10.3969/j.issn.1671-489X.2020.15.040

基于网络画板应用的双曲线的简单几何性质教学设计*

◆彭艳梅　侯小华

摘　要 网络画板功能完善，操作便捷，可以为学生提供直观的感知，解决许多数学教学中的难题，有利于学生的学习。利用网络画板进行“双曲线的简单几何性质”的教学，可以使得教学更加直观，帮助学生更好地理解和掌握有关知识内容。

关键词 网络画板；高中数学；双曲线的简单几何性质

中图分类号：G633.6　　**文献标识码：**B

文章编号：1671-489X(2020)15-0040-03

1 前言

网络画板是由张景中院士和其团队在超级画板的基础上开发的国内第一款互联网环境下的理科教学工具。网络画板具有支持多终端、跨平台、操作方便、储存安全等特点，其智能画笔作图方便快捷，功能也更加完善，可以进行动态演示、计算和任意移动等[1]。网络画板可以让抽象的知识变得更加直观，计算更加准确，有效确保数学的严谨性。因此，网络画板受到越来越多数学教师的喜爱，在中学教学中应用日趋广泛。

“双曲线的简单几何性质”从几何和代数两方面研究双曲线的范围、对称性、离心率等内容。有的内容比较抽象，学生难以直观感知，容易与椭圆的简单几何性质混淆。在教学过程中利用网络画板，一方面，教师可以让学生直观地理解知识的产生过程；另一方面，学生通过动手演示或者观察教师的演示，可以对知识产生深刻印象，从而能够很好地理解和掌握“双曲线的简单几何性质”。

2 教学过程

回顾旧知 让学生简单回顾双曲线的标准方程和椭圆的简单几何性质后，引出本节课的课题——“双曲线的简单几何性质”。

探究双曲线的范围 问题：观察双曲线，我们可以知道它的范围，同学们能否从代数的角度出发，得到双曲线的范围？学生通过将双曲线标准方程化为$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$，知$\frac{x^2}{a^2}\geq 1$，即$x^2\geqslant a^2$，所以，双曲线变量$x$的取值范围是$x\geqslant a$或$x\leqslant -a$。随后，教师借助网络画板做动态演示，将$a$作为变量，取值从1～6，让学生观察当$a$变化时，双曲线的范围也随$a$变化。

探究双曲线的对称性 问题：我们从双曲线的图像可以知道它是个对称图形，同学们能否试着类比研究椭圆对称性的方式，得到双曲线的对称性？学生讨论后得到：双曲线是关于x轴、y轴和原点对称的。以关于x轴为例，在双曲线上任取一点$A(x,y)$，那么关于x轴的对称点为$A'(x,-y)$，也满足双曲线的标准方程，因此，双曲线关于x轴对称。用同样的方法可以证明双曲线关于y轴和关于原点对称。

教师再用网络画板进行验证：任取双曲线上的一点，将A作为双曲线上的半自由点，以x轴为对称轴，以A为对称中心，让A在双曲线上运动，可以看到A的对称点A'也在双曲线上。用同样的方式可以验证双曲线关于y轴和原点对称（图1）。

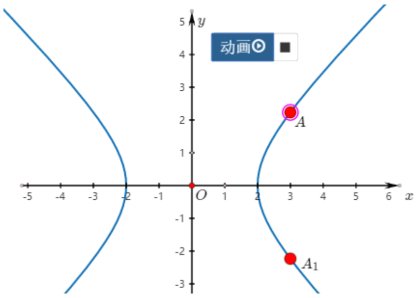

图1

探究双曲线的顶点 问题：以焦点在x轴为例，类比椭圆探究顶点的方式，同学们能否从代数角度求得双曲线的顶点？学生通过计算得到：令y=0，得$x=\pm a$，因此，双曲线与x轴有两个交点A_1（$-a$，0），A_2（a，0）。但是，令x=0，得$y^2=-b^2$，这个方程没有实数根，说明双曲线和y轴没有交点。

探究双曲线的渐近线

问题1：在作$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的图像时，同学们遇到了什

*基金项目：山东省研究生导师指导能力提升项目（课题编号SDYY18139）。

作者：彭艳梅，鲁东大学数学与统计科学学院学科教学（数学）专业，在读教育硕士；侯小华，鲁东大学教师教育学院，副教授，研究方向为数学教育信息技术（264025）。

么问题？学生列表描点后发现：顶点和附近的点能够准确地画出来，但是当双曲线向远处延伸时，就不能准确地画出。

问题 2：同学们能通过对$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$进行变形得到它的渐近线吗？通过教师引导得到：以第一象限为例，变形得到$y^2=\frac{9}{16}$（x^2-16），即$y=\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}<\frac{3}{4}x$，也就是说双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的图像恒在直线$y=\frac{3}{4}x$的下方，且永不相交。根据双曲线的对称性，得到双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$与直线$y=\pm\frac{3}{4}x$无限接近，也就是说$y=\pm\frac{3}{4}x$是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线。

此时，教师利用网络画板验证：作出双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$和$y=\pm\frac{3}{4}x$的图像；在第一象限内取双曲线的一点 A，过 A 做直线$y=\frac{3}{4}x$的垂线，垂足为 B；连接线段 AB，计算线段 AB 的长度；让 A 在第一象限运动，发现当 A 向右上方运动时，线段 AB 无限接近于 0，但永远不等于 0（图 2）。

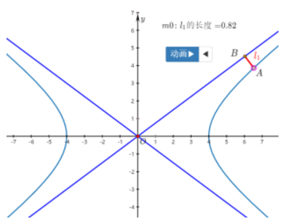

图 2

问题 3：同学们能得到双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线是什么吗？教师引导学生观察渐近线与 a，b 的关系，得到双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线是直线$y=\pm\frac{b}{a}x$。并且，教师可以将 a、b 作为变量，利用网络画板进行动态验证。

问题 4：同学们能试着证明双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线是$y=\pm\frac{b}{a}x$吗？学生讨论后，得到：以第一象限为例，设 D（x，y）是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$第一象限内的点，那么 D 到直线$y=\frac{b}{a}x$的距离$|DE|=\frac{|ay-bx|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b\sqrt{x^2-a^2}-bx|}{c}=\frac{b}{c}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b}{c}\times\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$。当 x 逐渐增大时，$|DE|$就逐渐减少并且无限接近于零，也就是点 D 无限接近于直线$y=\frac{b}{a}x$ [2]。同理，其他象限内也可得到结论：直线$y=\pm\frac{b}{a}x$是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线。

探究双曲线的离心率

问题 1：观察双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$，$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$，$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$的图像，这三个图像在形状上有什么不同？教师通过网络画板作出相应的图像，学生通过对比得到：图像越来越扁。

问题 2：那么双曲线的图像受什么影响呢？教师利用网络画板引导学生探究：首先，固定 b=2，将 a 作为变量，取值范围为 1～6，作出双曲线图像，同时改变 a 的大小，让学生观察双曲线的形状随 a 的变化情况；其次，固定 a=3，将 b 作为变量，取值范围为 1～6，作出双曲线图像，同时改变 b 的大小，让学生观察双曲线的形状随 b 的改变情况（分别如图 3、图 4 所示）。学生通过观察得到：当 a 变大时，双曲线越来越扁；当 b 变大时，双曲线越来越宽。

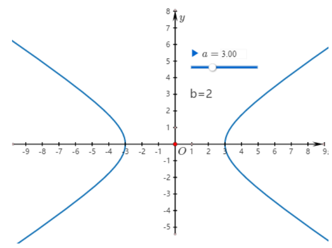

图 3

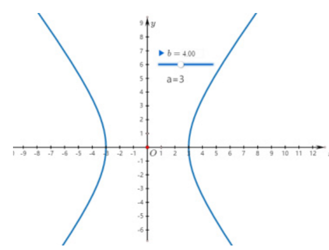

图 4

问题 3：a、b 都能影响双曲线的形状，那么能否统一用同一个式子表示呢？教师引导学生类比探究椭圆离心率的表示方式，得到：可以用 b/a 的比值来表示。教师利用网络画板给学生直观感知：将 a、b 作为变量，取值范围都为 1～6，计算 b/a 的值，观察 b/a 的值对双曲线形状的影响。

问题 4：c/a 和 c/b 的值对双曲线的形状有怎样的影响呢？教师通过网络画板演示：首先，将 a，c 作为变量，a 的取值为 1～6，c 的取值为 2～8，计算 c/a 值，在改变 a，c 值的时候要保证 $c>a$，让学生观察 c/a 的值对双曲线形状的影响；其次，将 b，c 作为变量，b 的取值为 1～6，c 的取值为 2～8，计算 c/b 的值，在改变 b，c 值的时候要保证 $c>b$，让学生观察 c/b 的值对双曲线形状的影响（图 5）。

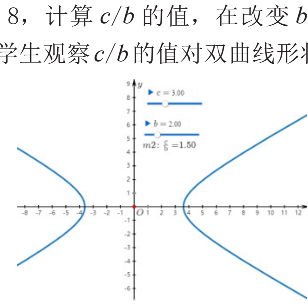

图 5

学生通过观察得到：c/a 越大，双曲线越宽；c/a 越小，双曲线越扁；c/b 越大，双曲线越扁；c/b 越小，双曲线越宽。

问题 5：既然这些比值都可以决定双曲线的扁平程度，为什么用 c/a 来表示离心率呢？教师启发学生得到：因为 a、

10.3969/j.issn.1671-489X.2020.15.042

草图大师软件在地理教学中的应用

◆韩志洋

摘　要　介绍草图大师（SketchUp）软件及其特点，论述其在地理教学中应用的意义，具体分析应用案例，提出应用建议，以期为中学地理教学改革提供借鉴和参考。

关键词　草图大师；SketchUp；中学地理；地理思维能力

中图分类号：G633.55　　**文献标识码**：B

文章编号：1671-489X(2020)15-0042-03

1 前言

在以往的地理教学中，教师主要是依照教材进行教学，教材之中虽然配有一定的插图和图例，但是还是以文字为主，学生学起来枯燥，很多抽象复杂的天体知识难以理解。虽然通过多媒体PPT课件可以弥补一定的不足，但是教学效果依旧不是很理想。草图大师（SketchUp）是近年来在建筑工程、规划设计领域兴起的一款软件，可以绘制三维立体图形，在地理教学中若能充分有效地利用草图大师软件，可实现意想不到的教学效果。

2 草图大师软件及其特点

草图大师是一款专为工程设计研发的软件，近年来得到广泛应用。与3DMAX相比，草图大师融合了手绘草图和工作模型两种功能，具有以下特点。

1）安装方便。草图大师软件在2006年被谷歌收购后，才成为免费使用的软件。与其他绘图软件相比，草图大师大约只有50 MB的源程序，因此通过U盘就可以随意携带。在地理课程教学中，若是用草图大师软件进行教学，教师不到一分钟就可以完成软件的安装，这就为教学使用提供了极大便利[1]。

2）上手容易。相比较于其他绘图制图软件，草图大师无疑是比较容易上手的一款软件，一般只需要掌握界面中推拉、线条绘制等几个基本命令，就可以进行绘图操作。在地理教学中，无论是地理教师教学使用，还是学生使用草图大师绘制地图学习，都是比较容易的，这也是草图大师独具的优势。

3）使用方便。草图大师软件可以迅速地在二维和三维空间中进行切换，并可以利用“相机位置”功能实现全方位的转动。这样在地理教学中，教师就可以使用草图大师软件实时地为学生展示相关内容，这也是草图大师软件的一大功能特点。

4）模型丰富。草图大师软件内部拥有丰富的3D模型库，在地理教学中，教师可以结合教学需求，从中提取可为自身所用的软件模型，这就为教学设计提供了极大的便利。

通过上述对草图大师软件功能的分析可以发现，草图大师与地理教学是极为契合的，教师在教学中若能利用好，

作者：韩志洋，淄博市临淄区朱台镇中学（255000）。

---

c 是初始量，而且 c/a 可以形象地理解为焦点离开中心的程度，所以把 c/a 叫作离心率；并且通过双曲线的标准方程可知，双曲线的离心率 $c/a > 1$，而椭圆的离心率 $c/a < 1$，这是这两个圆锥曲线的不同点之一。

3 教学反思

“双曲线的简单几何性质”是高中圆锥曲线内容的重难点，与“椭圆的简单几何性质”有许多相似之处，很多学生容易对这两部分内容产生混淆。因此，在教学中充分讲清楚每个知识点是十分关键的。数形结合是学习数学的重要方法，在学习“双曲线的简单几何性质”时，借助网络画板利用数形结合的方法可以很好地给予学生直观感知，有利于学生的理解。

在“双曲线的简单几何性质”教学中，利用网络画板对学生得到的猜想或者结论进行验证，从代数方面培养学生的逻辑推理能力，从几何方面给学生直观的感知，加深学生的理解。例如，虽然学生能够从代数的角度证明双曲线的对称性，得到双曲线的渐近线，但是利用网络画板的动态功能能够给学生直观的感知，对他们的理解、记忆能起到很好的促进作用。

在“双曲线的简单几何性质”教学中，利用网络画板引导学生探究，发现数学规律。离心率这部分内容是学生学习的一个重难点，容易与椭圆的离心率混淆。在教学过程中以网络画板作为帮助学生探讨双曲线形状的工具，能够让学生直观地感知 a、b、c 以及它们的比值对双曲线形状的影响，有助于学生的理解。■

参考文献

[1] 马梦荣，雍进军，张加林，等．网络画板在中学数学教学中的应用[J].贵州师范学院学报，2018(12):80-84.

[2] 陈荣桂，王建鹏．体现高中数学教育价值的《双曲线的渐近线探究》教学设计[J].数学教育研究，2015(5):35-38.