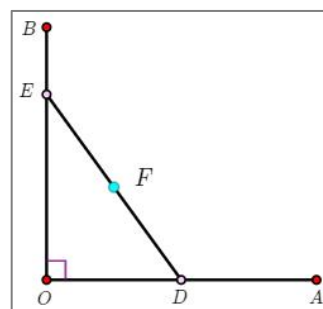
5.3.1 基于梯子模型引入，发现并提出问题

（1）探究木梯滑倒时中点的运动轨迹

通过演示课件，展示木梯沿墙面和地面滑倒的情景，如图 5-5(a)所示，同时提出问题：在滑倒过程中，木梯中点形成的轨迹是什么形状？接下来，学生用数学符号和语言描述情景和问题，在网络画板中尝试抽象出问题的本质并进行构造。例如，将情景问题转化并构造为“线段 OB 垂直于线段 OA ，定长线段 ED 的两端分别在 OB 和 OA 上移动，求线段 ED 的中点 F 的运动轨迹的形状”，如图 5-5(b)所示。



(a) 木梯滑倒 —— 生活场景

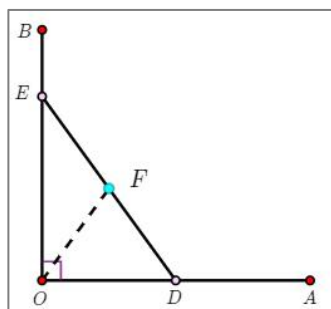


(b) 木梯滑倒 —— 数学抽象

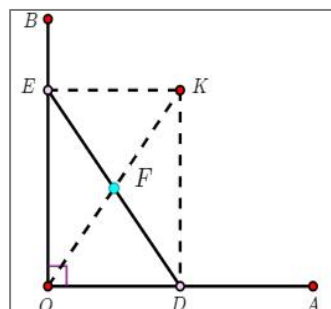
图 5-5 木梯滑倒场景及抽象

在观察、猜想、证明阶段：首先，通过跟踪点 F 的轨迹，拖动点 D 或点 E ，观察、猜想点 F 的轨迹形状；其次，基于猜想带来的启示，在网络画板中进行证明。辅助线添加方法一：连接 OF ，如图 5-6(a)，容易得 $ED=2OF$ ，再由线段 ED 的长度为定值，得线段 OF 的长度也为定值，即点 F 的轨迹为四分之一圆弧。辅助线添加方法二：连接 OF ，并延长 OF 至 FK 等于 OF ，连接 EK 和 KD ，如图 5-6(b)所示，容易证得四边形 $EKDO$

为平行四边形；由 $\angle EOD$ 为直角，得四边形 $EKDO$ 为矩形，即 $ED=OK=2OF$ ；由线段 ED 的长度为定值，得线段 OF 的长度也为定值，即点 F 的轨迹为四分之一圆弧。



(a) 添加辅助线证明一



(b) 添加辅助线证明二

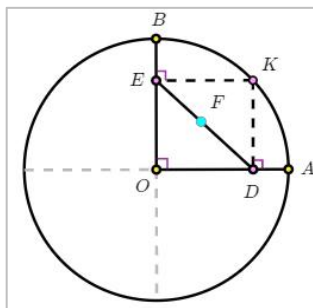
图 5-6 辅助线添加示意

在反思总结阶段，思考发现新问题。在网络画板中，通过分合思考法进行构造，学生们确定了点 F 的轨迹是四分之一圆弧。继续引导学生思考，如果拼凑四个梯子模型能不能构造出一个完整的圆形。

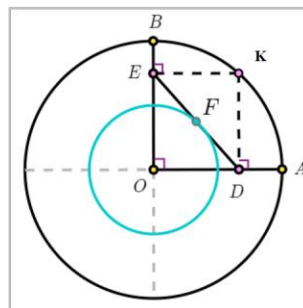
(2) 构造完整梯子模型

由辅助线二的构造方法可得到如下启示并进行猜想。在图 5-6(b)所示几何约束关系下，即长方形 $OEKD$ 的对角线为定长时，点 E 和点 D 在线段 OB 和线段 OA 上的滑动驱动了点 K 做圆周运动。那么反之，在图 5-6(b)所示几何约束关系下，点 K 做圆周运动时也可以驱动点 E 和点 D 在线段 OB 和线段 OA 上的滑动。

在网络画板中尝试构造，实现上述猜想。如图 5-7(a)，首先，作圆 O 以及作互相垂直的半径 OA 和 OB ；其次，取圆 O 上一点 K ，过点 K 做 KD 和 KE 分别垂直于 OA 和 OB ；然后，连接 ED ，并取 ED 中点 F ，如图 5-7(a)所示；最后，当点 K 在圆 O 上运动时， F 点的轨迹形成一个完整的圆形，如图 5-7(b)所示。



(a) 完整梯子模型构造



(b) 完整梯子模型中的圆

图 5-7 完整梯子模型

(3) 探索木梯上不同点的运动轨迹

在网络画板中，通过点值或几何变换很容易构造特殊点。再结合轨迹功能，探究木梯（线段 ED ）上特殊点的运动轨迹也很方便。以下是部分尝试，可供参考：

尝试 1：取线段 ED 的五分之一一点 H ，点 H 轨迹是什么形状？如图 5-8(a)所示。

尝试 2：过点 C 做 CN 垂直于 ED ，垂足 N 的轨迹的形状是什么？如图 5-8(b)所示。

尝试 3：过点 O 做 OM 垂直于 ED ，垂足 M 的轨迹的形状是什么？如图 5-8(c)所示。

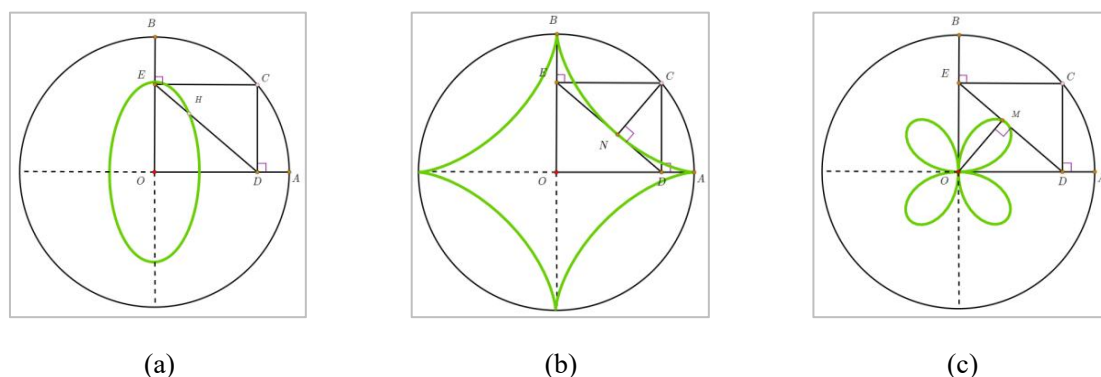


图 5-8 梯子模型上特殊点的轨迹

(4) 以四叶玫瑰曲线为例提出问题。

步骤（1）-（3）的探究操作作为学生的思维热了身，一步一步引导学生认识了梯子模型，初步体验了通过构造进行探究的魅力和乐趣。最后，再次提出新问题：在网络画板中如何构造多叶玫瑰曲线？

5.3.2 数形结合求方程，寻找多叶的关键

(1) 求解四叶玫瑰曲线的方程

鉴于直接通过几何的角度探究玫瑰曲线多叶的原因无果。可以引导学生转换思路，基于数形结合的思想，通过方程入手，寻找问题的关键；再通过构造方程图像来完成在网络画板中构造多叶玫瑰曲线的探究任务。

在梯子模型的基础上，有两种建立坐标系的方式，如图 5-9 所示。一种方式为：以点 O 为原点， OA 为 x 轴， OB 为 y 轴，建立直角坐标系；并设点 F 的坐标为 (F_x, F_y) 、 $\angle AOF$ 为 θ 、圆 O 半径为 R ，经过计算可求得：

$$(F_x, F_y) = \left(\frac{R}{4}(\sin(3\theta) - \sin(-\theta)), -\frac{R}{4}(\cos(3\theta) - \cos(-\theta)) \right) \quad (5-1)$$

另一种方式为：以点 O 为极点， OA 为极径，建立极坐标系；并设 $\angle AOF$ 为 θ 、圆

O 半径为 R , 可求得方程 (2) 或 (3):

$$OF = \frac{R}{2} \sin(2\theta) \quad (5-2)$$

$$OF = \frac{R}{2} \cos(2\theta - \frac{\pi}{2}) \quad (5-3)$$

通过对比, 学生容易发现极坐标系中求得的结果较为简洁, 便于观察, 故接下来的探究基于极坐标系进行。

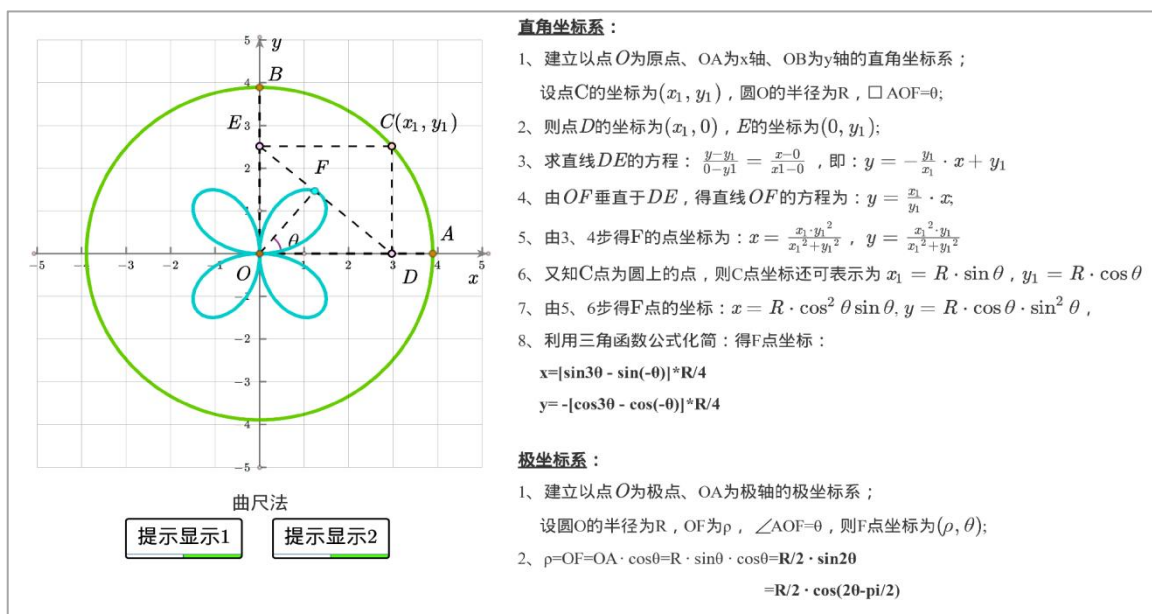


图 5-9 建立坐标系及 F 点坐标求解

(2) 寻找多叶的关键

求解出四叶玫瑰曲线的方程后, 容易发现四叶玫瑰线其实就是极坐标系下的正弦或余弦函数图像。以方程 (5-3) 为基础, 引导学生探究多叶的关键与 θ 的系数、 $\pi/2$ 、或 R 有无关系。

在网络画板中试验, 利用变量和函数功能, 观察极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 的图像, 其中变量 A 、 ω 、 φ 的取值暂设为整数, 如图 5-10 所示。很容易发现 θ 的系数 ω 是曲线多叶的关键。

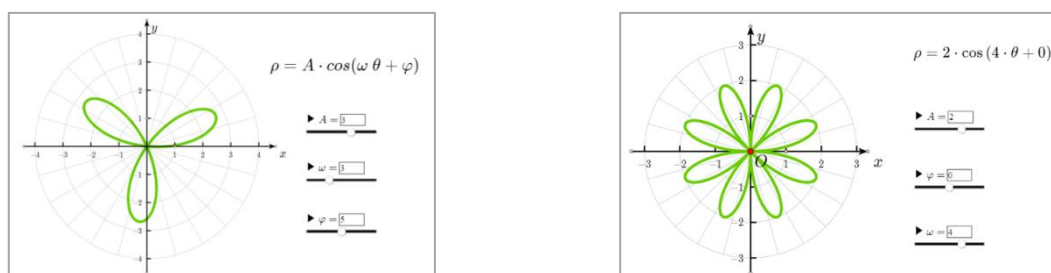


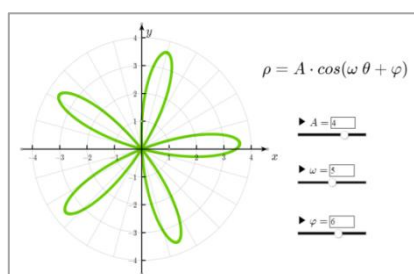
图 5-10 调节方程系数 A 、 ω 、 φ 观察方程图像变化

(3) 完善多叶玫瑰曲线方程系数

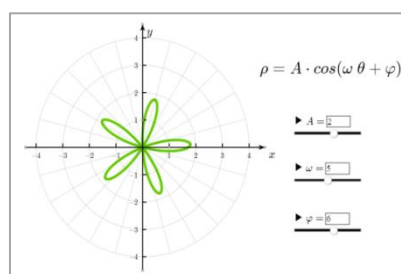
类比直角坐标系中三角函数方程 $y = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 及其图像性质，讨论极坐标系下方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 系数 (A, ω, φ) 的取值范围对函数图像的影响。在网络画板中输入极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ ，并将变量 A, ω, φ 暂时均设为整数，展开以下尝试：

(3.1) 系数 A 对极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 图像的影响

在网络画板中，调节变量滑杆改变系数 A 的大小，观察到系数 A 的变化只是影响叶片的长度，即曲线的大小，如图 5-11 所示。显然， A 取任意非零实数时，都不会影响叶片数量，且保持曲线封闭。



(a) A 值取 4 时的函数图像

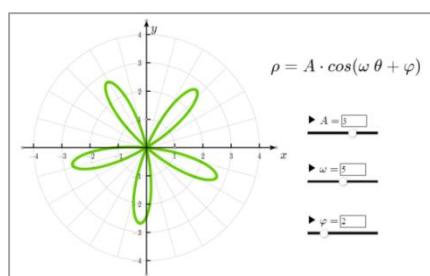


(b) A 值取 2 时的函数图像

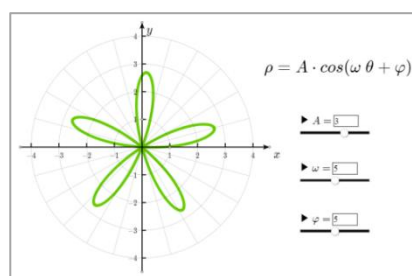
图 5-11 系数 A 取不同值时函数图像的对比

(3.2) 系数 φ 对极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 图像的影响

在网络画板中，调节变量滑杆改变系数 φ 的大小，观察到系数 φ 的变化只是影响叶片的方向，如图 5-12 所示。显然， φ 的取值范围也可以是实数集。另外， φ 的取值与函数图像的对称性密切相关，有兴趣的学生也可就此展开一番探究，本节内容暂不讨论。



(a) φ 值取 2 时的函数图像



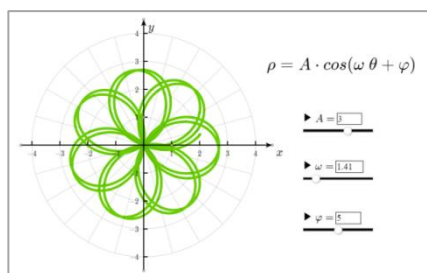
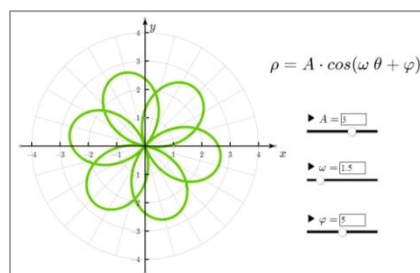
(b) φ 值取 5 时的函数图像

图 5-12 系数 φ 取不同值时函数图像的对比

(3.3) 系数 ω 对极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 图像的影响

在网络画板中，调节变量滑杆改变系数 ω 的大小，观察到曲线叶片数量发生了变化。先将 ω 设置为一个无理数进行观察，比如 $\sqrt{2}$ ，发现无论 θ 如何取值，曲线图像都不封闭，

如图 5-13(a)所示；再将 ω 设置为一个有理数，比如 $\frac{3}{2}$ ，发现图像是封闭曲线，但是叶片有交叠，如图 5-13(b)所示；再由前述例子可知， ω 为整数时，曲线封闭，叶片不交叠。

(a) ω 取 $\sqrt{2}$ 时的函数图像(b) ω 取 $3/2$ 时的函数图像图 5-13 ω 取不同值时的函数图像

为讨论 ω 的取值范围，首先回想直角坐标系中余弦函数 $y = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 图像的周期性性质，通过类比的方式寻找探究答案。已知直角坐标系中，余弦函数中的 ω 主要影响曲线的周期，即 $\theta \in [-\frac{2\varphi+\pi}{2\omega}, \frac{3\pi-2\varphi}{2\omega})$ 时，图像呈现一个完整的波形。那么在极坐标系中，方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 在 $\theta \in [-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{2\pi-\varphi}{\omega})$ 这一个周期内的图像是什么样呢？

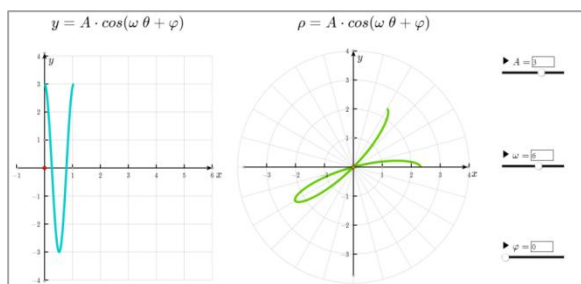
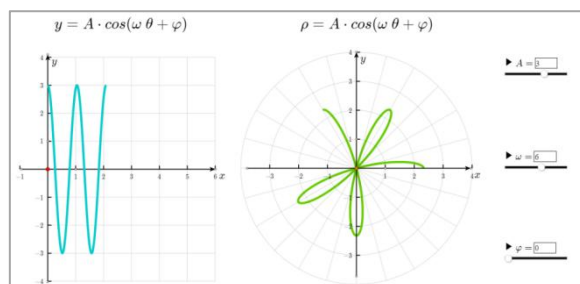
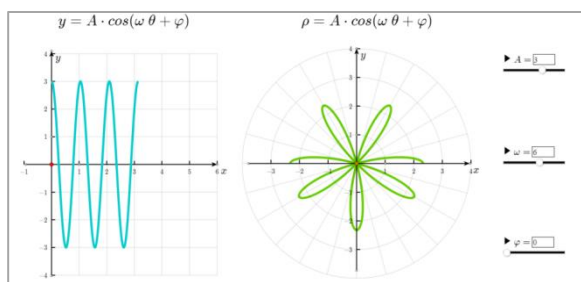
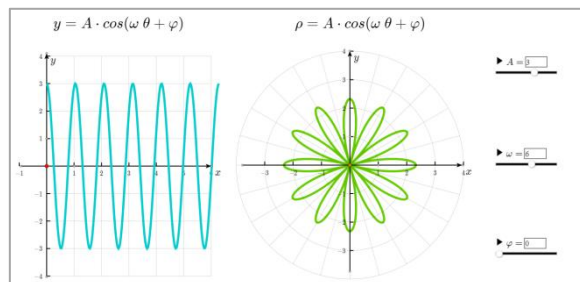
(a) $\theta \in [-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{2\pi-\varphi}{\omega})$ 时函数图像（一个周期）(b) $\theta \in [-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{4\pi-\varphi}{\omega})$ 时函数图像（两个周期）(c) $\theta \in [-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{6\pi-\varphi}{\omega})$ 时函数图像（三个周期）(d) $\theta \in [-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{12\pi-\varphi}{\omega})$ 时函数图像（六个周期）

图 5-14 不同数量周期函数图像对比

如图 5-14 所示，在网络画板中分别建立直角坐标系和极坐标系，输入方程 $y = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 和 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 以及 θ 的取值范围 $[-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{2\pi-\varphi}{\omega})$ 。可以直观看到，在直角坐标系中一个周期的图像，在极坐标系中是“两个叶片”样的图像，如图 5-14(a)。

也容易看出, 叶片的形成和极值有关, 叶片的尖端即函数的极值点所在。接着观察 θ 在两个周期内, 即 $\theta \in [-\frac{\varphi}{\omega}, \frac{4\pi-\varphi}{\omega})$ 时, 直角坐标系和极坐标系下图像的形状, 可以拼凑出“四个叶片”, 如图 5-14(b)。对于极坐标方程 $\rho = 3\cos(6\theta)$ 的图像来说, θ 在六个周期($T = \frac{2\pi}{\omega}$)内形成了完整的玫瑰曲线, 如图 5-14(d)所示。也就是说, 对于一般极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$, θ 在 Q 个 2π 范围内的值等于 P 个周期($\frac{2\pi}{\omega}$)时可保证函数图像封闭, 即 $2\pi Q = \frac{2\pi}{\omega} P$, 且 P 和 Q 为互质的整数。

综上, 由 $2\pi Q = \frac{2\pi}{\omega} P$ 可推导出 $\omega = \frac{P}{Q}$, 且 P 和 Q 为互质的正整数。即极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 的图像为封闭曲线时, ω 的取值应取有理数。为方便后续讨论, 将 ω 写成 $\frac{P}{Q}$ 的形式。

(4) 小结

综上, 本环节基于梯子模型求解了多叶玫瑰线的极坐标方程, 即 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$, 其中 $A \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{Z}$, 且 P 和 Q 互质; 且玫瑰曲线的叶片数量与 $\frac{P}{Q}$ 取值有关。至此, 通过数形结合, 将“在网络画板中构造多叶玫瑰曲线”这一问题转化为“构造极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$ 的图像”。

5.3.3 联想类比, 构造方程图像

(1) 回忆、联想

在直角坐标系中, 方程 $y = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 的图像可以由一个点的圆周运动和直线运动叠加形成, 如图 5-15 所示。那么合理猜想, 极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$ 的图像是否也能由一个点的某些运动叠加而形成呢?

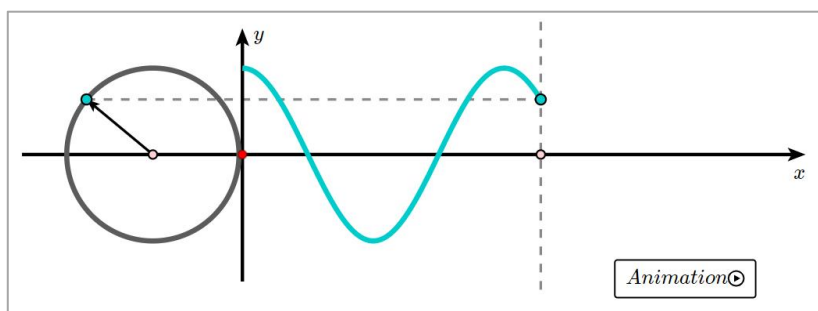


图 5-15 直角坐标系中方程 $y = A \cdot \cos(\omega \cdot \theta + \varphi)$ 的图像

(2) 分析方程

将极坐标方程： $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$ 转换为直角坐标系下的参数方程：

$$\begin{cases} x = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi) \cdot \cos \theta \\ y = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi) \cdot \sin \theta \end{cases} \quad (5-4)$$

通过三角变换整理后，得：

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} [\cos((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) + \cos((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi)] \\ y = \frac{A}{2} [\sin((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) + \sin((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi)] \end{cases} \quad (5-5)$$

分析可以看出其中包含两个圆的参数方程，即：

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) \\ y = \frac{A}{2} \sin((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) \end{cases} \quad (5-6)$$

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi) \\ y = \frac{A}{2} \sin((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi) \end{cases} \quad (5-7)$$

由此可知，多叶玫瑰曲线可以由两个圆周运动叠加而形成。且两个圆周的半径相同、速度不同、相位不同。

(3) 设计构造两个圆周运动叠加的模型

尝试构造圆周运动的叠加。可以在网络画板中构造点 A_1 ，其在以点 O_1 为圆心、 R 为半径的圆周上运动，再构造点 A_2 ，其在以点 O_2 为圆心、 R 为半径的圆周上运动，连接点 A_1 和点 A_2 ，并取线段 A_1A_2 的中点 M ，如图 5-16 所示。那么，当点 A_1 和点 A_2 分别按照参数方程 (5-6) 和 (5-7) 的约束做圆周运动时，点 M 的运动就是两个圆周运动的叠加的效果。

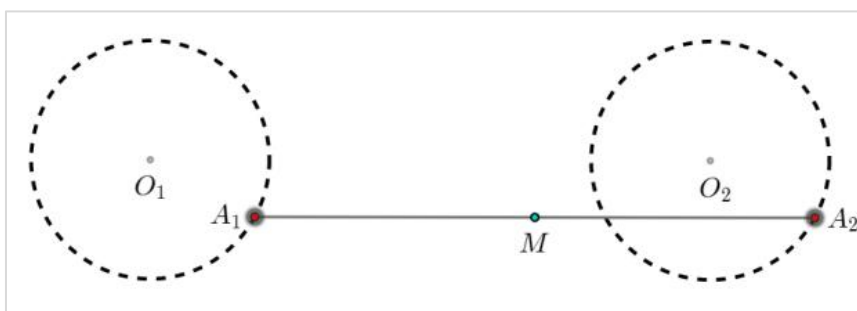


图 5-16 相离的圆周运动模型

按照两个圆周运动的位置关系，即相离、相切、相割三种情况，还可以进一步构造更多的圆周运动叠加的模型。

两个圆周运动相切的模型，可以分为内切和外切，此外还分为无滑滚动和滑动两种

运动情况。即圆 O_r 在圆 O_R 内或外进行无滑滚动和滑动时，圆 O_r 上一点 P 相对于点 O_R 的运动即是两个圆周运动的叠加，如图 5-17 所示。经计算，做无滑滚动时，仅有圆 O_r 在圆 O_R 内滚动，且取圆 O_r 内一点 P 的情况，可以构造出玫瑰曲线。有兴趣的学生可尝试验证，这里其实构造出了摆线和变幅摆线。另，对于滑动的情况，可以形成玫瑰曲线，但是，经分析还可以转化为相割的模型进行构造更为方便。

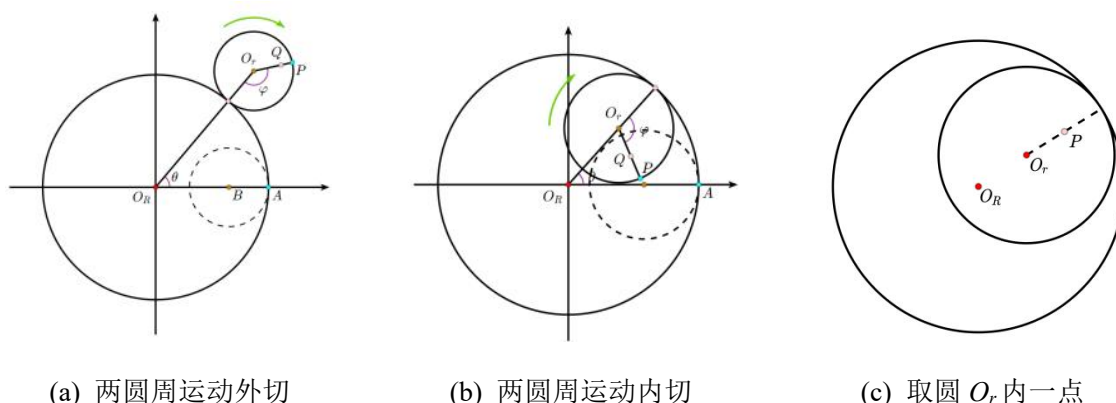


图 5-17 两个圆周运动相切时可能的模型

两个圆周运动相割的模型十分简单明了。只需做半径为 R 的圆 O_1 ，并在圆 O_1 的圆周上取点 O_2 ，再以点 O_2 为圆心作半径为 R 的圆 O_2 ，最后取圆 O_2 上一点 A ，此时，当点 O_2 在圆 O_1 上作圆周运动，点 A 在圆 O_2 上作圆周运动时，点 A 相对于点 O_1 的运动也是两个圆周运动的叠加，如图 5-18 所示。

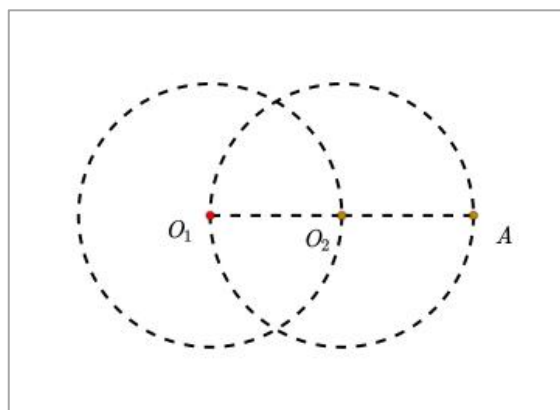


图 5-18 两圆周运动相割时的叠加模型



图 5-19 控制点做圆周运动的参数设置

(4) 在网络画板中构造实现叠加模型

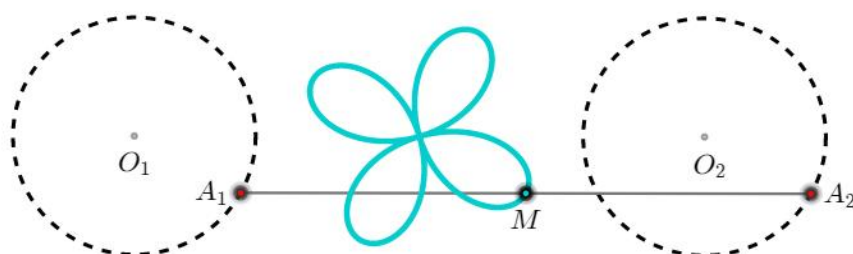
在网络画板中，构造做圆周运动的点很容易，只需要做指定半径的圆，取圆上一点，即可基于点值和动画控制该点做圆周运动。而控制点的运动则是通过点值变量实现的。具体而言，针对圆周运动，点值是弧度制下的圆心角的值；即 θ 可以作为控制圆周运动的变量，如图 5-19 所示。

要实现前述模型，需要思考的是，如何设置参数可以通过动画控制该点做参数方程约束的圆周运动。基于圆周运动参数方程以及图像特征，容易计算出不同圆周运动中 θ 的取值范围，如表 5-1 所示。

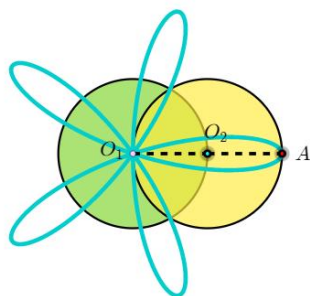
表 5-1 极坐标方程图像与 θ 的取值范围

方程	θ 的取值范围	
	图像有一个完整波形时	图像有 P 个完整波形时
$\rho = A\cos(\frac{P}{Q}\theta + \varphi)$	$\theta \in [-\frac{\varphi Q}{P}, \frac{(2\pi - \varphi)Q}{P}]$	$\theta \in [-\frac{\varphi Q}{P}, \frac{-\varphi Q}{P} + 2Q\pi]$
$\begin{cases} x = \frac{A}{2}\cos((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) \\ y = \frac{A}{2}\sin((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) \end{cases}$	$\theta \in [-\frac{\varphi Q}{P}, -\frac{\varphi Q}{P} + \frac{2\pi(Q+P)}{P}]$	$\theta \in [-\frac{\varphi Q}{P}, \frac{-\varphi Q}{P} + 2\pi(Q+P)]$
$\begin{cases} x = \frac{A}{2}\cos((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi) \\ y = \frac{A}{2}\sin((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi) \end{cases}$	$\theta \in [-\frac{\varphi Q}{P}, -\frac{\varphi Q}{P} + \frac{2\pi(Q-P)}{P}]$	$\theta \in [-\frac{\varphi Q}{P}, \frac{-\varphi Q}{P} + 2\pi(Q-P)]$

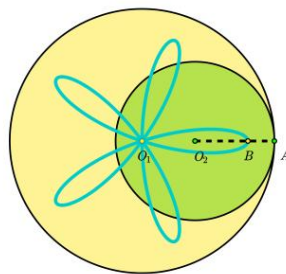
在网画板中，基于不同的模型，输入相应的参数后，使用跟踪或者轨迹功能，就能完成玫瑰曲线的构造。如图 5-20 所示。



(a) 相离模型构造的玫瑰曲线



(b) 相割模型构造的玫瑰曲线



(c) 相切模型构造的玫瑰曲线

图 5-20 基于相离、相割、相切模型构造出的玫瑰曲线

(5) 基于构造出的模型探究系数与叶片数量的对应规律

通过观察构造出来的图像，并进行分类讨论，容易得出方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$ 中 P 和 Q 与图像特征的对应关系，如图 5-21 或图 5-22 所示。

P/Q 为整数时 叶片无交叠	P/Q=0	圆
	P/Q=1	心脏线
	P/Q=奇数	叶片数为 P，大叶小叶相等且重叠
	P/Q=偶数	叶片数为 2P，大叶小叶相等且交替
P/Q 为分数时 叶片有交叠	P < Q	更趋向于球状
	P > Q	趋向于一朵有叶子的花
	P=奇数	P 和 Q 均为奇数时，叶片数为 P
	P=偶数	P 和 Q 有且仅有一个为偶数时，叶片数为 2P

图 5-21 玫瑰曲线叶片数量规律一

P 为偶数	Q 为奇数	叶片不重复	2P 片叶子	周期为 $2Q\pi$
P 为奇数	Q 为奇数	叶片重复	P 片叶子	周期为 $Q\pi$
	Q 为偶数	叶片不重复	2P 片叶子	周期为 $2Q\pi$

图 5-22 玫瑰曲线叶片数量规律二

基于观察到的规律，可进一步推理证明。由于一个完整的玫瑰曲线，至少有 $2P$ 个极值点，于是针对方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$ ，形式化列出所有极值点的极坐标并编号为 0 到 $2P-1$ ，如图 5-23 所示。通过分类讨论易知，当 P 为偶数、 Q 为奇数时，后 P 个极值点和前 P 个极值点的坐标不重合，图像上反应出 $2P$ 个叶片；当 P 为奇数、 Q 为偶数时，前 P 个极值点和后 P 个极值点的坐标不重合，故图像上反应出 $2P$ 个叶片。当 P 为奇数、 Q 为奇数时，前 P 个极值点和后 P 个极值点的坐标重合，图像上反应出 P 个叶片；即，其实图像周期为 $Q\pi$ ；在 $2Q\pi$ 周期内，是生成了 $2P$ 个叶片，只不过重合了一半。

(6) 小结

本环节中，通过联想类比直角坐标系中余弦函数图像的成因，猜想并求解出极坐标系下余弦函数的图像可以由两个圆周运动叠加而成。通过相离、相切和相割三种方式，构造两个圆周运动的叠加。在网络画板中，通过动画和轨迹功能约束半自由点按照玫瑰曲线方程的约束运动，完成了方程图像的构造。观察构造的方程图像后，总结并求证了方程系数 P 和 Q 与叶片数量之间的关系。

极值点序号	极值点极坐标	
0	$(A, -\frac{\varphi}{\omega})$	
1	$(A, \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	
2	$(A, \frac{2\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega})$	
3	$(A, \frac{3\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + \pi)$	
...	P (为偶数)	P (为奇数)
P-1	$(A, -\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + Q\pi + \pi)$	$(A, -\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + Q\pi)$
P	$(A, -\frac{\varphi}{\omega} + Q\pi)$	$(A, -\frac{\varphi}{\omega} + Q\pi + \pi)$
P+1	$(A, \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + Q\pi + \pi)$	$(A, \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + Q\pi)$
...	...	...
2P-1	$(A, -\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} + 2Q\pi + \pi)$	

图 5-23 曲线图像极值点列表

5.3.4 发现新问题完善方程及图像

(1) 发现新问题

通过观察发现有一类玫瑰曲线无法画出，即叶片不交叠、数量为偶数且非四的倍数的玫瑰曲线，如六叶、十叶、十四叶玫瑰曲线等，如图 5-24 所示。

基于已经发现的叶片数量和方程系数之间的关系进行推理，可以发现：叶片不交叠，即 ω 为整数；当 ω 为奇数，根据规律可知叶片数有 ω 个，即叶片数为奇数而非偶数；当 ω 为偶数，根据规律可知叶片数有 2ω 个，即叶片数总是 4 的倍数。所以，目前确实无法画出图 5-24 所示的玫瑰曲线。但是这些曲线又真实存在，那么问题出在哪里呢？

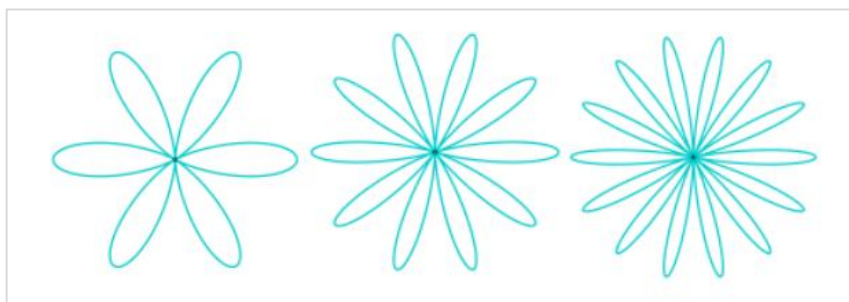


图 5-24 六叶、十叶、十四叶玫瑰曲线

(2) 错因分析

目前能画出一些多叶玫瑰曲线，只是还有一部分无法画出。大胆的猜想，已有的探究方案只是不完善而已。追溯检查探究的每个步骤，直到回到探究的原点——发现图像的绘制是基于方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi)$ 展开的，有可能是因为该方程不够完善，没有囊括玫瑰曲线所有的情况。还是基于类比联想的思想，参照直角坐标系中的三角函数，大胆尝试增加一个常数项来完善方程，即基于方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi) + B$ 构造图像，进而观察探究。

(3) 构造方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi) + B$ 的图像

当然可以直接把方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi) + B$ 输入网络画板，并设置变量 A 、 B 、 P 、 Q 、 B 和 φ 。观察发现，图像比较杂乱，并不方便观察叶片数量和方程系数之间的对应关系。于是，按照之前的探究经验，尝试构造方程的图像来进一步分析和观察。

将极坐标方程 $\rho = A \cdot \cos(\frac{P}{Q} \cdot \theta + \varphi) + B$ 转化为直角坐标系下的参数方程，经过整理可得：

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cdot [\cos((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) + \cos((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi)] + B \cdot \cos\theta \\ y = \frac{A}{2} \cdot [\sin((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) + \sin((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi)] + B \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (5-8)$$

分析发现该方程包含三个圆周运动的参数方程，其中有两个圆周运动的半径相同（即 $\frac{A}{2}$ ），另一个圆周角运动的半径长度正好是参数 B 。即：

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) \\ y = \frac{A}{2} \sin((\frac{P}{Q} + 1)\theta + \varphi) \end{cases} \quad (5-9)$$

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi) \\ y = \frac{A}{2} \sin((1 - \frac{P}{Q})\theta - \varphi) \end{cases} \quad (5-10)$$

$$\begin{cases} x = B \cdot \cos\theta \\ y = B \cdot \sin\theta \end{cases} \quad (5-11)$$

参考太阳、地球和月球的运行模式，容易想到采用圆周运动相割的形式来构造方程图像，以 $A/2$ 为半径作圆 O_1 ；在圆 O_1 的圆周上取点 O_2 ，以点 O_2 为圆心、 $A/2$ 为半径做圆 O_2 ；在圆 O_2 的圆周上取点 O_3 ，以点 O_3 为圆心、 B 为半径做圆 O_3 ；再取圆 O_3 上一点 P ；最后分别设置点 O_2 、点 O_3 以及点 P 的参数使之按照方程（5-9）、（5-10）、（5-11）的约束进行圆周运动，如图 5-25，此时点 P 相对于点 O_1 的运动是三个圆周运动的叠加。

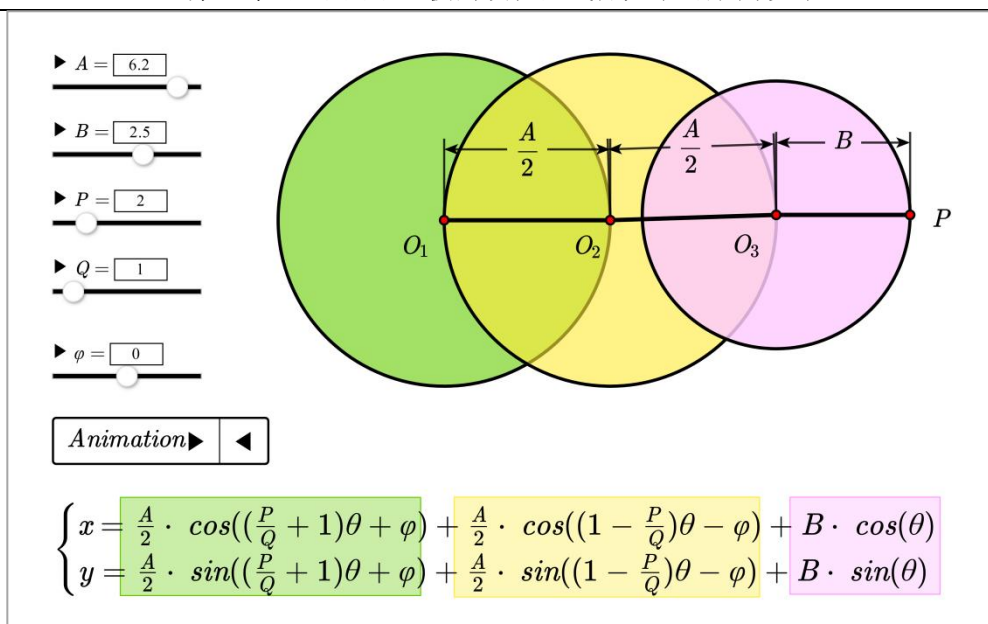


图 5-25 改进的曲线构造模型

(4) 观察构造的方程图像，探究叶片数量规律

通过观察曲线生成过程，可以直观感受叶片的形成规律。容易发现，曲线的极大值为三个圆周运动的半径之和，即 $A+B$ ；而曲线的极小值半径之差，即 $B-A$ 。以 $P=3$, $Q=1$ 为例，如图 5-26 所示，进一步观察发现，当 $B>A$ 时，曲线中心不聚集，如图 5-26(a) 所示；当 $B=A$ 时，曲线中心聚为一点，如图 5-23(b) 所示；当 $B<A$ 时，曲线极小值越过中心点，形成反向叶片，如图 5-26(c) 所示。

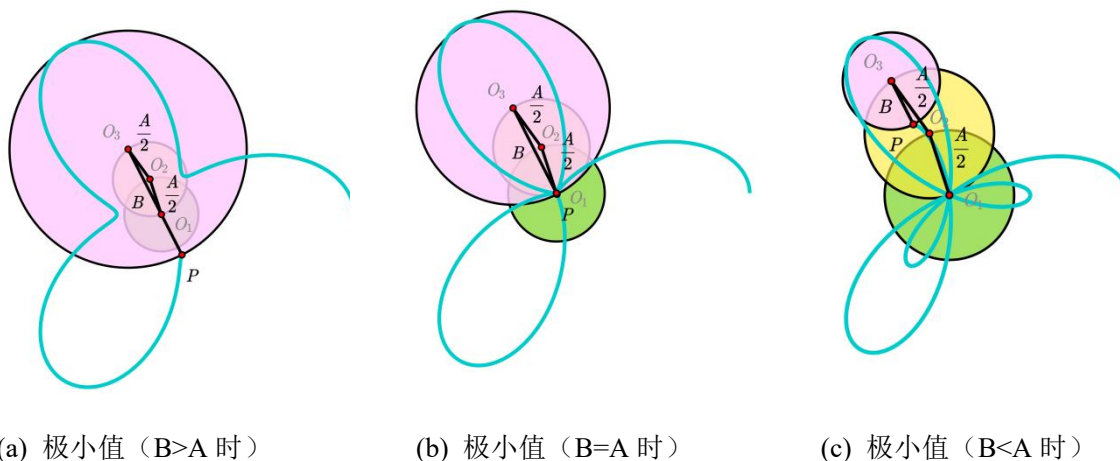


图 5-26 玫瑰线图像极值形成原理

因此，通过构造图像并观察，可以以 A 和 B 的大小为分类依据，总结归纳方程系数和图像叶片数量的规律，从而得到了更为完善的归纳总结，如图 5-27 所示。基于这样的规律，同学们可以做到“随心所欲”绘制曲线，在看到繁复美丽的图案时多一层数学的思考，也多一份额外的乐趣。

		$ A \leq B $	$ A > B $	$ B = 0$
P/Q 为整数	P/Q 为奇数	P 个叶片	2P 个叶片	P 个叶片
	P/Q 为偶数	P 个叶片	2P 个叶片	2P 个叶片
P/Q 为分数	P 为奇数且 Q 为奇数	P 个叶片	2P 个叶片	P 个叶片
	P 或 Q 仅有一个为偶数	P 个叶片	2P 个叶片	2P 个叶片

图 5-27 改进的玫瑰曲线叶片数量规律

并不难发现叶片不交叠的六叶、十叶、十四叶玫瑰曲线应该如何绘制，即取 $A=B$ ， $Q=1$ 时， P 取 6、10、14 即可，如图 5-28 所示。

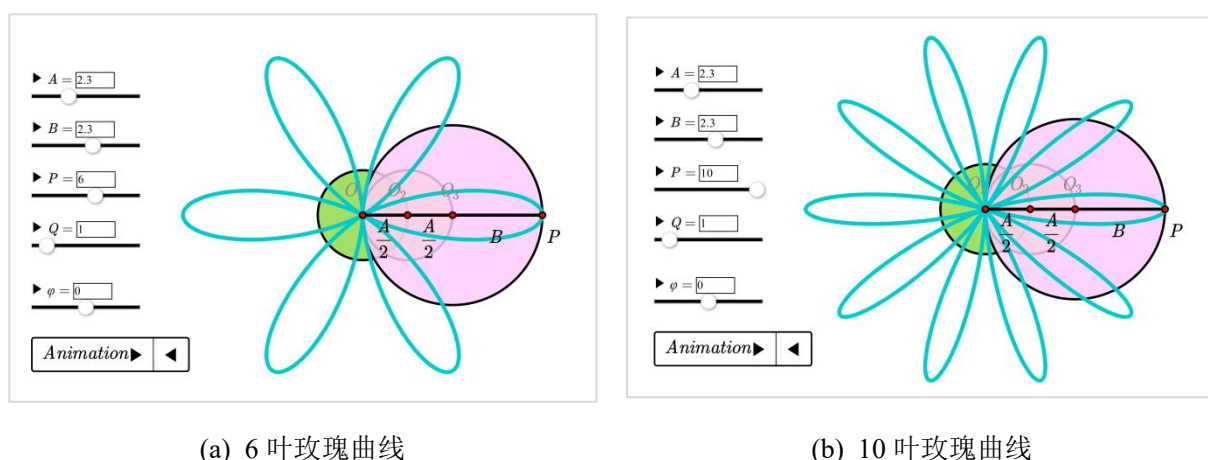


图 5-28 多叶玫瑰曲线的构造

（5）小结

本环节基于发现的问题，通过错因分析，进一步完善了玫瑰曲线的构造。用已有的探究经验构造出了广义玫瑰曲线，并讨论归纳了更为完善的叶片数量与方程系数的关系。

5.4 本章小结

本章内容梳理了玫瑰曲线的探究价值，分析了玫瑰曲线的探究现状。基于前述章节的研究结论，即在网络画板中采用构造策略进行探究有利于提升学生的学习效果，研究人员围绕玫瑰曲线方程系数和图像叶片数量之间的关系这一主题进行了研究和设计。在网络画板中的玫瑰曲线探究路径包括：情景引入、求解方程、构造方程图像以及完善方程图像四个步骤，其过程涉及猜想、假设、类比、推理、错因分析等探究思想和探究方法。详细的探究过程为落实理论观点和启发教学实践提供了有价值的参考。

第六章 总结与展望

6.1 研究总结

信息技术对数学学科教学的影响势不可挡，而基于动态数学系统的探究学习是当下的研究热点^[8]。现有相关研究表明：与实物探究工具相比，使用动态数学系统对中学生探究学习效果的影响仍存在争议^[41]；我国学者进行的相关研究中，以思辨研究法居多，实证研究相对匮乏^[13]；针对探究性强的优质案例内容（如玫瑰曲线），尚缺乏完整、深入的探究路径设计^[100]。围绕现有研究的争议点、不足之处以及实践不均衡。本文主要工作如下：

（1）为了考察网络画板对中学数学探究学习的影响（研究问题 1），以及如何使用网络画板有助于中学数学探究学习（研究问题 2），本文通过梳理构造思想^[76]、具身认知^[84]、认知负荷^[87]以及学习兴趣四阶段^[99]等理论观点，设计了准实验研究方案。通过前测、后测、延迟后测以及学习兴趣问卷评价不同干预条件下学生的学习效果。创新之处在于，细分为构造策略和观察策略两种探究情景，以实物探究工具为对照，分别考查使用网络画板进行数学探究活动后学生的表现，以此回答研究问题 1；通过对比在网络画板中使用构造策略和使用观看策略对学习效果的影响，回答研究问题 2。此项工作细化了基于信息技术进行数学探究学习的相关研究，有助于更全面地了解学习工具对探究学习效果影响的本质，从而使教师和学生能够做出更有效、更准确的选择。同时一定程度上补充了实证研究相对缺乏的不足。

（2）实施实验方案，收集并分析数据，得出结论。本研究共组织了 131 名七年级学生参与实验，随机分配到 4 个干预组分别进行探究学习，用时三个月完成了实验。其中，A 组学生在网络画板系统中通过构造多棱锥和多棱柱进行探究，B 组学生通过观察网络画板课件中预先制作好的虚拟模型进行探究，C 组学生通过观察棱锥和棱柱的实物模型进行探究，D 组学生用超轻黏土和小竹签制作实物棱锥和棱柱进行探究。本研究运用协方差分析和 t 检验对收集的实验数据进行分析。结果显示，关于研究问题 1：在构造策略情景下，使用网络画板探究的学生取得了更好的即时学习效果、更高的知识保留水平和更强的学习兴趣；在观察策略情景下，两种工具对学生的即时学习效果影响相当，但使用网络画板探究的学生知识保留水平更高、学习兴趣更强。关于研究问题 2：相比在网络画板中观察，通过构造探究的学生成绩进步更快，且在高级几何思维水平上具有

更高的知识保留程度，学习兴趣也激发和维持得更好。此项工作为该领域相关研究提供了实证证据，证明网络画板对学生探究学习有积极的影响；比起观看策略，采用构造策略使用网络画板是更佳的方式。

(3) 基于研究问题 1 和 2 得出的研究结论，研究人员在网络画板中采用构造策略设计了较为完整的玫瑰曲线探究路径。具体包括以探究玫瑰曲线方程系数和图像叶片数量关系为主题，在情景引入环节，通过抽象思维和发散思维等深挖梯子模型的本质和潜力；在求解方程环节，通过数形结合等思维转换问题寻求解决方案；在构造方程图像环节，通过类比联想进行拆解构造，并观察、归纳、表达、验证叶片数量规律；在完善方程图像环节，体验错因分析等循环式探究过程。该探究路径充分发挥了信息技术辅助数学探究学习的优势，可以让学生经历探究数学知识的全过程，培养其探究能力、锻炼其追求真理的意志，为培养学生创新思维和能力提供有价值的教学参考。

6.2 研究不足

尽管本研究工作取得了一定的成果，但仍然存在一些局限：

(1) 实验数据收集仅限于广州市的一所中学。虽然该校各方面整体处于中等水平，具有一定的代表性，但仍可能导致研究结果不能在其他教学情景中顺利应用。

(2) 对于学生学习兴趣的培养不是一蹴而就的，在有无兴趣之间反复横跳也是中学生常见的状态。本研究受时间和条件的限制，实验时间较短，研究可靠性有待加强。

(3) 尽管本研究的测量工具是在专家指导下基于已有的测量工具改编而成，并通过了信效度检验，但试题量较小，题目也较为单一，对学习效果的测量仍可能不够全面。

(4) 针对玫瑰曲线的探究因涉及到极坐标系等知识，对于中学生来说具有一定的挑战性，这为通过实证方式验证探究路径的有效性增加了难度。

6.3 研究展望

网络画板支持下的数学探究学习对创新人才的培养有重要意义。本研究提供了一些可参考的建议，但仍然存在继续探索的空间。未来的研究可从以下几个方面展开：

(1) 增加样本容量。一方面建议增加参与实验的学生数量，另一方面，建议在不同地区取样，进一步加强样本的代表性。

(2) 延长实验周期。建议和专家以及一线教师合作，设计并实施时间跨度长，内容更丰富的实验方案，以加强研究结果的说服力。

(3) 采用多样化的测量工具。建议采用眼动跟踪技术等先进技术，以多元化的方式评价学习效果，从而提高测量结果的稳健性。

(4) 可选取拔尖人才培养对象，运用实证研究进一步验证玫瑰曲线构造性探究路径的优势与不足，并进一步拓展玫瑰曲线的探究路径。本研究提出的探究路径还有较大扩展空间，如可进一步探究借助玫瑰线实现 N 等分任意角、探究花朵曲线的绘制等等。另外，借助该探究路径，有助于学生制作相应的实物装置，因此还可作为 STEM 活动的前置课程。今后的研究与实践工作可对此做出进一步的探索。

参考文献

- [1] 杨怡, 梁会芳, 张定强. “数学探究”研究二十年: 回顾 经验 展望[J]. 数学教育学报, 2020, 29(6): 40-45.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 4-10.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 34-36.
- [4] NCTM. Principles and standards for school mathematics[S]. Chicago: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
- [5] 廖运章, 王华娇. 英国数学英才选拔考试 MAT 命题技术分析[J]. 数学教育学报, 2016, 25(03): 34-37.
- [6] 马峰. 国际文凭数学课程改革的特点分析及其启示[J]. 比较教育学报, 2021, 03: 150-163.
- [7] Teig N, Scherer R, Olsen R V. A systematic review of studies investigating science teaching and learning: over two decades of TIMSS and PISA[J]. International Journal of Science Education, 2022, 44(12): 2035-2058.
- [8] 陈算荣, 庞佳. 中学数学教学研究三十年概况与热点追踪[J]. 教学与管理, 2022, 24: 42-46.
- [9] 祝智庭, 林梓柔, 闫寒冰. 新基建赋能新型教育公共服务平台构建: 从资源平台向智慧云校演化[J]. 电化教育研究, 2021, 42(10): 31-39.
- [10] 孙彬博, 郭衍, 曹一鸣. 信息技术与数学教学“深度融合”: 理想与现实[J]. 教育研究与实验, 2019, 05: 45-50.
- [11] 郭衍, 曹一鸣. 高中数学课程中信息技术使用的国际比较——基于中国等十四国高中数学课程标准的研究[J]. 中国电化教育, 2016, 05: 119-125.
- [12] 张景中. 关注基础性教育软件产业的成长[J]. 中国科技产业, 2022, 07: 1-2.
- [13] 蒋培杰, 牛伟强, 熊斌. 国内信息技术与数学教学融合研究述评[J]. 数学教育学报, 2020, 29(04): 96-102.
- [14] 李敏. 基于 GeoGebra 的高中数学探究式教学研究[D]. 上海师范大学, 2022.
- [15] 刘建军. “探究学习”的两种实践模式辨析[J]. 上海教育科研, 2022, 02: 65-70.

- [16] 刘云. 高中数学教科书中探究内容的应用策略[J]. 教学与管理, 2016, 34: 61-63.
- [17] 尚颖异. 基于 STEM 理念的数学探究式教学模式的实践研究[D]. 江西师范大学, 2020.
- [18] 蒋彬. 高中数学合作探究式学习模式的教学探讨[J]. 科学咨询, 2020, 28: 292.
- [19] Li J. Discussion in inquiry-based learning (IBL)[J]. International Journal of Education and Management, 2021, 6(3): 140-141.
- [20] Lu K, Pang F, Shadiev R. Understanding the mediating effect of learning approach between learning factors and higher order thinking skills in collaborative inquiry-based learning[J]. Educational Technology Research and Development, 2021, 69: 2475-2492.
- [21] 刘西燕. 初中数学探究式课堂教学评价指标体系研究[D]. 南宁师范大学, 2022.
- [22] 朱哲民. 小学数学探究教学 SIRA 评价维度建立的尝试[J]. 教育教学论坛, 2020, 40: 88-89.
- [23] 苏洪雨. 基于问题设计的数学微探究评价体系构建[J]. 数学教育学报, 2019, 28(01): 19-24.
- [24] 宁连华. 数学探究教学中的“滑过现象”及其预防策略[J]. 中国教育学刊, 2006, 9: 47-48, 58.
- [25] 侯立伟. 信息技术利于数学实验的开展[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1): 99-100.
- [26] 温建红. 基于数学核心素养培养学生提出问题能力的意义与策略[J]. 数学教育学报, 2023, 32(03): 13-17.
- [27] Ramlee N, Rosli M S, Saleh N S. Mathematical HOTS cultivation via online learning environment and 5E inquiry model: Cognitive impact and the learning activities[J]. International Journal of Emerging Technologies in Learning, 2019, 14(24): 140.
- [28] Huang L, Doorman M, van Joolingen W. Inquiry-based learning practices in lower-secondary mathematics education reported by students from China and the Netherlands[J]. International Journal of Science and Mathematics Education, 2021, 19(7): 1505-1521.
- [29] Murphy C, Abu-Tineh A, Calder N, et al. Teachers and students' views prior to introducing inquiry-based learning in Qatari science and mathematics classrooms[J]. Teaching and Teacher Education, 2021, 104: 103367.

- [30] 赵维坤, 董林伟. 初中数学实验工具的开发与利用[J]. 数学通报, 2018, 57(11): 5-8.
- [31] 叶蓓蓓, 冯绵绵. 实物化、电子化到信息化: 新中国小学数学教具的演变[J]. 课程.教材.教法, 2019, 39(07): 68-75.
- [32] 王辞晓. 虚拟教具对实体教具的替代和超越: 基于具身认知的视角[J]. 电化教育研究, 2020, 41(12): 50-58.
- [33] 陈文瑜. 基于虚拟教具的高中数学探究活动研究[D]. 上海师范大学, 2020.
- [34] Bouck E, Long H, Bae Y. Exploring the virtual-representational-abstract instructional sequence across the learning stages for struggling students[J]. Behavior Modification, 2023, 47(3): 590-614.
- [35] Yuan Y, Lee C Y, Wang C H. A comparison study of polyominoes explorations in a physical and virtual manipulative environment[J]. Journal of Computer Assisted Learning, 2010, 26(4): 307-316.
- [36] Baki A, Kosa T, Guven B. A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers[J]. British Journal of Educational Technology, 2011, 42(2): 291-310.
- [37] Yilmaz G K. The effect of dynamic geometry software and physical manipulatives on candidate teachers' transformational geometry success[J]. Educational Sciences: Theory and Practice, 2015, 15(5): 1417-1435.
- [38] Bokosmaty S, Mavilidi M F, Paas F. Making versus observing manipulations of geometric properties of triangles to learn geometry using dynamic geometry software[J]. Computers & Education, 2017, 113: 313-326.
- [39] Md Sullah R, Ismail N H, Abdullah A H. A comparison between virtual and physical manipulatives in geometry learning for standard 2 mathematics[J]. Man in India, 2017, 97(17): 235-247.
- [40] Disbudak O, Akyuz D. The comparative effects of concrete manipulates and dynamic software on the geometry achievement of fifth-grade students[J]. International Journal for Technology in Mathematics Education, 2019, 26(1): 3-20.
- [41] Ng O L, Shi L, Ting F. Exploring differences in primary students' geometry learning

- p>outcomes in two technology-enhanced environments: dynamic geometry and 3D printing[J]. International Journal of STEM Education, 2020, 7: 1-13.
- [42] 张景中, 葛强, 彭翥成. 教育技术研究要深入学科[J]. 电化教育研究, 2010, 02: 8-13.
- [43] Rao Y S, Zhang J Z, Zou Y, et al. An advanced operating environment for mathematics education resources[J]. Science China. Information Sciences, 2018, 61(9): 098102.
- [44] 管皓, 秦小林, 饶永生. 动态数学数字资源开放平台的研究与设计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2019, 51(5): 14-22.
- [45] Goldman R, Schaefer S, Ju T. Turtle geometry in computer graphics and computer-aided design[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(14): 1471-1482.
- [46] Yerushalmy M, Houde R A. The geometric supposer: Promoting thinking and learning[J]. The Mathematics Teacher, 1986, 79(6): 418-422.
- [47] Zambak V S, Tyminski A M. Examining mathematical technological knowledge of pre-service middle grades teachers with Geometer's Sketchpad in a geometry course[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2020, 51(2): 183-207.
- [48] Seo H, Lee K. Comparative study of the effects in using Geofix and Cabri 3D on folding nets' activities[J]. The Mathematical Education, 2021, 60(2): 159-172.
- [49] 王鹏远. 数学教育技术的应用与创新研究[M]. 广西教育出版社, 2010: 1-20.
- [50] 贺艳伟. 通过物理模型构建与拓展,发展科学思维——几何画板辅助演示同源粒子在匀强磁场中的运动规律[J]. 物理教学, 2020, 42(07): 34-38.
- [51] 管皓, 秦小林, 饶永生, 等. 基于 Web 的动态几何软件领域模型及其应用[J]. 计算机应用, 2020, 40(04): 1127-1132.
- [52] Guan H, Rao Y S, Zhang J Z, et al. Method for processing graph degeneracy in dynamic geometry based on domain design[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2021, 36: 910-921.
- [53] 赵海清, 张传军, 侯先融, 等. 网络画板与数学课程教学深度融合探析[J]. 贵州师范学院学报, 2023, 39(06): 79-84.
- [54] Gao Y. An exploration on the teaching practice of "preliminary geometry" with

- NetPad [J]. *Frontiers in Educational Research*, 2023, 6(3): 46-52.
- [55] 方王洋. 运用网络画板辅助二次函数的综合实践教学研究[D]. 海南师范大学, 2023.
- [56] 付小华, 幸世强, 代月, 等. 相约两世纪之网络画板与丹德林双球模型——圆锥曲线证明的直观方法[J]. *教育科学论坛*, 2022, 22: 52-54.
- [57] 布合丽切木·阿布都克热木. 网络画板在少数民族学生学习参数几何意义的教学实验[D]. 华东师范大学, 2023.
- [58] 杜佳佳. 应用网络画板培养小学生几何直观能力的教学策略研究[D]. 新疆师范大学, 2022.
- [59] 李赵容. 基于网络画板培育高中生直观想象的教学实验研究[D]. 贵州师范大学, 2021.
- [60] 姚瑶. 数学智慧课堂教学促进高中生直观想象素养发展的实践研究[D]. 西南大学, 2023.
- [61] 庞培钦. 基于情景教学的高中生数学思维能力培养策略[D]. 宁夏大学, 2023.
- [62] 巩江源. 网络画板在逻辑推理素养培养中的应用策略研究[D]. 西北师范大学, 2022.
- [63] 李萌. 基于网络画板的小学生数学抽象思维能力培养研究[D]. 沈阳师范大学, 2020.
- [64] 王素媚. 基于网络画板的高中数学数形结合思想教学研究[D]. 海南师范大学, 2021.
- [65] 邱雪莲. 应用网络画板提升学生高阶思维能力的探究[D]. 沈阳师范大学, 2019.
- [66] 徐章韬, 王光明. 教育实践活动对教师核心素养与能力作用机理研究[J]. *基础教育*, 2019, 16(04): 5-12.
- [67] 张景中, 陈如仙, 陆兴华, 等. “互联网+”数学教师 TPACK 能力培训模式研究——以武侯区初中数学教师网络画板培训为例[J]. *数学教育学报*, 2022, 31(05): 1-8.
- [68] 牟天伟, 李建萍, 任炯, 等. 基于深度学习过程的中学数学教师培训策略研究[J]. *重庆第二师范学院学报*, 2022, 35(06): 82-86.
- [69] 唐浩松. 义务教育阶段数学教师网络画板应用能力研究[D]. 华中师范大学, 2023.

- [70] 方海光, 洪心, 孔新梅, 等. 基于课堂交互行为数据的教学教研融合研究——以网络画板和 iFIAS 的数学教学教研应用为例[J]. 中国电化教育, 2022(05): 115-121.
- [71] 张华, 陶涛. “双减”背景下基于网络画板的初中数学高效课堂教学策略探究[J]. 教育科学论坛, 2023, 19: 57-59.
- [72] 樊甜甜. 智慧环境下“网络画板”在初中数学教学的设计与实践研究[D]. 宁夏大学, 2023.
- [73] 袁黎. 深度学习视角下小学五年级数学智慧课堂教学实践研究[D]. 云南师范大学, 2023.
- [74] 方海光, 张旭, 满文琪, 等. 面向深度学习的学科融合逆向教学设计模型研究——以数学与信息科技学科融合为例[J]. 中国教育信息化, 2023, 29(12): 102-109.
- [75] 何忆捷, 熊斌. 中学数学中构造法解题的思维模式及教育价值[J]. 数学教育学报, 2018, 27(02): 50-53.
- [76] 段志贵. 构造:让解题突破思维瓶颈[J]. 数学通报, 2018, 57(09): 53-57.
- [77] Chamberlin S A, Moon S M. Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians[J]. Journal of Secondary Gifted Education, 2005, 17(1): 37-47.
- [78] 陈金慧, 盛群力. 为意义学习设计教学——5 种新学习方式研究综述[J]. 上海教育科研, 2023, 02: 56-62.
- [79] 刘存. 关于构造三角形的教学价值研究[D]. 湖南师范大学, 2014.
- [80] 张洁. 构造法在初中数学竞赛解题中的运用研究[D]. 湖南师范大学, 2012.
- [81] 刘燊, 韩逸雪. 二十一世纪以来国外第二代认知科学研究的热点与未来发展趋势[J]. 心理学探新, 2023, 43(04): 298-307.
- [82] 陈巍. 具身认知向何处去?——兼论第二代认知科学的肇端、愿景与隐忧[J]. 吉首大学学报(社会科学版), 2024, 45(01): 73-84.
- [83] 郑皓元, 叶浩生, 苏得权. 有关具身认知的三种理论模型[J]. 心理学探新, 2017, 37(03): 195-199.
- [84] Lindgren R, DeLiema D. Viewpoint, embodiment, and roles in STEM learning technologies[J]. Educational Technology Research and Development, 2022, 70(3): 1009-1034.

- [85] Duijzer C, Van den Heuvel-Panhuizen M, Veldhuis M, et al. Embodied learning environments for graphing motion: A systematic literature review[J]. *Educational Psychology Review*, 2019, 31: 597-629.
- [86] 王辞晓, 李睿玉, 张慕华. 虚拟实验具身程度及其对学习成效的影响[J]. *开放教育研究*, 2022, 28, 5: 93-104.
- [87] Sweller J. Discussion of the special issue on cognitive load theory[J]. *British Journal of Educational Psychology*, 2023, 93(2): 402-410.
- [88] Paas F, Sweller J. An evolutionary upgrade of cognitive load theory: Using the human motor system and collaboration to support the learning of complex cognitive tasks[J]. *Educational Psychology Review*, 2012, 24: 27-45.
- [89] 马淑杰, 张景斌. 高中学生数学原有知识水平和学习认知负荷对数学课堂学习效率的影响研究[J]. *数学教育学报*, 2021, 30(02): 26-31.
- [90] Wang T, Li S, Tan C, et al. Cognitive load patterns affect temporal dynamics of self-regulated learning behaviors, metacognitive judgments, and learning achievements[J]. *Computers & Education*, 2023, 207: 104924.
- [91] 李爽, 黄治霞, 蔡草原, 等. 混合学习情境下认知负荷对学习投入机制的调节作用[J]. *开放教育研究*, 2023, 29(04): 90-100.
- [92] 王辞晓. 具身认知的理论落地:技术支持下的情境交互[J]. *电化教育研究*, 2018, 39(07): 20-26.
- [93] Glenberg A M. Embodiment as a unifying perspective for psychology[J]. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science*, 2010, 1(4): 586-596.
- [94] 王光明, 李爽. 初中生数学学习非智力因素调查问卷的编制[J]. *数学教育学报*, 2020, 29(01): 29-39.
- [95] Broda M D, Ross E, Sorhagen N, et al. Exploring control-value motivational profiles of mathematics anxiety, self-concept, and interest in adolescents[J]. *Frontiers in Psychology*, 2023, 14: 1140924.
- [96] 赵彩霞. 兴趣导向在数学教学中的引导性分析[J]. *中国教育学刊*, 2023, S1: 89-90.
- [97] Boeder J D, Postlewaite E L, Renninger K, et al. Construction and validation of the interest development scale[J]. *Motivation Science*, 2021, 7(1): 68-82

- [98] 吴洪艳, 刘晓琳. 初中生数学学习兴趣问卷编制与现状调查[J]. 数学教育学报, 2017, 26(02): 50-54.
- [99] Hidi S, Renninger K A. The four-phase model of interest development[J]. Educational Psychologist, 2006, 41(2): 111-127.
- [100] 高云峰. 寻找四叶草: STEAM 案例的设计[J]. 物理教学, 2020, 42(01): 2-4.
- [101] 高云峰, 师保国. 跨学科创新视角下创客教育与 STEAM 教育的融合[J]. 华东师范大学学报(教育科学版), 2017, 35(04): 47-53.
- [102] Phan-Yamada T, Yamada W M. Exploring polar curves with GeoGebra[J]. The Mathematics Teacher, 2012, 106(3): 228-233.
- [103] Sun B, Guo K, Cao Y. The "deep integration" of information technology and mathematics teaching: ideals and realities[J]. Educational Research and Experiment, 2019 (5): 45-50.

附录 1 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(一)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

请将你的答案填写在左栅栏相应的横线处，右侧栏为草稿区。答题时间 20 分钟。

- 1、一个正方体有_____个顶点。
- 2、正方体被某一平面切掉一部分后，最少可能只剩_____个顶点。
- 3、一个正方体有_____条棱。
- 4、总棱长为 24 米的正方体，棱长是_____米。
- 5、一个正方体有_____个面。
- 6、表面积为 54 平方米的正方体，每个面的面积为_____平方米。
- 7、总棱长为 36 米的正方体，表面积为_____平方米。
- 8、一个正方体的表面积扩大 4 倍，它的棱长扩大_____倍。
- 9、一个长方体有_____个顶点。
- 10、长方体被某一平面切掉一角后，最多可能还有_____个顶点。
- 11、一个长方体有_____条棱。
- 12、一个总棱长为 48 米的长方体，高是 4 米，长加宽的和是_____米。
- 13、一个长方体有_____个面。
- 14、长方体的六个面中，最少有_____个面相等。
- 15、体积为 50 立方米的长方体，如果长和宽都是 5 米，那么高为_____米。
- 16、长方体的高是 20 米，底面周长是 12 米的正方形，则体积为_____立方米。

附录 2 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(二)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

请将答案填写在左侧栏相应的横线处，右侧栏为草稿区。答题时间 10 分钟。

- 1、正九棱锥一共有_____个顶点。
- 2、有二十九个顶点的正棱锥是正_____棱锥。
- 3、正十三棱锥一共有_____条棱。
- 4、有十四条棱的正棱锥是正_____棱锥。
- 5、正十九棱锥一共有_____个面。
- 6、有十七个面的正棱锥是正_____棱锥。
- 7、有三十七个顶点的正棱锥一共有_____条棱。
- 8、有二十二条棱的正棱锥一共有_____个面。

附录 3 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(三)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

请将答案填写在左侧栏相应的横线处，右侧栏为草稿区。答题时间 10 分钟。

- 1、正五棱柱一共有_____个顶点。
- 2、有二十二个顶点的正棱柱是正_____棱柱。
- 3、正十三棱柱一共有_____条棱。
- 4、有二十一条棱的正棱柱是正_____棱柱。
- 5、正九棱柱一共有_____个面。
- 6、有二十三个面的正棱柱是正_____棱柱。
- 7、一个有十三个面的正棱柱总共有_____个顶点。
- 8、有二十七条棱的正棱柱总共有_____个面。

附录 4 广州市 XX 学校 2023 年春七年级下数学小测验(四)

班级_____ 姓名_____ 学号_____

请将你的答案填写在左侧栏相应的横线处，右侧栏为草稿区。答题时间 20 分钟。

- 1、正八棱锥一共有_____个顶点。
- 2、有十四个顶点的正棱锥是正_____棱锥。
- 3、正十三棱锥一共有_____条棱。
- 4、有十二条棱的正棱锥是正_____棱锥。
- 5、正七棱锥一共有_____个面。
- 6、有十一个面的正棱锥是正_____棱锥。
- 7、有九个顶点的正棱锥一共有_____条棱。
- 8、有十四条棱的正棱锥一共有_____个面。
- 9、正五棱柱一共有_____个顶点。
- 10、有十六个顶点的正棱柱是正_____棱柱。
- 11、正十一棱柱一共有_____条棱。
- 12、有九条棱的正棱柱是正_____棱柱。
- 13、正六棱柱一共有_____个面。
- 14、有十个面的正棱柱是正_____棱柱。
- 15、一个有七个面的正棱柱总共有_____个顶点。
- 16、有十五条棱的正棱柱总共有_____个面。

附录 5 学习兴趣问卷调查

亲爱的同学，你好！我们想了解您对数学的学习兴趣，针对每个问题，请选择符合你真实感受的选项，并将相应字母填入括号中。我们会对你的选择严格保密，请放心填写。另外，本次问卷调查的结果将不计入任何成绩评估体系，仅为研究分析之用。您的真实反馈对我们非常重要，我们衷心感谢您的合作与支持。

() 1、数学探究课的老师有趣。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 2、数学探究课堂气氛轻松愉快。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 3、数学探究课有趣。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 4、数学探究课堂气氛单调沉闷。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 5、数学探究课堂气氛和谐融洽。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 6、数学探究课上，我容易走神。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 7、我学习本次数学探究内容需要别人的督促。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 8、碰到数学难题我会放弃。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 9、我对数学公式与定理不熟悉。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

() 10、我学习数学就是为了考试。

() A.很不符合 B.不太符合 C. 一般 D. 比较符合 E. 非常符合

附录 6 辅助探究表格

探究正 N 棱锥顶点、棱和面的数量关系

班级_____ 姓名_____ 学号_____

名称	正_____棱锥	正_____棱锥	正_____棱锥	正_____棱锥	正_N_棱锥
顶点数	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个
棱数	_____ 条	_____ 条	_____ 条	_____ 条	_____ 条
面数	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个

探究正 N 棱柱顶点、棱和面的数量关系

班级_____ 姓名_____ 学号_____

名称	正_____棱柱	正_____棱柱	正_____棱柱	正_____棱柱	正_N_棱柱
顶点数	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个
棱数	_____ 条	_____ 条	_____ 条	_____ 条	_____ 条
面数	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个	_____ 个