



单位代码 10635

学 号 112019314221298

西南大學

专业学位硕士学位论文

基于核心素养的高中数学单元教学设计研究——以“三角函数”为例

论文作者：董晓丽

指导教师：喻厚义

专业学位类别：教育硕士

专业领域：学科教学（数学）

提交论文日期：2024 年 6 月 6 日

论文答辩日期：2024 年 5 月 18 日

学位授予单位：西南大学

中 国 • 重 庆

2024 年 6 月

目 录

1 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 研究内容.....	2
1.3 研究思路与方法.....	3
1.4 研究的意义.....	4
2 文献综述.....	6
2.1 高中数学单元教学的研究整体趋势	6
2.2 高中数学单元教学的研究方法	8
2.3 高中数学单元教学设计的研究内容	8
2.4 文献综述小结.....	13
3 概念界定及理论基础	15
3.1 核心概念界定.....	15
3.2 理论基础.....	17
4 单元教学设计的特点与步骤	20
4.1 单元教学设计特点.....	20
4.2 单元教学设计操作步骤.....	20
5 《三角函数》单元教学设计整体分析	22
5.1 课程教材分析.....	22
5.2 确定单元内容.....	29
5.3 分析教学要素.....	31
5.4 制定学习目标.....	36
5.5 设计学习评价.....	37
5.6 设计学习过程.....	38
5.7 设计作业.....	39
5.8 教学资源选编.....	40
6 《三角函数概念》单元教学设计案例研究	41
6.1 筛选研究案例.....	41
6.2 确定研究内容.....	41
6.3 案例研究总结.....	42
7 《三角函数概念》单元教学设计案例开发	48
7.1 确定单元内容.....	48
7.2 单元内容解析.....	48
7.3 分析教学要素.....	50
7.4 学习评价设计.....	53

7.5 单元教学过程设计.....	54
7.6 单元作业设计.....	64
7.7 单元教学设计反思.....	73
7.8 单元教学设计的访谈反馈	73
8 研究总结.....	76
8.1 研究总结.....	76
8.2 教学建议.....	77
8.3 研究不足与展望.....	78
参考文献.....	80

基于核心素养的高中数学单元教学设计研究——以“三角函数”为例

学科教学（数学）专业硕士学位申请人 董晓丽

指导教师 喻厚义

摘要

普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）的课程方案，强调了不仅要增强学生的综合素质，还要特别关注核心素养的发展。所以，新课程改革下探索以发展学生核心素养为最终目标的教学方式有重要意义。三角函数是“函数”板块关键部分，在解决生活中周期现象问题方面具有广泛应用，同时涵盖了多种数学核心素养。因此，本研究选择三角函数内容开展核心素养下的单元教学设计。

本研究采取了文献研究、理论研究和案例研究法。首先查阅相关文献，了解了高中数学单元教学的研究进度、研究方法和研究内容。研究表明：（1）理论研究维度很多，主要包括单元教学相关概念的界定，单元教学设计的依据、策略方法、特征和操作步骤。但是单元教学设计特点和步骤还没有完全统一的结果；（2）理论落地的案例开发研究较少，文献中的案例大多数是基于单元视角开展的课时教学设计，开展完整单元教学设计案例的情况很少。基于此研究现状，本研究先对“数学单元”和“单元教学设计”核心概念进行界定，概括了“数学单元”和“数学单元教学设计”的内涵。对比研究了核心文献中的单元教学设计步骤和特点，梳理得出课程教材分析、确定单元内容、分析教学要素、制定学习目标、设计学习评价、设计学习过程、设计单元作业和设计反思八个步骤，以及整体性、阶段性、动态发展性和情境性四个单元教学基本特点。然后按照操作步骤，结合三角函数内容开展《三角函数》单元教学设计的整体分析。再从筛选研究案例、确定研究内容、案例研究总结三个方面，围绕单元教学设计 4 个核心步骤：学习目标确定、学习评价设计、学习过程设计、作业与检测设计，进行《三角函数概念》单元教学设计的案例对比研究。基于上述研究成果，最后以“三角函数概念”为例，基于 CTI 教学模式和核心素养水平等级，分别开发了单元教学设计和单元作业设计的案例。总体来说，本研究除了拓展理论研究，为了助力单元落地，更注重案例开发和过程评价。

研究得出以下结论与成果：（1）单元教学可以提高课堂教学效率，促进学生系统掌握知识与方法，落实学生学科核心素养的发展；（2）数学单元教学设

计对于提升教师整体把握课程、提升自身数学素养、提高教学实践能力有很大帮助；（3）通过对核心文献的整合研究，丰富了单元教学设计的内涵和操作步骤；（4）基于 CTI 教学模式和核心素养水平等级，分别开发的单元教学设计和单元作业设计案例将对一线教师开展单元教学设计带来一定启示和帮助；（5）单元学习评价是检验单元教学执行成效的重要内容。教师通过给予学生全面的反馈、具体的建议和个性化的教学支持，可以帮助学生更好地明确自己的学习情况、增强他们的数学学习自信心和兴趣。

关键词：数学核心素养，单元教学设计，三角函数，教学案例

Research on High School Mathematics Unit Teaching Design Based on Core Competencies - Taking Trigonometry as an Example

Xiaoli Dong

Directed by Houyi Yu

Abstract

The curriculum plan of ordinary high school mathematics curriculum standard (2017 edition, 2020 revision) emphasizes not only enhancing students' comprehensive quality, but also paying special attention to the development of core literacy. Therefore, under the new curriculum reform, it is of great significance to explore the teaching method with the ultimate goal of developing students' core accomplishment. Trigonometric function is a key part of the "function" section, which is widely used in solving the problem of periodic phenomena in life, and covers a variety of core qualities of mathematics. Therefore, this study chooses trigonometric function content to carry out the unit teaching design under the core literacy.

This study adopts literature research, theoretical research and case study methods. First of all, consult the relevant literature, understand the research progress, research methods and research content of high school mathematics unit teaching. The results show that: (1) There are many theoretical research dimensions, including the definition of related concepts of unit teaching, the basis of unit teaching design, strategy methods, characteristics and operation steps. However, the characteristics and steps of unit teaching design have not been completely unified. (2) There are few case development studies on theoretical implementation. Most of the cases in literature are class instructional design carried out from the perspective of unit, and there are few cases of complete unit instructional design. Based on this research status, this study first defines the core concepts of "mathematical unit" and "unit instructional design", and summarizes the connotation of "mathematical unit" and "mathematical unit instructional design". After a comparative study of the steps and characteristics of unit teaching design in core literature, eight steps of course material analysis, determination of unit content, analysis of teaching elements,

formulation of learning objectives, design learning evaluation, design learning process, design assignment and reflection of design are drawn, and four basic characteristics of unit teaching are integrated, periodic, dynamic development and situational. Then according to the operation steps, combined with the trigonometric function content to carry out the overall analysis of "Trigonometric function" unit teaching design. Then, from the three aspects of selecting research cases, determining research content and summarizing case studies, the paper conducts a comparative study on the unit teaching design of "Trigonometric Function Concept", focusing on the four core steps of unit teaching design: determination of learning objectives, learning evaluation design, learning process design, homework and test design. Based on the above research results, finally, taking "trigonometric function concept" as an example, based on CTI teaching mode and core literacy level, the unit instructional design and unit assignment design cases are developed respectively. In general, in addition to expanding theoretical research, this study pays more attention to case development and effect evaluation in order to help the unit landing.

The research draws the following conclusions and achievements: (1) Unit teaching can improve the efficiency of classroom teaching, promote students to master knowledge and methods systematically, and implement the development of students' subject core literacy; (2) Mathematics unit teaching design is of great help to improve teachers' overall grasp of the curriculum, enhance their own mathematical literacy and improve their teaching practice ability; (3) Through the integrated research of core literature, the connotation and operation steps of unit teaching design are enriched; (4) Based on CTI teaching mode and core literacy level, the unit instructional design and unit assignment design cases developed respectively will bring certain enlightenment and help to front-line teachers in unit instructional design; (5) Unit learning evaluation is an important content to test the effectiveness of unit teaching implementation. By giving students comprehensive feedback, specific suggestions and personalized teaching support, teachers can help students better understand their own learning situation and enhance their self-confidence and interest in mathematics learning.

Key words: core mathematics attainment, unit teaching design,
trigonometry, teaching case

1 绪论

1.1 研究背景

1.1.1 新课程改革强调学科核心素养的培养

普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）（以下简称《标准》（2020 年修订））对于普通高中课程方案的描述，强调了不仅要增强学生的综合素质，还要特别关注核心素养的发展。这意味着，学生不仅需要具备理想信念和社会责任感，还需拥有科学文化素养和终身学习的能力。此外，为了应对未来的挑战，学生还应培养自主发展能力和沟通合作能力，这些能力将帮助他们在不断变化的世界中取得成功^[33]。课程目标明确指出通过高中数学课程的学习，在学生获得“四基”“四能”的基础上，发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养。国务院为贯彻落实全国教育大会精神，统筹推进普通高中新课程改革和高考综合改革，2019 年颁发的《关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见》中强调，要全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，发展“素质教育”，要深化育人关键环节和重点领域改革，坚决扭转片面应试教育倾向，切实提高育人水平对于“素质教育”的界定^[2]，2019 年 6 月，中共中央、国务院发布了《关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》，其中明确指出，在遵循党的教育方针的前提下，推动素质教育发展并落实学科核心素养，是教育工作者教学活动的根本任务。^[32] 核心素养是指超越原有的点结构，对思维、知识、能力、方法、技能、情感态度价值观等进行整合和超越，并在真实复杂的问题情境中表现出来。所以，如何在教学中有效落实数学核心素养是每一个数学教师必需思考的问题。

1.1.2 学科核心素养呼唤单元教学

《标准》（2020 年修订）着重强调了以学科大概念为基石，构建结构化的课程内容，同时以主题为导向，实现课程内容的情境化，从而有效推动学科核心素养的落实。由此可见，落实核心素养最好的策略就是进行单元教学设计。通过系统整理和分析知网上发表的文献资料，其中代表性文献是吕世虎、杨婷、吴振英发表的《数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤》，提到了数学单元教学设计具有整体关联性、动态发展性、团队合作性三个基本特征。

而这与数学学科核心素养阶段性、连续性、整合性特点^[14]相呼应，进一步体现了学科核心素养的培养“离不开”单元教学。

1.1.3 三角函数在高中数学中的地位和作用

三角函数在高中数学中占据了重要的位置，它与许多其他知识点紧密相连。首先在日常生活、工程、物理等领域有着广泛的应用。例如，在物理学中，三角函数用于描述振动和波动；在地理学中，用于计算地球上任意两点之间的距离和方位角；在建筑工程中，用于计算角度和边长等。这些应用不仅展示了三角函数的实际价值，也增强了学生学习三角函数的兴趣和动力。另外，在数学三角恒等变换、解三角形（正弦定理、余弦定理）问题、向量等板块联系紧密。尤其在解决向量问题时，也可以利用三角函数的性质进行简化和计算。这种结合使得向量和三角函数在解决实际问题时更加灵活和有效。综上所述，三角函数与高中数学的许多知识点紧密相连，它们共同构成了高中数学的重要组成部分。通过深入学习和理解这些知识点及其联系，我们可以更好地掌握数学知识，提高解决问题的能力。

1.2 研究内容

通过文献综述小结，本研究的脉络已基本清晰。结合三角函数内容，我的研究细分为以下三个子问题：

1. 通过查阅文献，梳理单元教学设计的内涵、特点和实施步骤，思考如何开展《三角函数》单元教学设计的整体分析？
2. 从哪些方面进行《三角函数概念》单元教学设计案例研究？
3. 如何落实《三角函数概念》单元教学设计案例开发？

通过问题 1 的研究，解决单元教学设计的内涵以及如何进行实施，为《三角函数》大单元的整体综合分析做铺垫，也为后续问题 2 和问题 3 的研究做准备。问题 2 的研究，首先结合问题 1 的理论，通过知网搜集筛选出与本研究相近的文献，结合有价值的相关指导性文件或期刊内容，对比文献中关键环节的研究过程，总结他们的研究亮点，未解决的问题以及是否有作业设计等，取长补短，为问题 3 做准备。问题 3 的研究，选用本研究给出的核心素养视角下的数学单元教学设计步骤，以高中“三角函数概念”为例，对其进行完整的单元

教学设计。这是对新课改的实践，既加深自己对新教材的理解，也希望对一线教师提供参考价值。

1.3 研究思路与方法

1.3.1 研究思路

结合研究内容，研究思路框架如图 1.4-1。

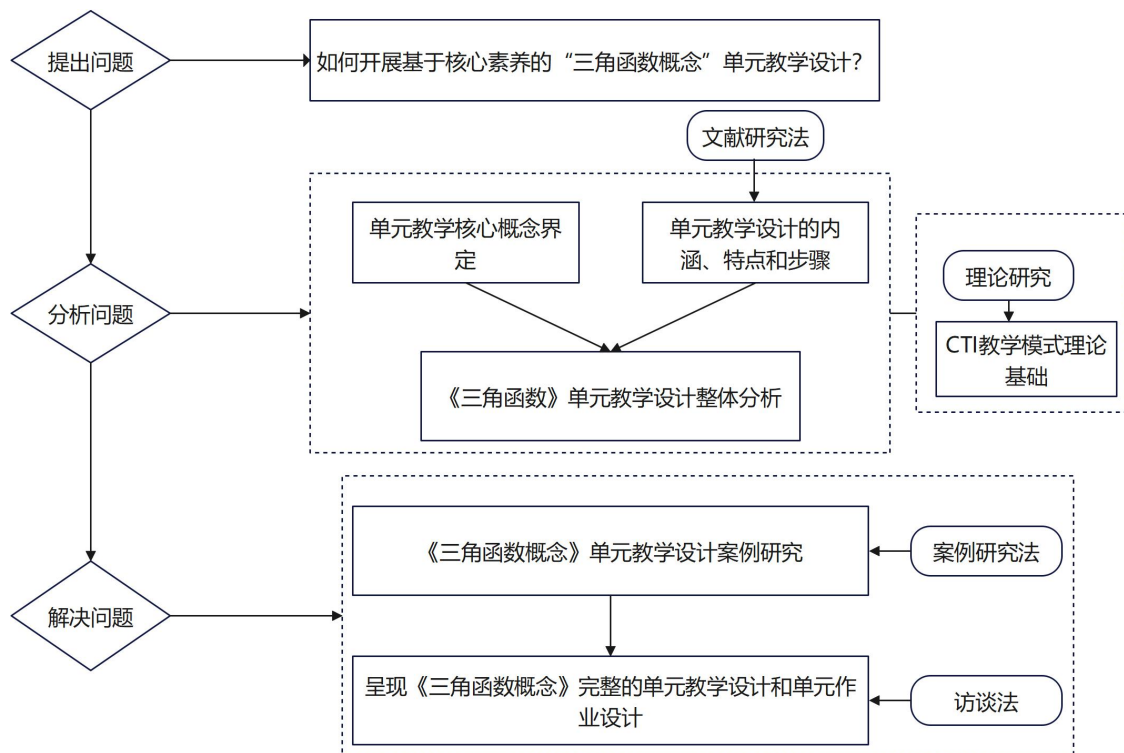


图 1.4-1 研究思路框架

1.3.2 研究方法

1.3.2.1 文献研究法

文献研究法是一种通过查阅和分析相关文献来探究某一主题或问题的研究方法，研究者需要全面、客观地搜集和整理与研究主题相关的文献，紧跟本研究的研究进度，围绕研究主题进行深入的分析和思考，提取出有价值的信息和观点。主要包括查阅、筛选、分析、总结等步骤。本研究在确定“单元教学设计的操作步骤”环节采用了文献研究法。目的是通过梳理总结已有研究的主要

观点和研究成果，为后续《三角函数》单元教学分析和《三角函数概念》单元教学设计案例开发提供理论支撑和指导。

1.3.2.2 理论研究

理论研究通常指的是对于某一主题或问题进行的深入的理论分析和探讨部分。这部分内容通常会涉及到对相关理论的梳理和评价，以及对已有理论的拓展。在本研究第3章的理论基础研究中，我会梳理建构主义理论和成功智力理论相关研究，并与喻平教授提出的CTI教学模式相结合，为《三角函数概念》单元教学设计案例开发中CTI教学模式的应用做准备。

1.3.2.3 案例研究法

在本研究第7章《三角函数概念》单元教学设计中选择案例研究法。这种研究一般包括案例筛选、确定研究内容、案例分析研究三个部分。本研究对《三角函数》单元整体分析基础上，在知网上筛选案例并根据自己的需要确定对比研究的内容，取长补短，为《三角函数概念》单元教学设计案例开发做铺垫。

1.3.2.4 访谈法

访谈法（interview），又称晤谈法，是心理学的基本研究方法之一。它主要通过访员和受访人之间的面对面交谈来深入了解一个主题。访谈法的优点在于其灵活性和适应性，能够适用于多种情境和研究问题，尤其适用于个性、个别化研究。在使用访谈法时，需要注意一些关键步骤和技巧。首先，需要设计访谈提纲，明确访谈的目的和所要获得的信息。其次，提问的方式要简单、清楚、明了、准确，并适合受访者。此外，访谈者还需要适时、适度地追问，并准确地捕捉信息。最后，访谈过程中还需要做好记录，一般还会录音或录像，以便后续分析。

1.4 研究的意义

1.4.1 单元教学设计对教师发展的促进作用

数学单元教学设计是在整体思维指导下，从提升学生数学核心素养的角度出发，通过教学团队的合作，对相关教材内容进行统筹重组和优化，并将优化

后的教学内容视为一个相对独立的教学单元，以突出数学内容的主线以及知识间的关联性，在此基础上对教学单元整体进行循环改进的动态教学设计。^[14]这就需要教师以落实“四基”“四能”，培养全面发展的学生为目标，结合知识内容的联系，精选、重组教学内容，更加关注数学学科思想和方法、思维方式的提升，对教师的专业素养要求很高。

高中数学课程标准修订的重点是落实数学学科核心素养，其中对数学教师提出了新的要求：（1）提升数学专业素养，关键在于教师能够深刻把握高中数学的主线脉络，理解各知识点间的内在联系。这需要教师深入探究数学核心概念的本质，掌握数学通用的解题方法和思想。同时，教师还应关注数学知识产生与发展的过程，领悟其中所蕴含的数学思想。此外，思考高中数学知识与高等数学之间的联系，也是提升数学专业素养的重要途径。（2）提升数学教育理论素养，在教学中认真研读课程标准和教材，基于理论探索数学教学的规律和学生学习高中数学的规律。（3）提升教学实践能力，具体方面有教学设计和实施能力、教学案例的分析能力、信息技术的使用能力等。所以，通过数学单元教学设计对于提升教师整体把握课程、提升自身数学素养、提高教学实践能力奠定了坚实基础。

1.4.2 单元教学设计提升学生学科核心素养

根据“凸显内容之间的有机衔接及其与数学学科核心素养的融合”原则，单元教学将高中数学碎片化的知识系统化同时，让学生得到思维方法的训练，这是落实发展学生数学学科核心素养的有力举措。高中数学课程划分为五个内容主题：预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动。从课程内容设计角度来说，每个主题内部的知识板块在内容上有紧密的逻辑关系，不同主题内容之间也有逻辑关系，不同数学知识点也蕴含通性通法，根据数学内容之间的千丝万缕关系，教师可以对内容及其蕴含的数学方法和思想重新进行有机整合，进行单元教学设计，提高课堂教学效率，促进学生系统掌握知识与方法，落实学生学科核心素养的发展。另外，三角函数作为“函数”板块重要内容，其中蕴含丰富的数学思想和方法，教师开展单元教学，是发展学生数学核心素养的很好“载体”。

2 文献综述

2.1 高中数学单元教学的研究整体趋势

以“高中数学单元教学的研究”为主题在知网上检索文献，与之相关的研究从 2013 年开始出现，由图 1.3-1 可以明显看到，2016 年以来，学者们逐渐重视单元教学相关研究，2019 年开始研究成果显著提升。图 1.3-2 反映了近 10 年来的研究话题，研究者将目光聚焦于“核心素养”“单元教学”“单元教学设计”等热点方面，还有“深度学习”“逆向教学设计理论”“教学策略”“大概念”等话题。图 1.3-1 中近 5 年发文量最多，我筛选了 2020 年至今的研究结果，如图 1.3-3 所示，研究内容集中在高中数学的“单元教学”“单元教学设计”、“深度学习”和“核心素养”板块。本研究以核心期刊为主要标准筛选这些文献，发现代表性成果主要体现在 3 个方面。第一，关注教师专业成长。吕世虎教授等人在深入分析数学单元教学设计内涵、特征和实施步骤的基础上，探讨单元教学设计对促进数学教师专业成长的作用^[13]。第二，注重教学模式探索。这一时期形成了以“单元一课时教学设计”单元教学新模式，关注“教、学、评”一体化教学模式，如以问题解决过程线索为主题的单元教学设计模式和 CTI 教学模式^[26]。第三，注重“整体性”发展。开始关注单元作业设计^[8]，作业作为单元教学效果的重要评判标准，应该紧贴教学设计，配套设计单元作业。另外，设计的单元作业要在全面覆盖知识点和核心素养的基础上，考虑题量和难度等。所以，除了设计单元作业还应该有作业的综合分析表，涵盖内容有：题目类型、每个题的考点说明、核心素养及水平划分、必要题的设计意图等，这些都要综合分析，才能大致判定作业设计的合理性。

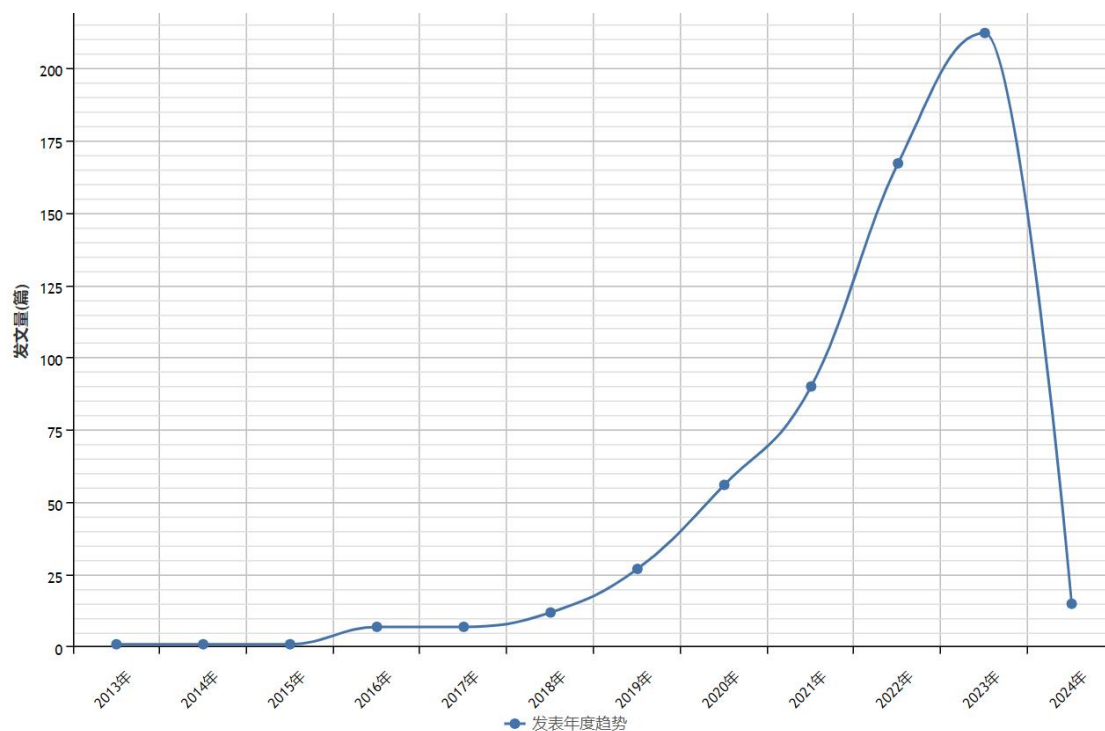


图 1.3-1

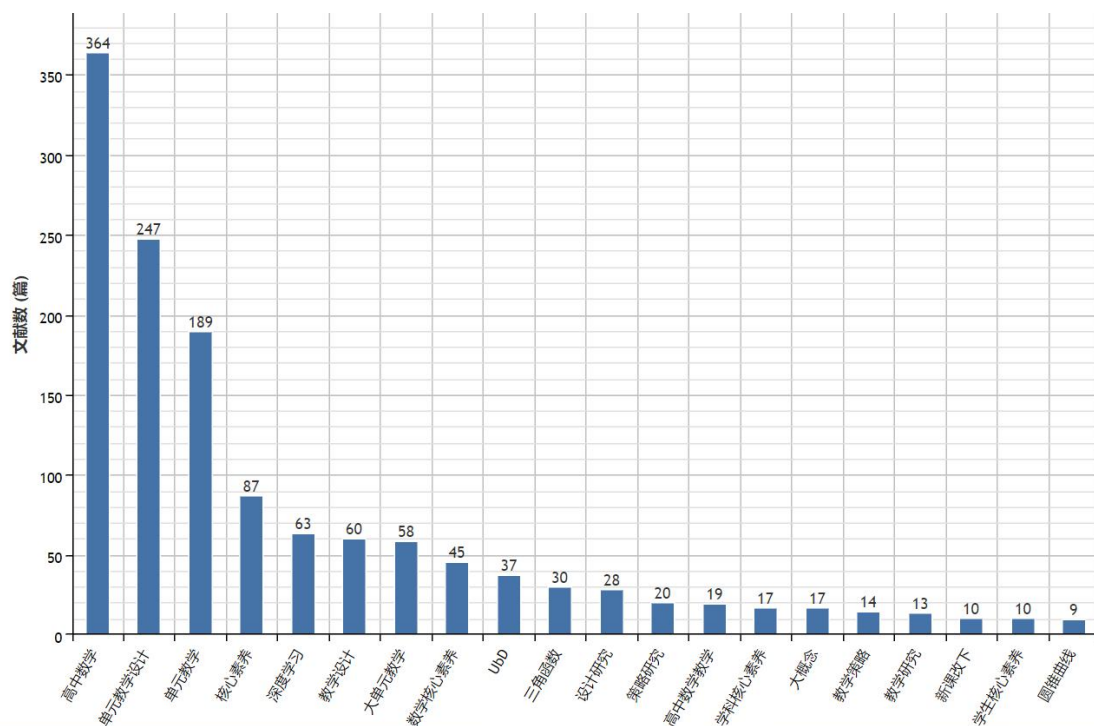


图 1.3-2

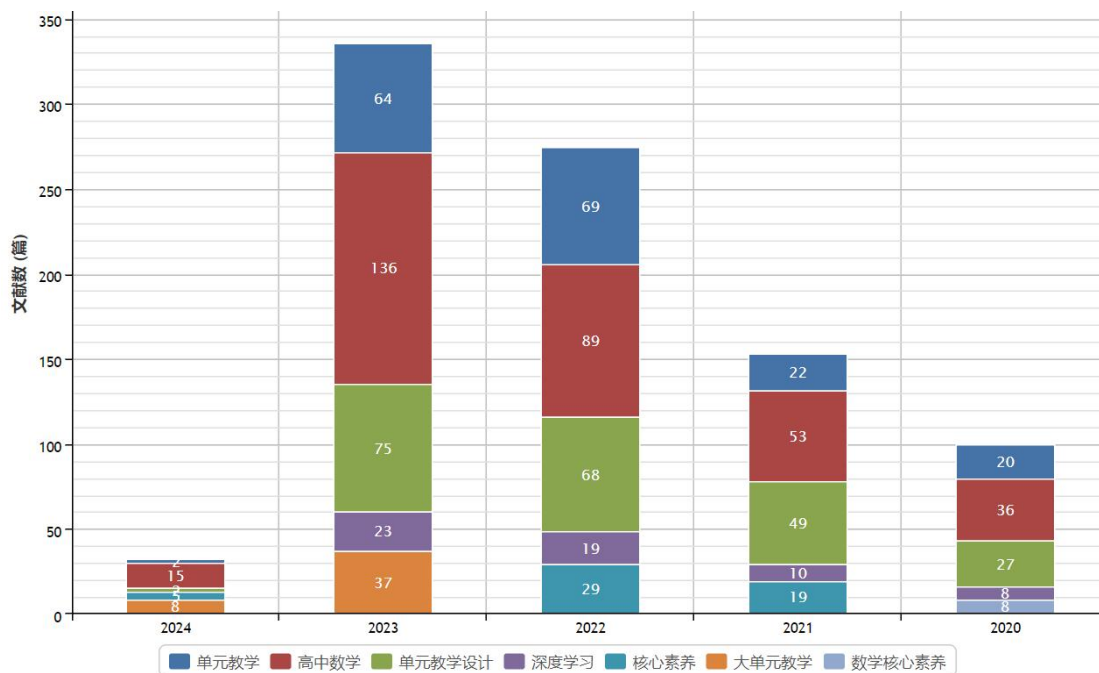


图 1.3-3

2.2 高中数学单元教学的研究方法

关注最近 5 年高中数学单元教学相关文献的研究方法，参考王磊等人的研究方法数据^[21]，从 95 篇文献中析取主要研究方法，统计结果表明：约 50% 的文献采用了“理论研究+案例研究法”，其次有 22 篇文献采用了案例研究法，占比超过 20%，涉及实验法、调查法和文献分析法等的文献较少，还有 8 篇文献采用了“文献分析法+定量分析法、文献分析法+纯理论与模型研究、文献分析法+理论研究+案例研究法、调查法+比较研究法+案例研究法、比较研究法+行动研究法”等进行混合研究。

2.3 高中数学单元教学设计的研究内容

研究者主要从两个角度展开。第一，单元教学设计的理论研究，主要集中在三个方面：单元设计相关概念的界定(A)、单元设计的理论层面(B)和单元设计与学科融合(C)，这部分研究主要以期刊形式呈现；第二，单元教学设计的案例开发研究(D)，主要以论文形式开展。下面针对每个方面做研究现状综述。

关于 A，从单元教学性质的角度界定单元设计。崔允漷用建筑单元类比教学单元，认为单元设计是一个相对独立的教育事件，能够让学生经历完整的学习过程^[1]。邵朝友认为单元是课堂教学活动的基本单位，单元设计注重学习的

建构性与完满性，指向范围介于学期内容与课时内容之间^[19]。由此设计的单元内容更具备整体性和连续性特点，有利于阶段性发展学生的核心素养。另外，关于“数学单元”和“数学单元教学设计”的概念界定，在本研究第2章有相应的研究现状描述，这里不再赘述。

关于B，单元设计理论的研究主要集中在单元设计的依据、策略方法、特征和操作步骤等层面。

(1) 目前关于数学单元教学的依据主要有3种观点。邵朝友等^[17]认为注重大概念、大问题教学；李昌官认为数学知识的整体性、核心素养的持续性决定了教学方法的整体性^[7]；李保臻等认为课标的理念要求与内容的关联性、数学知识内在的逻辑性与生成的系统性、数学教学设计的完善性与实践的发展性是数学单元教学的基础^[5]。以上观点虽各有侧重，但本质上均体现数学单元教学的整体关联性。

(2) 对于数学单元教学的策略和方法，刘权华提出首先思想上充分重视，战略上通盘考虑，战术上加强融合，分解目标，技术上驾轻就熟^[12]。也就是说，教师需要思想上明确单元教学对发展学生核心素养的重要性，其次通过上网查资料、老师之间交流、依据教学现状等综合分析如何开展单元教学，鉴于单元教学的备课量大，需要综合考虑的因素众多，战术上可以以教研组为单位，分解单元教学目标，最后梳理整合成为共案，再落实到实际教学中，检验效果。章飞教授立足教学实际，建议一线教师可通过深入研究课程标准和教材，外显教材内隐的整体意识，并根据教学“基于现场”的特征提出单元教学实施的关键在于灵活生成^[29]。张优幼教授从教学三要素的角度，指出单元教学要结合教材编写的组合逻辑、学生认知结构的生长逻辑和教师教学的动态演绎逻辑^[28]。以上文献综合来看，都考虑教材编写意图、学情和实际教学过程，所以制定的单元教学策略和方法的能够对症下药解决问题，因此对实际教学具有较强的指导性。

(3) 对于数学单元教学设计操作步骤，我筛选了几篇核心期刊文献对比研究，如表3.1-1。先梳理相关内容，再结合新课程标准要求整理出自己的理解。

作者编 号	发表时 间	单元教学设计操作步骤	补充
①	2016年	(1) 确定单元内容	

吕世虎	7月	(2) 分析教学要素：数学分析、课 标分析、学情分析、教材分析、重难 点分析、教学方式分析	
杨 婷		(3) 编制单元教学目标	
吴振英		(4) 设计教学流程	
		(5) 评价、反思与修改	
②李润 洲	2018年 7月	(1) 设计学习目标 (2) 学习内容 (3) 教学过程 (4) 教学评价：学习的过程性评价 和结果性评价	完整的学习活动包括如下过程： (1) 创设情境，提出问题；(2) 呈现系统、多样化的学习材料； (3) 设计系统、有层次的子问 题或任务；(4) 根据材料和子 问题开展探究；(5) 初步回答 上课初始所提出的问题，呈现探 究成果。
③崔允 漉	2019年 2月	(1) 确定单元名称与课时 (2) 单元目标 (3) 评价任务 (4) 学习过程 (5) 作业与检测和学后反思	
④何小 亚	2021年	1. 课程教材分析 (1) 基本内容 (2) 核心内容：核心概念、核心原 理，数学主线 (3) 地位作用 2. 教学目标分析：三维目标 3. 教学过程规划	
⑤钱卫 红	2023年 7月	(1) 规划单元主题 (2) 分析教学要素：教材的逻辑与 内容结构、课程标准的要求、学生的 认知基础以及数学学科学习的特点 (3) 明确学习目标	内容和内容解析板块： 内容：列出单元教学内容，简要说 明内容的内涵和外延，给出单元 课时数，并对单元内容进行课时 分割。

(4) 设计学习过程	内容解析:1)揭示单元内容的数学本质,说明概念的核心所在,表述本单元所蕴涵的数学文化、所渗透的数学思想等;2)分析本单元内容的地位和作用。
(5) 单元教学实践	课程标准要求:
(6) 评价反思改进	课程标准中对本单元内容的基本要求和发展性要求.
	学生认知分析
	学生已有的前概念或知识经验基础;学生的认知特征和思维水平;学生学习新知识所持有的情感态度,以及对数学的价值取向等.

表 3.1-1 单元教学设计操作步骤

编号①的文章来源于西北师范大学出版的《当代教育与文化》，收录在北大、AMI 核心期刊中，可称做单元教学设计领域探讨的“元老”，具有很高的引领示范作用，发表时间较早，优先研究。②的文章来源于《课程·教材·教法》，由人民教育出版社出版，更是被北大、CSSCI、AMI 核心期刊收录。崔允漷教授（编号③）的文章曾在“首届全国课堂教学研讨会”上做主题报告，来源于《上海教育科研》，也是北大核心。④的文章来自数学权威期刊《数学通报》。⑤的文章来源于浙江师范大学出版的《中学教研（数学）》。钱卫红老师来自浙江省嘉善县高级中学，多年深入一线教学，对单元教学设计有更丰富的实践经验，这篇文献有一定的参考价值。

①②③④⑤的单元教学设计步骤有些是相同的，虽然用词不同，但内涵一致。比如：①中“确定单元内容”、③中“确定单元名称”、和⑤中“规划单元主题”，都是根据知识内容的逻辑和结构划分出单元。相同的环节包括制定学习目标、设计学习过程、学习评价。可见这三大环节是必不可少的。不同点也较多。首先，只有①中提到要有重难点分析，而③指出：在逆向设计学生的学习目标时，就已经从三维角度明确提出“经历什么过程，理解掌握什么内容与方法，体会到什么意义等”，可见目标中已清晰指明要将重难点解决到什么

程度，因此，写了目标之后，不需要写重点难点。这一点我也认同。因为制定的学习目标会从单元细化到课时目标，既然是学习的重难点，那自然会体现在学习目标中。其次，①中明确提到了教学方式分析，比如情境教学、问题启发式教学、多媒体辅助教学。②特别强调要创设问题情境，因为学科核心素养无法通过简单地告知方式习得，而是需要学生在问题情境中来经历学科的概念、命题与理论创生的过程，再从中体验、感悟到他们背后所隐藏的学科核心素养。③也指出在单元设计中融入“真实情境与任务”至关重要。学生的学科核心素养表现水平，往往需要通过在真实情境中运用所学知识并完成特定任务来评判。因此，创设问题情境成为了聚焦核心素养的教学设计的核心要素。通过这样的设计，可以更有效地衡量和提升学生的学科核心素养。结合研究者的研究内容是三角函数问题，更需要情境式教学设计。最后，教学评价环节对于中小学教师来说是难点，因为老师们关注最多的是如何上课，很少关注如何评价，但若没有学习评价环节，就不知道学生到底学会了没，也就无法了解目标是否达成。①提到教师在教学前应根据教学目标制定评价标准，随后在单元教学结束后，依据这些标准评估学生的学习效果，确保教学目标、教学过程和评价体系三者之间的高度一致性。这样做有助于更准确地衡量学生的学习成果，并为后续的教学调整提供有力的依据。②提出了教学评价的形式有学生学习的结果性评价和过程性评价。同时，教学评价应该与学习目标高度相关。③强调“评价任务就是检测目标是否达成学习任务”。将评价任务单列且置于目标与学习过程之间，这是一个关键。⑤对评价环节一带而过，没有实质性建议。而学习评价的具体措施是什么？4篇文章均没有提到，但都明确说明了评价任务应与目标高度贴合。也就是说，可以根据具体目标设置评价任务，作为判断学生是否达到目标的标准关于这一点，后续研究中，我将继续参考相关的代表性文献进行研究。另外，③的作业与检测本质上就是学习评价的一种方式，只是作业中设置的题目一定是结合具体的知识点确定考点，根据学习目标确定难度的，所以一般放置在学习过程之后。⑤的单元教学实践环节不包括在本研究内。

关于C有两种类型：学科内整合、跨学科整合。学科内整合强调在具体某一门学科下构建起纵向或横向的知识联系。文献显示，相关基础学科的单元设计皆为学科内整合，其中高中科目均有研究。跨学科整合则利用多门学科相互关联来建构课程，注重通过综合应用知识来提高学生解决实际问题的能力^[18]。这种文献研究很少，有1篇且与STEM教育相关，强调科学、技术、工程、数学的

有机整合和学科的融合^[24]。在该文献中，作者在跨学科整合的单元设计中引入大概念，在选题上更加重视真实问题的研究与解决、注重培养学生的高阶思维能力。

关于 D，纵观已有文献可以发现，小学数学单元教学设计主要集中在运算律、分数、几何度量等；初中阶段涉及四边形、图形的平移与旋转、方程、二次函数、运算律等；高中阶段主要包括导数及其应用、平面向量、湘教版统计学、函数的应用、函数单调性、解三角形、全称量词与存在量词、距离问题、数列、集合等。整体来说，单元案例设计仍处于零散状态，尚未形成有效关联，对内隐性强的数学知识、思想方法、核心素养等的研究鲜有涉猎，导致数学单元教学理论脱轨于具体教学，未能体现“器”之所施。作者王磊等人^[21]在回顾研究了近四十年中国基础教育数学单元教学之后，对数学单元教学走向“新常态”提出几点建议：（1）深挖学理层面，完善理论体系；（2）夯实设计功底，助力单元落地；（3）拓展理论研究，关注案例开发；（4）重视效果评价，落实育人目标。

2.4 文献综述小结

分析高中数学单元教学的研究进度，发现新课程改革以来，关于高中数学的“单元教学”与“核心素养”的研究是近年来的热点问题。这和我的研究背景相吻合，说明新课程改革下探索以发展学生核心素养为最终目标的教学方式有重要意义。

分析高中数学单元教学的研究方法，种类众多，常见的有案例研究法、实验法、调查法和文献分析法、理论研究和比较研究法。一般在文献中多会用两种或两种以上研究方法。

分析高中数学单元教学设计的研究内容，研究维度较多，整体可分为两大类：（1）理论层面的研究，包括单元教学相关概念的界定，单元教学设计的依据、策略方法、特征和操作步骤等，主要以期刊形式呈现。典型代表有吕世虎、李润洲、李保臻、崔允漷、章飞、何小亚等。其中关于单元教学设计的操作步骤研究者较多，几位教授都提出了详细的设计环节，个别有所不同，但他们都提到了单元目标、学习过程与教学评价环节，可见这三环节是单元教学设计必备环节。也有学者提出作业设计，认为在“教-学-评”一体化模式下，这是评价教学设计的有力举措。李润洲和崔允漷还提到情境教学有利于落实核心素养，

因为通过设置问题情境, 让学生经历概念、定理产生的过程, 学生在对情境中的相关信息进行积极的感知和理解中习得学科知识, 才是自然而然、水到渠成的学习方式, 同时也能形成相应的核心素养。综上所述, 针对单元教学设计步骤还没有完全统一的结果, 因为单元教学设计的操作步骤是我开展单元教学设计的重要依托, 所以后续第三章我会继续通过文献研究法明确每个步骤的作用, 形成完整的单元教学设计步骤。而关于教学模式, 我选择喻平教授的致力于发展学生核心素养的 CTI 教学模式。该模式中文称为“建构—迁移—创新”三环节教学模式。建构:construct, 迁移: transfer, 创新:innovate, 因此可以简称 CTI 模式。关于研究方法, 结合自己研究内容, 我选择文献分析法+理论研究+案例研究法。单元教学设计的依据, 我选择李保臻教授提出的理念, 他强调要重视课标的理念要求与内容的关联性、数学知识内在的逻辑性与生成的系统性、数学教学设计的完善性等是数学单元教学的基础。关于单元教学设计的策略, 我选择张幼教授的观点, 更注重教学实际和学生认知结构, 这与我的研究意义更贴合。(2) 理论落地的案例开发研究, 多为论文形式呈现。但文献中的案例大多数是基于单元视角开展的课时教学设计, 开展完整单元教学设计案例的情况很少。基于王磊等人对数学单元教学落地的几点建议, 后续本研究除了拓展理论研究, 为了助力单元落地, 还要注重案例开发和效果评价, 即开发《三角函数概念》单元教学设计的案例和单元作业设计, 落实育人目标。

3 概念界定及理论基础

3.1 核心概念界定

随着时代的发展，以前教育形式的弊端越来越明显，近年教育改革盛行，出现了一批代表性“名词”，但这些“名词”的含义并非像教材中的定义和定理那样具有严谨统一性说明，所以梳理研究问题中涉及的一些有宽泛而非特定含义的“名词”内涵是开展研究的必备前提，下面针对本研究中的两个核心概念“数学单元”和“单元教学设计”进行概念界定。

3.1.1 数学单元

钟启泉教授在《学会单元设计》中提到“单元不是碎片化教学内容的堆砌，而是对知识的一种有机的、模块式的组构”^[34]，这更加重视结合教学实际，对教材内容的整合重组。喻平教授指出：一个单元就是一个思想体系、方法体系、知识体系^[27]。这给我们指明了组建一个单元不仅仅是教材内容的整合，也可以从不同层面组建单元。而《三角函数概念》单元本质上是对研究一类具体函数的内容和方法的延续，所以属于函数类知识体系。基于对以上文献中的单元概念理解，研究者概括“数学单元”内涵为：教师基于教材编排和教学内容在知识、方法或思维层面上的联系，对教学内容的创造性思考和整合形成的一个相对独立的系统教学内容。

李磊和安桂清教授指出“单元成为教学设计的基本点^[9]”，那么单元的合理选取或构建是后续开展单元教学设计的重要前提。通过阅读大量优秀的文献资料，数学单元类型有以下结论和思考。

(1) 结合钟启泉教授所说，单元大体分为学科单元和生活单元。学科单元是基于教育的长期改革发展，根据不同的知识“属性”逐渐划分成不同科目，又通过知识间的联系整合而成的系统化的教材单元；生活单元是根据学习者的生活经验为基础构成的单元。

(2) 美国自 19 世纪以来，开发了多种单元，其中有重要意义的单元有两种：作业单元、活动单元与经验单元。近几年课程改革和“双减”政策下提倡单元作业设计，它依据单元教学目标，为了巩固相应的基础知识和基本思想方法，并渗透培养学生相应的数学核心素养而开展，与单元教学相辅相成。在教学中，教师需要根据单元教学目标和课时教学目标，整体调配各课时作业内容，

完成基础性作业、发展性作业和拓展作业的数量和质量把控，满足不同层次学生的需求。活动单元与经验单元重视教学实践，就是为满足学生的不同志趣和发展提供的丰富多样的课程。比如《标准》（2020年修订）附录2中的案例11“正方体截面的探究”，可以组织学生以个人或小组为单位，开展一场探究成果展示活动，探究过程中充分调动学生主观能动性，借助网络画板等，直观观察与严谨证明相结合，通过提出问题—分析问题—确定研究方案—问题探究—结果展示环节，让学生在具体情境中提升直观想象、数学抽象、逻辑推理等素养，积累数学探究活动经验，提升综合解决问题的能力。

（3）国内关于数学单元划分的研究成果很显著，从发展学生综合能力的培养角度来说，最突出的研究是吕世虎、杨婷、吴振英发表的《数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤》中提到的三种方式^[14]：第一，以重要的数学概念或核心数学知识为主线组织的主题类单元。纵观高中数学课程体系，内容庞杂，通过整合课程内容，突出了函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动四条主线，每条主线都有各自的教学范畴，发展的学科核心素养也有所侧重，但同时，他们在内容上又盘根错节，相辅相成。比如，在现实问题中，能利用函数构建模型，解决问题，既培养学生的数学建模思想，又将函数的研究方法不断深入实际，理论联系实际，真正实现知识的价值。第二，以数学思想方法为主线组织的方法类单元。高中常见的数学思想方法有化归思想、函数思想、方程思想、数形结合、分类讨论、换元法、待定系数法。他们都是基于解决数学问题或实际问题的需要形成的，实际教学过程中，及时引导学生体会这些思想方法的精妙，对促进学生数学学科核心素养的形成和发展很有必要。第三，以数学核心素养、基本能力为主线的素养类单元。这类单元以数学知识为“桥梁”，通过数学思想方法的不断实践和经验总结，逐渐形成的深层次的，对学生获得进一步学习以及未来发展影响深远的一种培养方式。真正开展素养类单元教学，在教材内容选取、课时安排、学情掌握等方面对教师挑战较大。

本研究选取的“三角函数概念”板块属于主题类单元。“三角函数”在人教版（2019年）必修一中可看做一个“大单元”，“三角函数概念”是其中一个“小单元”。三角函数概念是通过研究单位圆上的点运动中位置变化情况而产生和形成的，所以，在研究过程中，可以结合喻平教授在《数学单元结构教

学的四种模式》中提到的“以问题解决过程线索为主题的单元教学模式”，这种模式也称为任务型、问题驱动的单元教学。

3.1.2 数学单元教学设计

界定单元教学设计有两个角度。第一，从单元教学操作的角度界定，使单元教学设计的环节清晰，可操作性强。第二，从单元教学的性质角度来界定。

与角度一相关的资料中，《数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤》下载量最高，截至目前达到 12581 次，被引用 571 次。其中对于数学单元教学设计的内涵描述内容丰富，角度全面。首先是基于学生认知和培养学生能力作为单元教学设计的出发点，其次指出了单元教学设计的系统性、动态性发展的特点，也强调了单元教学设计需要统筹规划、团队合作完成，突出了团队的重要性。刘权华指出，单元教学设计是针对某一主题或单元的教学内容进行的全面、系统的教学活动设计。它旨在从数学知识的主线、学生的认知发展规律以及教学组织原则等多个维度出发，深入探索如何提升教学的有效性^[12]。也就是说，基于学情，以知识主线为明线，通过整体设计教学活动，以达到最终教学目标的教学设计。

关于第二点，崔允漷认为单元教学设计是基于学生立场，对学生围绕某一单元开展的完整学习过程所做的专业设计^[1]。从期望学生“学会什么”出发，逆向设计“学生如何学会”的过程，真正考虑到了如何实现学科核心素养的落地。李润洲立足课程结构，认为数学单元教学设计是一种介于课程规划与课时教案之间的中观层面的教学设计。

基于此，对“数学单元教学设计”的内涵，我概括性地描述为：教师根据《标准》（2020 年修订）要求和学生的认知发展水平，对一个相对独立的数学知识点、思想方法或核心素养等进行系统、科学的教学规划，并根据教学实施中的学情动态调整教学环节，以达到预期教学目标的过程。

3.2 理论基础

3.2.1 建构主义理论

瑞士心理学家皮亚杰（J. Piaget）首次提出了建构主义理论。皮亚杰坚信儿童的认知发展源于内因与外因的相互作用。儿童通过与周围环境的互动，逐步

构建起对外部世界的认识,进而推动其认知结构的成长。将建构主义应用于学习实践中,就要求学习者在具体的情境中,借助教师或同伴的协助,运用学习资源,通过意义建构的过程来获取知识。据此,建构主义学习理论强调“情境”、“协作”、“会话”和“意义建构”是学习中的四大要素。^[35] Erich Fromm and Carl Rogers 提出了“做中学”的理念,即学生通过积极参与和实际操作来建构自己的知识体系。^[39]

在 CTI 模式中,“知识的探究与建构”环节表现出“情境”和“协作”两要素,基于实际情境就是从学生已有感受经验出发,协助知识的建构;“知识的迁移应用”和“知识的创新应用”两个环节正是应对复杂性知识的学习,体现出“协作”和“会话”的重要性。可见,CTI 教学模式稳固地建立在建构主义理论基础之上。

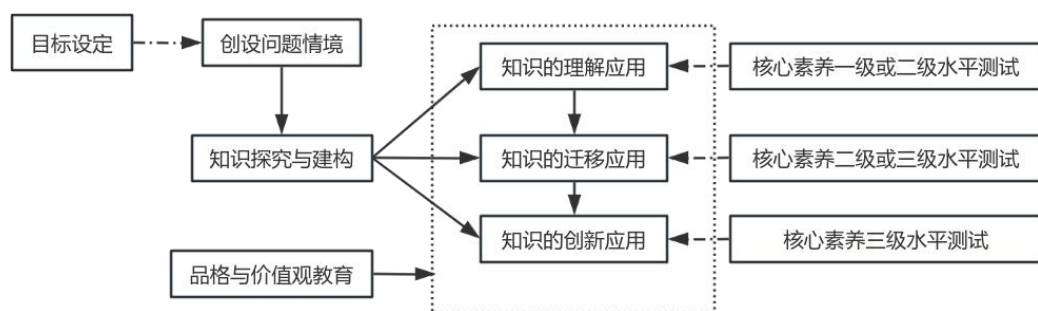
3.2.2 逆向教学设计理论

逆向教学设计是由美国教育专家威金斯和迈克泰提出的教学方式,提倡评价设计先于教学设计,即在确定教学目标的基础上,预设评价任务、方式和标准,最后设计教学活动^[5]。该理论具有 3 个特点:(1)目标导向。逆向教学设计以明确、具体的教学目标为导向,确保所有教学活动都围绕目标展开;(2)评估先行。学习评价的设计先于教学活动,以确保教学过程中的评价和反馈的有效性;(3)学生中心。逆向教学设计注重学生的需求和兴趣,以学生的学习成果为出发点,旨在促进学生的全面发展。

本研究在第 6 章中整体采用逆向教学设计思路,以学习目标为导向,预设学习评价,再结合 CTI 教学模式设计单元教学过程,旨在确保学生的学习效果能够明确地反映在教学过程中,从而提高教学质量和学生的学习效率。

3.2.3 教学设计理论—CTI 模式

喻平教授提出了一种发展学生核心素养的教学模式—CTI 模式。如图 2.2-1 所示,从 CTI 模式的具体过程表明其与建构主义理论的融合。



目标 —————→ 过程 —————→ 评价^[25]

图 2.2-1 指向学科核心素养的教学模式 CTI 教学模式

4 单元教学设计的特点与步骤

4.1 单元教学设计特点

综合单元教学设计内涵和单元教学设计步骤，再结合典型文献，可以归纳出单元教学设计的特点。吕世虎教授指出，数学单元教学设计具有整体关联性、动态发展性、团队合作性三个基本特征^[14]。钱卫红老师提到，数学单元整体教学要有逻辑关联性、整体层次性、要有高观点引领。王尚志提出的单元教学设计的特征是整体性、主题性、阶段性、情境性。

相对于课时教学设计，单元教学设计最明显的特点是以单元为“单位”开展，所以教学设计中首先根据单元内容的逻辑性，围绕主线进行整体教学，有利于学生系统掌握知识。其次，《标准（2020年修订）》第六章“教学意见”中指出：“整体把握教学内容，促进数学学科核心素养连续性和阶段性发展”。单元教学设计归根结底是为了培养学生的学科核心素养，这些能力的形成需要依托具象化的知识学习过程。通过学习、体验、领悟数学概念、定理等中的知识发生发展过程；通过一个知识点的直接应用、变式应用、综合应用、一题多解等；通过学生全身心投入学习，积极主动参与问题探究和讨论中来不断激发思维创生，一步一步将显性知识内化成为自己的个人能力。对于学生学科素养的培养是由低到高慢慢发展的，所以，单元教学设计也具有阶段性特点，不同时间节点有不同的能力层级要求。最后，单元教学设计并非设计完之后再以课时为单位按部就班讲解，而是在实施过程中，根据学生的反馈，随时调整教学设计环节、上课节奏、上课内容快慢等。好的教学设计是离不开学生的实际反馈的，所以，单元教学设计也应具有动态发展性。另外，有学者指出，创设问题情境是指向核心素养的教学设计的必选^[1]。学生学科核心素养的表现程度需要通过在真实情境中运用所学的知识并能完成某种任务来衡量。所以，单元教学设计还应根据单元主题，在真实情境中完成教学。总结一下，单元教学设计具有四个基本特点，整体性、阶段性、动态发展性和情境性。

4.2 单元教学设计操作步骤

基于文献综述中对单元教学设计操作步骤的研究发现，5篇核心期刊都提到制定学习目标、设计学习评价和学习过程，这与“教、学、评”一体化教学模式一致，说明是核心步骤。另外，基于2.3节提到的单元教学设计的依据和

策略方法，体现了课程教材分析、课程标准分析和学情分析、作业设计的重要性。由此，本研究我采用的单元教学设计步骤包括：课程教材分析、确定单元内容、分析教学要素、制定学习目标、设计学习评价、设计学习过程、设计单元作业和设计反思。

5 《三角函数》单元教学设计整体分析

5.1 课程教材分析

说到课程教材分析，其包括的内容相对比较冗杂宽泛。我融合了何小亚教授和钱卫红老师的单元教学设计步骤要求，分三部分进行分析，基本内容、核心内容和地位作用。基本内容研究中包括本单元的内容和外延，也就是说，既有思维导图的方式呈现本章内容，又会简单说明本章与其他领域的联系。关于本章核心内容的研究，主要分析具有统领意义的数学概念的核心所在、数学思想，以及发展学生学科核心素养的相关知识主线，素养主线等。对于本章内容的地位作用，我将分析其在函数板块和整套高中数学学习中的地位，让学生整体把握《三角函数》内容的重要性。

5.1.1 《三角函数》章知识结构图

图 4.1-1 呈现了本章所有内容，从 5.1-5.7 共七节。研究者在认真研读人教 A 版（2019 年）必修一第五章的所有内容之后，结合章建跃教授的相关教材解读，对章引言、节引言、习题选取的意图、章节顺序的安排意图等都进行了细致的分析，深入研究数学知识体系，分析知识的内在联系和逻辑结构，最终以思维导图的形式梳理清楚了本章内容。首先，从宏观角度纵向观察，本章内容有两条主线，左边一条函数主线，研究内容离不开函数的概念、图象和性质“三巨头”。右边一条运算主线，按照小节顺序，教材以问题串形式衔接课时，问题由易到难，从特殊到一般。先研究同角三角函数间的关系，再到终边具有特殊对称性的两角间的三角函数值研究，最后再研究两个任意角的情况。教材如此安排，既符合学生认知规律，也能组建一个运算单元，让学生通过单元学习提升学科素养。这部分会在《4.2 确定单元内容》详细说明。运算主线又为函数主线的学习做铺垫，使得三角函数整章内容的研究路径和本册书籍前面幂函数、指数函数和对数函数的研究路径一致，体现了函数知识的整体性。再横向观察，整章内容的研究中都借助了一个强大的工具—单位圆。这部分会在《4.1.2.2 核心工具》中详细说明。另外，三角函数的学习从应用角度考虑，解决了一类生活中的周期性变化问题。整个学习过程起于简单的单位圆匀速圆

周运动，最终归于解决许多现实世界中周而复始的变化现象。所以，本章的学习体现了情境教学的重要性。

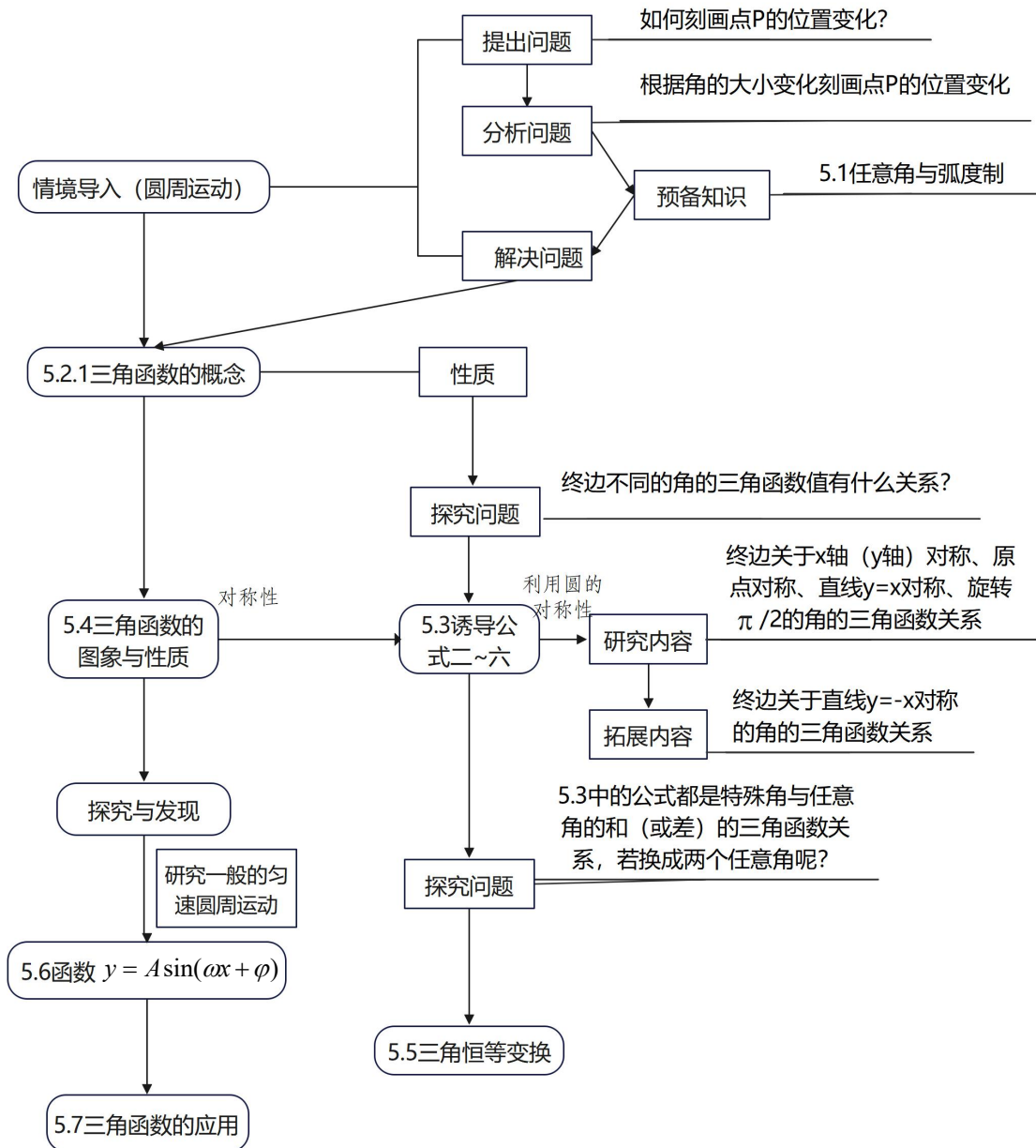


图 4.1-1 《三角函数》章知识结构图

5.1.2 核心内容解读

5.1.2.1 核心概念

三角函数概念是本章的核心内容，主要原因有三，第一：在判定三角函数是否满足函数概念时，必然以本册第二章的函数概念为评判依据。这一过程可以

再次训练学生的数学抽象和逻辑推理能力，同时让学生深刻体会到函数概念的强大，体会到数学知识的整体性。第二：研究一类函数主要包括函数概念、图象和性质，根据三角函数概念画函数图象最严谨规范，最后再结合概念与图象研究性质。可见，三角函数概念是学习后续内容的重要根基。第三：在同一圆周运动背景之下同时得到了正弦函数、余弦函数和正切函数的概念，说明这三个函数之间一定存在内在联系。这为探索和研究这些三角函数之间的恒等关系埋下伏笔，是研究三角关系的重要依托。如此一来，也将函数主线与运算线衔接在一起，是整章内容的核心。

5.1.2.2 核心工具—单位圆

三角函数的性质本质上是圆的几何性质的代数化。从知识结构框图中可以看到，单位圆的对称性对本章内容研究特别重要，主要体现在三个内容的研究过程中。第一：用任意角的终边与单位圆的交点的坐标定义任意角的三角函数，这种定义方式使得三角函数回归函数本质，同时数与形的结合更加紧密，这也为后续的学习带来便利；第二：《5.3 诱导公式》中，教科书引导学生利用圆的对称性，由两个角的终边对称，得到这两个终边与单位圆的两个交点对称，根据对称点的坐标关系，再利用三角函数的定义得到诱导公式二~六。同时，在《5.5 三角恒等变换》中也利用了圆的旋转对称性，即任意一个圆绕着圆心旋转任意角后都与原来的圆重合的性质进行研究。这种以单位圆作为载体的方式，使诱导公式和三角恒等变换成为一个有机的整体，不仅有助于培养学生的直观想象核心素养，也有利于学生理解性记忆公式。第三：《5.4 三角函数的图象与性质》教学中，再次体现了借助单位圆画函数图象的优越性。比如在画正弦函数图象时，学生不知道非特殊角的正弦值，则无法准确确定点的位置，而利用三角函数的定义，自然地想到了将单位圆与角终边交点的纵坐标对应的“线段”平移即可，这种方法很巧妙地解决了描点的问题，也体现了三角函数概念和图象之间的息息相关。根据单位圆与角终边交点的坐标变化情况，也可以很大程度反映出三角函数的性质，比如值域、周期性、单调性（最值）等，这块内容教材设置了“探究与发现”环节，可让学生课后阅读体会。

5.1.2.3 核心步骤—构建数学模型的重要性

在情境（圆周运动）环节提到，解决问题的方法是构建数学模型，即在平面直角坐标系中，以原点 O 为圆心做单位圆，角 α 顶点与原点 O 重合，以 x 轴的非负半轴为始边，绕点 O 按逆时针方向旋转角 α ， α 终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，观察点 P 坐标随着角 α 的变化情况。该模型通过建立平面直角坐标系将实际问题转化为数学问题，结合函数定义，借助图象，可以更直观的理解给定一个角 α 之后，点 P 的横纵坐标都是唯一确定的，从而得到三角函数概念。整个过程的学习对学生提炼问题，提升数学建模的能力有很大帮助，也为后续《5.6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 》的学习奠定基础。

5.1.2.4 三角函数是数学学科核心素养的集中体现

三角函数的学习既丰富了函数类型，其中所蕴含的数学思想和方法更是全面发展了学生的数学核心素养。

现实世界存在着许多循环往复、周而复始变化现象，比如：单摆运动、圆周运动、交变电流、四季变化、潮汐变化等，这些都可以用三角函数刻画，而对这些现象中的变量关系和规律进行抽象的过程，就可以有力的促进学生数学抽象素养的发展，比如，在三角函数概念的引出环节，“以单位圆 $\odot O$ 上点 P 从圆上点 A 为起点做逆时针运动为背景，刻画点 P 的位置变化情况”，要解决这个问题，考虑到点 P 的位置可以通过点的坐标来体现，所以建立适当的平面直角坐标系，设点 $P(x, y)$ ，同时点 P 在圆上做循环往复运动，可以想到借助旋转角 α 大小来体现运动过程，通过探索由“单位圆上点 P 的坐标与旋转角 α 之间的对应关系”，得出“点 P 的横、纵坐标 x, y 都是角 α 的函数”，这个过程着重发展学生的数学抽象素养。

《标准》（2020年修订）中指出：“直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式特别是图形，理解和解决数学问题的素养。”单位圆在三角函数的学习中扮演着至关重要的角色。例如，在推导三角函数的诱导公式时，教科书巧妙地运用了单位圆的对称性，并结合三角函数的概念，通过研究单位圆上对称点的坐标关系来揭示诱导公式的本质。同样，在推导两角差的余弦公式时，教科书又利用了圆的旋转对称性，并结合两点间距离公式进行了详细的推导。单位圆作为一种直观、几何化的工具，可以帮助学生更好地理解和掌握三角函数的概念和性质，从而培养他们的直观想象力素养。

三角恒等变换公式众多，其灵活多变的特点要求在教学过程中不断引导学生体验类比、推广、特殊化、划归等数学思想方法。这些数学思想方法是“四基”（基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验）的重要组成部分，对于发展学生的数学核心素养至关重要。在实际应用这些公式时，学生不仅能够锻炼数学运算能力，还能提升逻辑推理素养，从而更全面地发展数学能力。

三角函数是描述周期现象的典型模型，而生活中有大量的周期性现象，因此，教科书“5.6.1 匀速圆周运动数学模型”和“5.7 三角函数的应用”对发展学生的数学建模素养有很大作用。

5.1.2.5 核心数学思想与方法

本章内容中体现的核心思想与方法自然与核心概念和核心工具—单位圆有关。第一：数形结合思想。通过观察三角函数图象而得出性质体现了数形结合，另外，利用三角函数的定义，将圆的几何性质转化为三角函数值之间的关系，得到诱导公式。这里也借助了圆的几何直观性。第二：特殊到一般的数学方法和转化与划归数学思想。正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 的一般情况，两者学习联系紧密。对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义，要与 $y = \sin x$ 建立联系，借助其正弦图象的变换来理解参数 ω ， φ ， A 的意义以及对图象变换的影响。而关于正弦型函数的性质研究，则需要通过转化与划归数学思想，将 $\omega x + \varphi$ 整体代换，回归到正弦函数的性质。

5.1.2.6 三角函数内容主线

从图 1.1 可以清晰看到本章两条教学线，整体内容安排是按照“情境解决（圆周运动）—三角函数的概念—三角函数的图象与性质— $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象与性质—应用”的主体结构展开。这条“函数主线”和绪论“三角函数在‘函数’板块中的地位和作用”中提到的，研究一类函数的路径是一致的。彰显了教材编写的内容之间的紧密性和循序渐进的特点，以及保证学生学习函数内容结构的统一性。由此，学生在了解本章主题内容的前提下，结合前面幂函数、指数函数和对数函数的学习过程和方法，可以想到用类比方法学习本章内容，做到心中有数。其次，“同角三角函数关系—诱导公式—三角恒等变换”是运算主线，如图 4.1-2。函数主线的学习可以让学生对生活中的周期现象得以有数学工具进行研究，而运算主线为函数主线做好化简的辅助工作。另外，运算

主线的学习除了提升学生的直观想象能力和数学运算能力之外，也加深学生对单位圆对称性的重要性的体会。

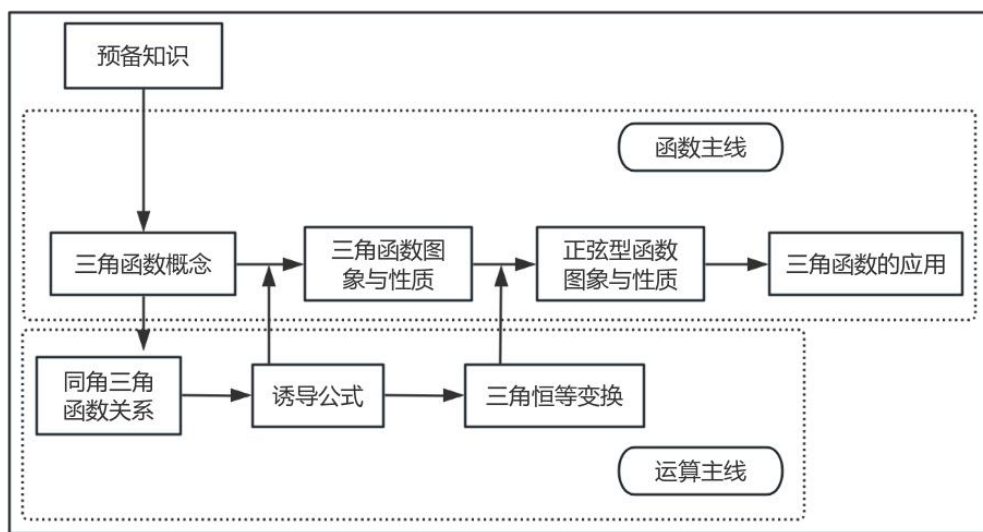


图 4.1-2 三角函数内容主线

5.1.3 三角函数在“函数”板块中的地位和作用

在《标准》（2020 年修订）中，函数概念与性质、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及函数应用被统一归纳在主题二“函数”之下。此外，该主题的教学提示中明确指出，教师应将同一个主题的内容视为一个相互关联的整体进行教学。这一安排有助于学生更全面地理解函数概念及其在不同情境中的应用，培养学生的数学思维和解决问题的能力。函数作为贯穿高中数学课程的主线，要体现整体性思想，就要注重各部分内容之间的有机衔接。按照普通高中教科书（2019 年人教 A 版）教材内容安排，我梳理了该主题中几个板块之间逻辑关系，如表 4.1-1。

主题二“函数”	（2019 年人教 A 版）	主题中的作用
内容板块	教材地位	
函数概念与性质	第三章 3.1-3.2	提供研究函数的一般观念：情境（背景）—研究对象—对应关系—定义—性质—应用
幂函数、探究与发现、函数的应用（一）	第三章 3.3、探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质、第三章	（1）幂函数是初中基础函数类型的推广，是特殊到一般的归纳。由已知到未知的过渡学习，符合学生认知规律；（2）初步应用“一般

3.4	观念”研究幂函数，总结出研究一类具体函数的套路：情境（背景）—概念—图象—性质—应用，从而起到示范作用，为后续学生学习指数函数、对数函数和三角函数做好研究一类函数的过程和方法的铺垫。（3）通过探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质的过程，深刻体会研究一类函数图象与性质的路径与方法。（4）通过实例感受一次函数、二次函数、幂函数等函数模型解决实际问题的过程与方法，进行函数学习的初步应用。
指数函数	第四章 4.1-4.2 (1) 一类新问题情境下的函数，说明学习他的必要性；(2) 通过“问题串”的设计，引领学生初步应用幂函数的“研究套路”，自主与合作探究指数函数的定义、图象和性质。熟练研究一类函数的过程和方法。
对数函数、 函数的应用（二）	第四章 4.3-4.4、 第四章 4.5.3 函数模型的应用 (1) 研究实际问题的需要，也丰富函数类型；(2) 通过对数函数的学习，是对研究一类函数的过程和方法的巩固；(3) 通过函数的应用（二）的学习，可以结合实例，更深入地理解用函数构建数学模型的基本过程，学习运用模型思想发现和提出问题、分析和解决问题的方法。
三角函数	第五章 5.1-5.7 (1) 研究周期类实际问题的需要，也丰富函数类型；(2) 研究函数的套路的灵活应用，如：正切函数的性质与图象，也可以通过性质研究图象。(3) 对现实生活中具有周期性变化的现象，可以构建三角函数模型来解决。

表 4.1-1 主题二“函数”内容板块之间的逻辑关系

主题二“函数”的第一部分“函数概念与性质”的研究在整个主题中的地位至关重要，其作用是提供研究函数的一般观念，所以对相关的研究过程我先进行简要说明。函数概念的学习，教材通过分析四个实际问题，归纳总结出四个问题中的函数的共同特征，抽象概括出函数概念的本质，得到了函数概念。

在这个过程中，我们也梳理出了学习函数“概念”的路径：情境（背景）—研究对象—对应关系—定义—辨析—简单应用。而为了把握客观世界中事物的变化规律，我们需要研究函数的基本性质。教材中提到“变化中的不变性就是性质，变化中的规律性也是性质”，而对变化的观察一般是先从函数图象入手，或者结合具体函数解析式综合研究，运用代数运算和函数图象揭示函数主要性质。教学过程中，先引导学生观察分析，再用自然语言描述，最后抽象到用数学符号语言表达，这个过程对于提升学生的数学抽象、直观想象、数学运算和数学建模素养有很大帮助。在得到函数一般概念，即从“数集到数集的对应关系”定义函数之后，分别研究了幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象与性质，借此研究经验，完善了研究函数相关内容的一般路径：情境（背景）—研究对象—对应关系—定义—图象与性质—应用。所以在“三角函数”板块，教科书按照“情境解决（周期性现象）—角与弧度（预备知识）—三角函数定义—图象与性质—应用”的结构展开。主题二“函数”整个板块可以看做以“函数”为主线的主题类单元，整个单元的学习就是在依据几个板块知识的内在联系确定一类研究对象的“研究路径和方法”，并不断地进行应用的过程。

山西省教育科学研究院的薛红霞老师在《四川省 2022 年普通高中新课程新教材》培训中也指出：普通高中教科书（2019 年人教 A 版）必修第一册函数主题结构就像“一节课”，定理是“函数概念和性质”，“幂函数”是例 1，“探究 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质”是练习，“指数函数”“对数函数”“三角函数”“函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ”分别是变式 1，变式 2，变式 3，变式 4。这个比喻很形象的体现了他们之间的内部联系，也充分体现了《标准》（2020 年修订）要求的整体性思想。

另外，课程标准中也提到，主题二“函数”建议 52 课时，普通高中教科书（2019 年人教 A 版）必修第一册的教师教学用书建议“三角函数”板块约需 24 课时，接近占“函数”板块的一半课时，由此可见，“三角函数”是“函数”主线的重要组成部分。

5.2 确定单元内容

本章知识结构框图，在主体框架之下，凸显了部分与部分内容之间的关联性。根据图 1.1 展现的课时内容之间的联系，可以将本章内容重新整合为四个“小单元”，如图 4.2-1。

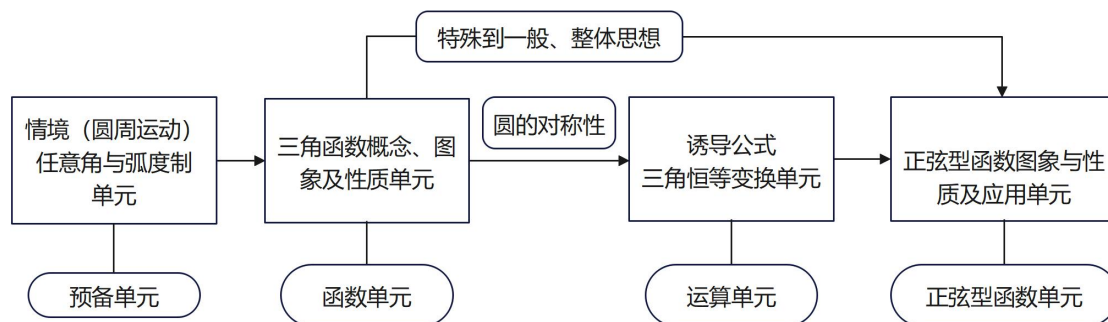


图 4.2-1 三角函数单元教学主线

《5.1 任意角与弧度制》为什么被称为学习“三角函数的概念”前的“预备知识”呢？我们知道，“三角函数”是一类典型的具有周期性的函数，所以其本身还是函数。根据人教 A 版（2019 年）必修一第三章 3.1 函数的概念及其表示中描述的函数概念“一般地，设 A, B 是非空的实数集，如果按照某种确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y = f(x), x \in A$ ，这是用非空数集之间的“对应关系说”表述的函数概念，而三角函数概念也应符合这个“对应关系说”。我们研究的问题是“根据角的大小变化刻画 P 点的位置变化”，所以先要对初中接触的角的范围和单位进行推广和补充，角的范围从 $0^\circ \sim 360^\circ$ 推广到任意角，再学习角的另一种单位制—弧度制，并从角度制与弧度制的互相转化中，实现弧度制下的角的大小和实数集 R 的一一对应，由此在学习“三角函数的概念”时，可谓“顺理成章”。

《5.2.1 三角函数的概念》和《5.4 三角函数的图象与性质》如图 4.1-1 所示，逻辑顺序清晰明了，符合我们研究一般函数的路径，所以可以划分为一个“小单元”。其中体现两节内容衔接最紧密的地方，是画正弦函数图象的过程。借助单位圆上任意一点在圆周上旋转一周回到原来位置的特点，只需研究 $[0, 2\pi]$ 内的图象，再将图象左右平移即可得到 R 上的正弦函数图象。根据“描点法”画图时，非特殊角的正弦值我们并不知道，所以，为了确定纵坐标，就要借助单位圆。先在 $[0, 2\pi]$ 内任取一个值 x_0 ， x_0 为横坐标，在 x 轴上标出位置，再以单位圆与角 x_0 终边交点的纵坐标平移确定点，最后借助信息技术描出足够的点，用光滑曲线连接起来，得到正弦函数图象。

在学习《5.2.1 三角函数的概念》的性质研究中，我们借助单位圆和三角函数概念，数形结合，研究了终边相同的角的同一三角函数值关系，自然地，“若角的终边不同时，他们的三角函数之间又有什么关系呢？”通过这个问题自然过渡到《5.3 诱导公式》的学习。根据问题探究从特殊到一般的过程，可以引导学生先思考两个角的终边有对称关系的情况，借助单位圆的对称性不难得出结果。然后再去探究若两个角都是任意角的情况，由此进入到《5.5 三角恒等变换》的学习。这三部分内容，通过两个探究问题自然衔接起来，不仅将零散内容有序连接，同时能让学生更好的构建知识体系。这三部分内容探讨的本质相同，教师在教学过程中完全可以看做一个“小单元”教学，或者在章总结时，做一个“小单元”的运算复习专题。

《5.6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 》、《5.7 三角函数的应用》也可以化为一个“小单元”。从新情境入手，研究“筒车上的盛水筒做匀速圆周运动，尝试构建数学模型来刻画盛水筒离水面的高度与时间之间的关系。”得到函数解析式 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0$)。从解析式看， $y = A\sin x$ 就是 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在 $A=1, \omega=1, \varphi=0$ 时的特殊情况，所以可以在 $y = A\sin x$ 图象的基础上研究参数变化对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响，以及利用整体代换思想研究其性质。从正弦函数到正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的过渡学习，既是知识层面由浅及深、由易到难的学习过程，更是思维层面更高维度培养学生逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养，这部分内容的研究对学生综合素养有很大提升。最后因为现实生活中存在大量的周期变化现象，如简谐运动、交变电流等，所以自然地开始《5.7 三角函数的应用》的学习。整个学习过程同样符合研究一般函数的路径：情境—函数概念（解析式）—图象（变换）与性质—应用。

5.3 分析教学要素

5.3.1 课标分析

课程标准（2020 年修订）对于《三角函数》这一部分的内容，主要做了以下几个方面的要求：（1）理解与掌握基本概念：要求学生理解和掌握三角函数的基本概念，包括正弦、余弦、正切等函数的定义、性质、图像和变换等。（2）掌握基本公式和恒等式：学生需要掌握三角函数的基本公式和恒等式，如和差

公式、倍角公式、半角公式等，并能灵活运用这些公式进行三角函数的化简和计算。（3）理解和应用三角函数的周期性：学生需要理解三角函数的周期性，掌握周期的概念和计算方法，并能应用周期性质解决相关问题。（4）掌握三角函数的图像和变换：学生需要掌握三角函数的图像和变换规律，包括平移、伸缩、对称等变换，并能通过图像分析三角函数的性质。（5）理解和应用三角函数的实际应用：学生需要理解三角函数在实际生活中的应用，如解决三角形问题、测量高度、距离等，并能运用三角函数的知识解决相关问题。

总体而言，课程标准对于《三角函数》这一部分的要求更加注重基础概念和公式的掌握，同时也加强了对三角函数图像和变换的理解和应用能力的考查。同时，还注重将三角函数的知识与实际生活相联系，培养学生的应用意识和实践能力。

5.3.2 学情分析

新课程改革之后，人教A版（2019年）教材必修一相比旧版人教A版教材对部分内容的顺序做了调整，凸显了教材内容的整体性、连贯性和逻辑性。比如函数板块。教学中，对“函数”板块整体可以实行“贯通培养”，也就是将研究函数的一般路径、研究内容和研究方法贯穿始终。先让学生掌握函数的基本研究内容和研究路径这些大框架，再以具体函数为例，研究每个部分。以大框架为“帆”，那我们研究任何一类函数都不会“迷路”。通过所学函数种类越来越多，让学生不断自主建构函数板块的内容，形成自我函数结构图，这也是数学核心素养连续性、整体性和阶段性的体现。所以，对于新篇章的开始，并非完全孤立与已学内容，相反，已学内容服务于新篇章。下面我从三方面分析一下学生的认知情况。第一方面：人教A版（2019年）教材必修一已学的第三章至第四章内容对本章内容学习的作用；第二方面：学生对本章内容中涉及的生活背景和单位圆的掌握情况分析；第三方面：针对本章具体内容谈谈学生的认知困难。

首先，本册教材的第三章主要内容是“函数的概念与基本性质”，“幂函数”，“ $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质”。第四章学习的是“指数函数与对数函数”。函数的一般概念旨在让学生掌握从集合和对应关系的角度描述的函数定义，这种“对应关系说”描述的函数定义更广泛，与现实生活中的情景贴合度高。三角函数是描述现实中的周期现象的函数，函数定义的研究过程更有利于学生理

解三角函数定义。从函数的一般概念、表示与性质等学习中，还让学生了解了研究函数的一般路径与方法，再通过后续学习的四类具体函数的内容、过程与方法，学生从中收获了丰富的数学思想方法和数学活动经验。这些都为三角函数的学习铺平了道路，让学生在学之初就对本章要学习的内容和方法了然于心。

第二方面，三角函数研究的周期性现象在生活非常常见。在章引言中提到的物理中已经学习过的圆周运动、简谐振动、交变电流等，地理中学习的季节轮替、潮汐变化等，生物中学习的各种动植物的生长规律等。这些知识都是三角函数的研究范畴。只是，从实际情境到三角函数概念是数学抽象的过程，相对困难，所以，开始选择的生活情境更简单化、特殊化，以单位圆和匀速圆周运动为媒介进行研究。而说起单位圆，初中平面几何中对圆的研究已非常成熟。将圆的中心对称、轴对称和旋转对称特征应用到三角函数中，直接得到三角函数的性质。

第三方面，关于本章学习逻辑线和一些细节处理方式等，学生会有困惑，需要教师提前预设教学方式。首先是弧度制引入的必要性解读，这个在“确定单元内容”中的预备单元就已解释了。其次，既然锐角三角函数是任意角三角函数的特殊情况，学生会疑惑为什么不按照特殊到一般，从已知到未知的思路教学。所以，这里一定要让学生理解本章学习的逻辑线是按照研究函数的一般路径开展的，任意角三角函数的定义本质是符合函数概念，他是一类函数，而非锐角三角函数的推广研究。还有，三角函数是几何量（角与有向线段）之间的直接对应，不是通过对 α 进行代数运算得到函数值^[31]，这是一个不良结构，学生不习惯于这样的对应关系，学习比较困难。而且，从圆周运动情境到三角函数概念需要数学抽象概括能力，这部分学生学习有困难，所以需要教师通过“问题串”的形式分解目标，引导学生结合函数概念理解并描述三角函数概念。另外，本章的“运算主线”中涉及到的公式较多，记忆口诀只是辅助学生记忆，最重要的必须让学生从本质——“诱导公式是三角函数的几何性质”理解。最后，三角函数的应用学生学习过程中难度大。三角函数概念的研究背景被特殊化了，实际生活中的周期现象复杂多变。在本章最后的应用部分，教材主要列举了摩天轮、筒车转动、弹簧振子振动（简谐运动）、交变电流、潮汐现象等所蕴含的周期现象进行研究，这部分设计到数学建模，对学生的数学抽象、数据分析、

数学运算、直观想象等学科核心素养要求高，需要结合课标要求和学情分层设置教学目标。

5.3.3 教学方式分析

顺应新课改的思想，高中教学更应该注重学生的学习过程，尤其是思考的全过程，重视数学思维能力的发展与培养。而教学方式的选择直接影响学生的学习效果。平时教学中常用的教学方式有传统讲授法、互动教学法、小组讨论法、探究式教学法、情境教学法和启发式教学法等。探究式教学法是通过引导学生探究问题、发现问题、解决问题的方式，培养学生的创新思维和解决问题的能力。情境教学法是通过创设情境，将数学知识与实际生活联系起来，帮助学生更好地理解数学知识的实际意义和应用。启发式教学法是通过启发式的问题或实例，引导学生自主思考、发现规律、得出结论。这种方式可以培养学生的自主学习和思维能力。

本章整体围绕一类周期现象一圆周运动展开研究。在函数主线中，三角函数概念的引出就是通过创设情境，将情境简化提炼出核心问题，再以启发式的问题不断引导学生归结到函数的概念，并由已学知识主动判断得到三角函数的概念。这里主要用了情境教学法和启发式教学法，激发学生探究问题的欲望，培养他们积极主动思考问题，学会融会贯通解决问题的能力。另外，运算主线涉及的三部分内容：同角三角函数关系、诱导公式和三角恒等变换，他们的衔接也是以问题串的形式串接在一起，由易到难，由特殊到一般，引导学生主动探索学习。在不断深入学习的过程中，不仅体会到三角函数概念的核心地位，更体会到了借助单位圆，数形结合探究问题的方便。这一过程主要是启发式教学和探究式教学相结合，启发学生思考方向，并学会借助单位圆主动探究。

为什么说教学方式分析是单元教学设计的一大要素呢？崔允漷指出，学科核心素养是指学生学完某学科之后逐步形成的关键能力、必备品格与价值观念。李润洲也提到，学科核心素养是“在问题情境中借助问题解决的实践培育起来的”。而评判学生是否真正具有相应的学科素养的最有用的工具之一就是设置恰当的真实情境，学生在真实情境中能综合运用所学知识完成相应任务就代表素养的落地。《三角函数》章的《5.7 三角函数的应用》就有大量的真实周期性情境问题，比如摩天轮、筒车转动、弹簧振子振动等，让学生以三角函数相

关知识为矛攻克实际问题，在此过程中采用探究式教学法，达到培养学生的数学建模、逻辑推理、数据分析和数学运算等学科核心素养的最终目标。

5.3.4 信息技术辅助教学

在数学单元教学中，通过现代信息技术手段与教学内容的深度融合，可以以形象、立体、动态的方式展示和传递数学知识。这种教学方式能够帮助学生更深入地探索数学知识的内部关联、变化和规律，充分发挥学生在课堂中的主体作用。

信息技术辅助教学主要涉及以下几个方面：数字资源集成、互动教学平台、可视化辅助教学、实时数据分析、个性化教学设计、多媒体教案制作以及在线评价与反馈。（1）数字资源集成是指将各类数学教学资源（如视频、图像、音频、动画等）通过数字技术集成到一个平台上，方便教师查找和使用。这极大地丰富了教学内容和手段，使教师能够更直观、生动地展示数学概念和方法。

（2）互动教学平台提供了教师和学生实时交流的机会，学生可以随时提问，教师也可以即时解答。这种即时反馈的机制有助于教师更好地了解学生的学习情况，及时调整教学策略。（3）可视化技术能够将抽象的数学概念和方法以形象、直观的方式展现出来，帮助学生更好地理解 and 掌握。例如，通过三维图形展示函数图像的变化，可以使学生更深入地理解函数的性质。（4）通过对学生学习数据的实时分析，教师可以了解学生的学习进度、难点和兴趣点，从而进行更有针对性的教学。这种数据分析技术有助于实现个性化教学，提高教学效果。

（5）现代信息技术允许教师根据学生的具体情况进行个性化教学设计，包括教学内容、教学方法、教学节奏等。这种个性化的教学方式能够更好地满足学生的需求，提高他们的学习兴趣和效果。（6）多媒体教案结合了文字、图片、音频、视频等多种元素，使教学内容更加生动有趣。通过多媒体教案制作，教师可以轻松地创建出富有吸引力的教学材料，提高学生的学习兴趣和参与度。（7）在线评价系统可以方便地对学生的学习成果进行评价和反馈。这种实时的反馈机制有助于学生及时了解自己的学习情况，找出问题并进行改进。同时，教师也可以根据学生的反馈调整教学策略，优化教学效果。

综上所述，现代信息技术在数学教师进行教学设计中发挥了重要作用。通过这种教学方法，可以有效地培养学生的高水平数学思维，进一步提升他们的数学学科核心素养。

5.4 制定学习目标

邵朝友和杨宇凡通过对我国近十年的单元教学相关文献分析,整理得到单元目标确定包括目标来源、目标层级关系、目标的整合性三个维度^[18]。目标最直接来源是国家课程标准,本研究依据的就是课标(2017版2020年修订)。课程标准是国家层面的教学指导性文件,具有权威性。课标在“教学与评价建议”中明确强调,教师在教学活动中应准确理解和把握课程目标、内容以及学业质量的要求。通过合理设计教学目标和实施相应的教学计划,教师不仅帮助学生掌握知识技能,更应促进他们数学学科核心素养的提升和水平的达成。这种教学方法有助于学生在全面发展的基础上,提高数学思维和解决问题的能力。另外,文献中提出的目标层级是“核心素养—学科核心素养—课程标准/内容标准—单元目标—课时目标—活动目标”。课程目标是学科教学的最高层次目标,单元教学目标是一个单元所有学习内容的总体目标,课时教学目标则是教师在一节课中要达成的目标,具有可操作性^[10]。课标到课时目标的落差较大,结合何小亚教授的文献内容,在制定具体的课时目标时,不再按照“三维目标”的格式阐明目标,因为“三维目标”割裂了学习目标的整体性,与课程标准中提倡的注重“知识内容结构化”不符,在实际教学过程中,知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三者是不可分割的。所以直接按照三维目标结构形式呈现。也就是目标中要对知识与技能、过程与方法、情感态度价值观融合表达。

即学生通过什么方式的学习了解(理解)什么,从而掌握什么数学思想方法、数学能力或者形成数学眼光和积累基本活动经验,最后提升数学核心素养的大致形式。关于数学核心素养的培养,在某一具体课时或小单元中可以逐层体现,不必面面俱到,应该有所侧重。例如,本单元比较突出的是几何直观和数学建模。而基本活动经验,主要是通过三角函数的应用,积累问题解决和数学建模的经验。情感态度价值观指的是学习数学具体内容时的喜好与感受,激发的数学兴趣和形成的数学信念。

按照目标层级,单元目标必须依托于学科核心素养和课程目标来制定,也就是逆行设计。课标(2020年修订)提到的高中数学课程目标概括来说就是:通过高中数学课程的学习,学生获得未来自身发展所必须的“四基”;提高从数学角度处理问题的“四能”;不断发展数学学科核心素养,并且,在情感态度和价值观方面有较大收获。比如:提高数学学习的兴趣和自信心、养成自主

学习习惯、树立敢质疑善思考、严谨求实，勇于创新的科学精神、认识数学本身具备的科学文化和审美价值。可见，数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现。课程标准指出“四基”是培养学生数学学科核心素养的沃土。因此，可先以课程标准要求的相关内容的学科核心素养和课程目标为终极目标，根据具体内容要求掌握的“四基”和“四能”为载体确定单元目标，再以三维目标的结构形式制定课时目标，由此使得课时目标具有可操作性。同时，课时目标也是学科素养的具体外化表现形式。本研究后续以《三角函数》中的三角函数概念单元为例给出详细单元目标。

5.5 设计学习评价

根据（2020年修订）的课标，单元学习评价特别重要，它针对单元教学目标 and 不同教学情境，对学生的学习结果、行为、态度等进行价值判断。评价的主要目的是评估学生的学习效果，从而反思和改进教师的教学方式。通过这种方式，可以诊断学生在学习过程中遇到的问题，进而优化教师的教学策略，确保学生数学学科核心素养的全面发展。

结合逆向教学设计理论，评价任务的设计包括预设评价任务、评价方式和评价标准。首先，评价任务的开发多以设计教学活动中的“问题串”形式呈现，为了保证评价任务设计的质量，关键是要注意凸显问题设计的层次性，设置层递性问题链，启发学生不断深入思考。而且，评价任务设计要具有情境性和可测性，将任务设计融入现实情境，使设计可操作、可测，以准确判断学习目标的达成。^[5]

其次，评价的方式分为过程性评价和结果性评价，我们根据不同的内容安排合适的评价方式。结果性评价主要以标准化测验判断学生的知识掌握程度。过程性评价是及时动态地解释教学活动中学生学习的各类信息，以揭示、判断和生成教学价值的活动^[5]。过程性评价也叫表现性评价，他关注学生在课堂中的综合表现，反馈并指导学生解决存在的困难，从而推动学生深度学习。过程性评价任务“内嵌”于教学过程设计。在教学过程设计中，根据教学目标，预设需要学生思考、探究的问题，也就是预设出评价任务。然后考虑需要学生以什么形式完成任务，比如独立完成、小组合作或者课后探究等。最后以教学目标作为评价标准，教师根据学生的实际反馈来判断是否达到相应的学习目标，并采取相应的教学措施。

根据课标（2020 年修订），评价过程中应特别关注以下几点：首先，要确保知识技能的评价范围和难度适中。可以结合课堂观察、口头测验、开放式活动课内外作业和考试等形式来实现全面考察。其次，评价工具的设计应有利于考察学生的思维过程、深度和广度，以培养学生的核心素养为目标。为此，教师需要灵活采用多样化的教学方法，如自主探索、合作讨论，并在课后布置有针对性的开放性问题。此外，教师在评价过程中还应关注六个数学学科核心素养的分布和水平，确保评价内容能够全面反映学生的核心素养发展情况。最后，评价应聚焦于数学的核心概念和通用方法，以帮助学生建立扎实的数学基础。

综上所述，通过科学合理的评价工具和方法，我们可以更全面地评估学生的学习情况，进而调整教学策略，促进学生数学学科核心素养的全面发展。

5.6 设计学习过程

在第 2 章的理论基础的研究中，已经提出了 CTI 教学模式。这种教学模式主要基于建构主义理论，是完全从学生角度出发设计的教学，更符合新课程改革提出的素养教学。所以，本研究后续的学习过程设计以 CTI 教学模式为准。这种模式的教学程序细分为：设计问题情境—知识的探究与建构—知识的理解应用—知识的迁移应用—知识的创新应用。这五步教学程序可能在一节课中不能完成，这是正常现象，但 CTI 模式作单元教学设计，可能会在一个单元的教学过程中完成。其中，问题情境的设计一般考虑满足问题性、真实性、情节性和教育性。真实有趣的情景是一堂课良好开始的助推器。知识的探究与建构一般包括对新知识获取的探究，还有命题的证明和知识应用中对解题思路及方法的探究，这个环节贯穿教学始终，有利于培养学生的综合能力。知识的理解应用是对知识点的直接应用，属于第一层面，主要聚焦“四基”的培养，同时渗透核心素养一级或二级的发展。知识的迁移应用是在知识的理解应用基础上的第一次进阶，聚焦“四能”的培养，在此基础上发展学生的二级或三级核心素养，同时渗透品格和价值观教育。知识的创新应用是在知识的理解应用基础上的第二次进阶，教学以学生提出更深层次问题和解决结构不良问题为主要任务，核心素养指向是创新意识和实践能力的三级水平培养。整个教学过程让学生在知识学习过程中不断利用已有知识和已有的学习经验，举一反三的解决未曾见过的问题，这是培养学生数学学科核心素养向更高水平发展的关键表现。

5.7 设计作业

数学作业设计是教学设计的重要环节之一。数学单元作业既是评判数学教学效果,学生学习掌握情况的一种方式,也是再次加强培养学生核心素养的手段,能很好的体现核心素养发展的阶段性、连续性、整合性等特点。《课标(2020修订)》对6个数学核心素养做了三级水平划分,并对每一个水平的具体涵义与操作做了细致地描述,这个水平划分框架是数学作业设计的依据。但是这些指标描述很细致,稍嫌繁琐,不太容易直接应用。本研究借鉴喻平教授提出的核心素养对应的水平描述框架^[26]。

在具体设计作业时,首先要重视教材习题的研究。人教A版教材中将习题分为练习、习题和复习题,在习题和复习题中又设置复习巩固、综合运用和拓展探索三个层面,对核心素养水平的要求逐级提升,层次分明。如何分析这些题目呢?如何取舍?他们考察了学生哪些核心素养?核心素养考察是否全面?这就需要教师提前准备好两点:一是教师独立解答习题,并结合学情和目标要求做一个全面分析,考察习题的类型、习题涉及的考点、习题中训练不同核心素养的题目占总量的比例和分布等基本参数是否合理,如果在这些方面存在某些缺陷,就应当补充适当的习题,或者对教材中一些题目进行恰当的改造,包括对题目的变式、推广,将封闭性问题改造为开放性问题。二是要注意不同类型的作业在培养学生核心素养的方面扮演着不同的角色。一般情况下,可以把数学作业划分为三种形式和四种类型。三种形式包括阅读作业、习题作业、写作作业。阅读作业方面表现为阅读数学课外读物,如数学文化作品、数学史、数学科普作品等。习题作业方面表现为解决知识迁移问题,解决条件不充分或条件冗余或结论不唯一的开放性问题,解决将题目进行变式或推广去发现新结论的问题。写作作业方面表现为撰写数学小论文。数学作业四种类型包括基础类、综合类、探究类、实践类。基础性作业是促进学生基础知识的理解和巩固,主要训练学生的一级数学学科核心素养;综合性、探究性作业的功能是培养学生的思维与能力发展,目标定位在二级和三级数学学科核心素养;实践类作业包括数学实验、实地测量或者社会实践调查等,需要在新教学中得到重构,对核心素养要求高。基础类、综合类、探究类是数学作业的主要类型,对应的核心素养水平逐步进阶。因此,在进行作业设计时应当考虑三类作业在作业体系中的比例,总体控制在5:3:2或5:4:1左右比较恰当^[26]。我们应结合具体章节

的教学目标、知识特点和课型等，设计相应的作业形式和作用类型类型。关于《三角函数概念》小单元作业设计，我的单元作业框架如表 4.7-1。

第（ ）课时 (课型) 习题题号	考点	核心素养及水平	题目类型	设计意图
1	...	一级或（二级、三级）	基础类或(综合类、探究类、实践类)	(1)结合教学目标对素养的要求分析习题中训练不同核心素养的题目占总量的比例是否合理； (2)基础类、综合类、探究类是数学作业的主要类型，考虑对应的核心素养水平在作业体系中的比例，总体是否控制在 5:3:2 或 5:4:1 左右。 (3)若有补充习题单独列在表后，并说明设计意图。
2	...	...	...	
...	...	...	...	

表 4.7-1：指向核心素养的单元作业设计框架

5.8 教学资源选编

单元教学资源选编是指依据不同单元教学目标，对各类教学资源进行优化与组合，为学生的学习提供多样化的资源支持。选编的教学资源要以教学目标为导向，以满足学生学习需求为中心，以提供丰富的单元教学方法选择为着力点，为单元教学活动的顺利开展提供有力支持和有效支撑。《三角函数》单元内容庞大，根据 4.2 单元内容的重新划分，后续根据单元教学设计的需要，对教材中的例题、习题、阅读与思考等内容重新调整。

6 《三角函数概念》单元教学设计案例研究

6.1 筛选研究案例

基于本研究第二章对 5 篇代表性核心文献的认真研读，综合分析，梳理出的单元教学设计操作步骤，第三章我通过文献研究分析了《三角函数》单元教学设计框架。下面我将以前两章的研究结果为依据开展本章研究，通过对知网文献检索寻找的具体案例分析，了解《三角函数概念》单元目前的研究现状，取长补短，从而明确我的研究重点。为第六章进行完整的《三角函数概念》单元教学设计案例开发做参考。本章选择案例研究。

关于《三角函数概念》单元具体内容的确定，不同研究者有不同的解读，但都是基于《三角函数》章的单元教学分析基础上确定的《三角函数概念》单元内容。这种研究路径与新人教 A 版（2019 年）教材的编写意图吻合，考虑到了教材章节内容的逻辑性和整体性特点。所以我以“核心素养下三角函数单元教学设计”为主题在中国知网数据库进行文献检索，发现与主题高度相关的文献共有 13 篇，时间从 2019 年-2023 年。其中硕士论文 5 篇，特色期刊共 8 篇。结合我的研究需要，通过对 5 篇论文研究内容和思路的解读，发现选用新人教 A 版（2019 年）教材、论文中谈到了《三角函数概念》相关教学设计的硕士论文有 4 篇。这 4 篇文献作者都是在高中一线工作的老师，而且他们中有 3 人选用了实地调查，这样他们的研究结果更贴合教学实际，参考价值更高。曹弋函选用访谈法，访谈对象是河南省商丘市某市重点高中；谭海丞选用案例研究和新人教 A 版和 B 版教材对比研究；杨瑜倩选择问卷调查法，选用对象是兰州市某市高中数学教师；马泽蓉选择问卷调查法，北京市某中学的四个班学生作为实施对象。

6.2 确定研究内容

为了更深入地对 4 篇文献进行分类与分析，本研究构建了编码系统，如表 5.2-1 所示，文献的相关内容将与编码对应，每个编码由两个代码组成（大写字母代表维度，阿拉伯数字代表子维度）。

维度	子维度	编码
学习目标确定 A	制定单元目标的依据	A1
	目标表现形式	A2

学习评价设计 B	评价形式及应用	B1
学习过程设计 C	学习活动是否围绕目标展开	C1
	学习活动是否含有评价设计	C2
	核心学习活动设计	C3
作业与检测设计 D	作业类型与形式	D1
	作业设计是否考察核心素养	D2

表 5.2-1：研究维度编码表

之所以提出这些维度，主要基于如下思考。从课程角度看，李润洲教授提出单元设计需要追问三个基本问题，即“到哪里去”“怎么去那个地方”“怎么知道到了那个地方”，由此我增加学习目标确定 A、学习评价设计 B 和学习过程设计 C 三个维度。因为单元目标是教学方向，所以一定要依据课标，结合教材和学情制定，再者单元目标要具体可操作，所以后续研究中我主要考察 A1 与 A2 两个维度；评价是紧跟目标设置的，所以有 B1 维度，后续案例研究中我主要分析案例中是否有结合《三角函数概念》内容设计具体评价形式；学习过程设计是对目标的落实，整个过程中要通过一定的启发式教学方式引导学生突破重难点，如何启发？如何设问？这些是我研究的重点。（3）作业与检测设计 D 是教学评价的一种方式，也是学生理解数学知识、培养数学思想方法、发展核心素养的重要方式。所以我主要研究案例中设计的作业题目意图，以及有没有贴合目标，有没有发展学生核心素养的作用。

6.3 案例研究总结

作者编号 学习目标确定 A

- ①曹弋函
1. 作者强调单元目标格式：规范写法开头应该是“学生能……”、“学生会……”，而不是“使学生……”、“教会学生……”。
 2. 单元目标内容：

3.1.1 三角函数的概念	1.经历以单位圆建立数学模型，刻画圆周上点的运动的过程，理解三角函数的定义；	3 课时
3.1.2 同角三角函数的基本关系	2.能从定义出发，判断三角函数的定义域及其函数值的符号，理解公式一； 3.能初步应用三角函数的定义分析和解决与三角函数值有关的一些简单问题 ^[25] ； 4.理解同角三角函数的基本关系式。	

②谭海丞 1.单元内容划分：“三角函数的概念单元”内容有：任意角、弧度制、三角函数定义、同角三角函数关系、诱导公式。共需要8个课时完成。

2.单元目标内容：了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化；理解任意角三角函数的定义；借助单位圆的对称性，推导出诱导公式；理解同角三角函数关系。

③杨瑜倩 在分析了《三角函数》单元教学设计要素之后，只设计了《三角函数概念》一课时的教学目标，目标内容是：（1）在上一节课（任意角与弧度制）教学的基础之上，深化对三角函数的定义理解，能够从图形关系与函数关系的角度形成对三角函数定义的认知。（2）通过借助单位圆上任一点的运动轨迹，理解三角函数定义的几何意义，进一步感受三角函数的诸多函数性质。

④马泽蓉 在整体分析三角函数单元教学的基础上对于《三角函数的概念》一课时进行详细的设计，教学目标为：（1）知道三角函数可以刻画周期性现象，匀速圆周运动是周期现象的代表。（2）借助单位圆理解任意角的三角函数的定义，根据定义认识函数值的符号。（3）能初步运用定义分析和解决与三角函数有关的简单问题。（4）体验三角函数概念的产生、发展过程，领悟直角坐标系的工具功能，丰富数形结合的经验。

表 5.3-1：学习目标研究表

关于 A1：四篇文章都是依据课程标准中的内容要求，结合实际教学和学情进行制定。关于 A2：①强调了书写单元目标的格式，体现了学生为主体的课堂导向，但细化的课时目标与核心素养结合性不高，在《三角函数概念》单元目标中没有提及发展什么核心素养。②的《三角函数概念》单元目标重点描述了知识层面的要求，没有提及如何培养学生数学思想方法和相关核心素养的过程。③有过程性描述，使得单元目标具有可操作性，但没有体现核心素养的发展。①③④表现形式比较一致，都会注意过程、方法与结果的融合。基于此，结合

本研究第 4 章关于单元学习目标的理论研究，我会按照目标层级，以三维目标结构形式呈现，并明确指出具体的内容发展的核心素养。

作者编号 学习评价设计

- ①曹弋函 1. 评价主要包括形成性评价和总结性评价。形成性评价主要有课堂参与讨论、随堂小测试以及课下作业等形式；总结性评价主要设计单元检测题目，对学生的知识掌握程度进行检测。
2. 预设了《三角函数》单元评价任务，形式是一套单元测试题。从考察维度、题号分布和考察内容进行说明，针对每道题，还有设计意图说明，包括学生核心素养的发展。
- ②谭海丞 没有学习评价设计
- ③杨瑜倩 1. 单元评价遵循的原则：（1）评价主体应多元化，包括学生自评、他评、家长以及教师评价；（2）评价形式应多样化，主要形式有书面作业、课堂观察、小组表现等；（3）评价内容应多维化，从学习态度、参与程度、学习方法、活动探究等方面对学生按等级进行评价。
2. 作者设计了“三角函数”单元综合评价表；同时将学习水平分为了解、理解、应用、思维四个角度，根据具体学习内容，确定了“三角函数”单元认知目标评价表。
- ④马泽蓉 因为作者选择了“问卷调查法”，所以在评估教学结果时，采用“看课堂”和“测试卷”两种模式。“测试卷”侧重于对学生基础知识与基本技能的掌握。考试被分成三个方面，分别是基础强化（20 分）、拓展应用（30 分）、自我挑战（50 分）。

表 5.3-2：学习评价设计内容分析表

关于 B：①指出评价主要包括形成性评价和总结性评价。但作者提到形成性评价受课堂的影响较多，若是提前预设，其实用性并不强，故只有总结性评价设计。关于单元测试题，作者设计依据是根据单元内各个教学目标的重要程度对各个考察点的所占分值进行合理划分，难度适中，题目数量合理。③作者针对三角函数提供了“单元认知目标评价表”和“单元综合评价表”。④测试卷有分层考察，但是解答题涉及到二倍角公式和函数性质的考察，不符合本节课教学内容要求。“看课堂”没有具体的评价形式，在《三角函数概念》一课时教学设计中也没有体现过程性评价。

综上所述，“单元认知目标评价表”是对学习内容里每个知识点掌握程度的要求，这点在制定单元-课时学习目标中有明确说明，所以在《三角函数概念》单元教学设计时，我不再赘述。我的评价分为结果性评价和过程性评价，关于结果性评价，结合崔允漷教授所说，设置的单元目标保证至少三分之二的学生达到。所以，可以在三角函数概念的单元作业设计中指出考察的核心素养及等级，再根据学生答题正确率评价目标是否达成。

作者编号 学习过程设计

①曹弋函 没有以单元为单位进行完整教学过程设计，只有 5.5.1 “诱导公式（第一课时）”教学设计和 5.5.2 “正弦定理、余弦定理”教学设计。

②谭海丞 回顾 1：根据匀速圆周运动的情境，回顾之前提出的两个函数模型 $f(\alpha) = x$ 、函数 $g(\alpha) = y$ ，自变量是角 α 。

回顾 2：初中也学习过与角有关的函数，记为锐角三角函数。分别为： $\sin \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$ ，
 $\cos \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$ ，
始课
概念

问题 1：你认为这两个关于角的函数“ $f(\alpha) = x$ 、 $g(\alpha) = y$ ”与初中锐角三角函数概念。有什么区别和联系？请你举一些例子进行你的叙述。

3. 教学过程设计中无学习评价设计。

③杨瑜倩 1. 教学过程设计的第一环节是“复习旧知，以旧引新”，作者提出第一个问题“说说上节课学习的任意角三角函数概念，根据高中所学，能说明这几个函数的三要素吗？”这个问题本应是本节课才要突破的内容，但是作者说是上节课所学内容，导向模糊。阅读作者后续设计的内容，发现与这一环节无必然联系。后续以“问题串”式设计，而且针对具体问题在设计意图中点明了要发展的核心素养，体现了围绕核心素养的教学，后续我会借鉴。

2. 教学过程设计中无学习评价方面的设计。

④马泽蓉 1. 作者在整体分析三角函数单元教学的基础上对于《三角函数的概念》一课时进行详细的设计。教学过程问题串引领，以师生问答的形式开展。我摘取了三角函数概念的引出过程。

教师：如图 8，以单位圆的圆心 O 为原点，以射线 OA 为 x 轴的负半轴，建立直角坐标系，点 A 坐标为 $(1,0)$ ，点 P 的坐标为 (x,y) ，射线 OA 从 x 轴的负半轴开始绕原点逆时针旋转角 α ，终边为 OP 。当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时， P 点的坐标是什么？当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 和 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 时， P 点的坐标又是什么？能唯一确定吗？一般地，任意给定一个角 α ，它的终边 OP 与单位圆交点 P 的坐标能唯一确定吗？

学生：利用勾股定理可以发现，当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时， P 点的坐标是 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ，当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 和 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 时， P 点的坐标是 $(0, 1)$ 和 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。通过观察几个特殊角发现，当角 α 确定时，点 P 的坐标是唯一确定的！

教师：一般地，任意给定一个角 α ，它的终边 OP 与单位圆的交点 P 的坐标，无论是横坐标 x 、纵坐标 y 都是唯一确定的，所以可以说 P 的横坐标 x 、纵坐标 y 是角 α 的函数。

2. 教学过程设计中无学习评价方面的设计。

表 5.3-3：学习过程设计内容分析表

对于 C1, 四篇文章都是围绕各自的教学目标开展教学设计。对于 C2, ①③④都只有学习评价设计的理论研究，在实际案例中没有具体过程性设计。对于 C3, 总体来说，②③④都没有完整的《三角函数概念》小单元教学过程设计，只是其中第一课时的设计。另外，“三角函数概念”在本章处于核心地位，也是本小单元的核心知识。②中，作者从自己的单元设计考虑问题，他的设计保证了《三角函数》单元教学的整体性。但是从两个函数模型 $f(\alpha) = x, g(\alpha) = y$ 出发落脚到任意角三角函数概念，这个过程抽象性高，难度大，也容易造成重点偏移的情况。③④的设计贴合教材编排意图，和我的教学设想吻合度较高。但是③中如图 2，作者只通过问题 3 让学生得出三角函数概念，跨度过大。这里可以对问题 3 再细化，引导学生考虑 P 点的横纵坐标与角 α 之间是不是函数关系，以及判定的依据。这点在我后续的教学设计中会体现。④对于三角函数概念的得出是从角的特殊到一般来感受得到，没有启发学生要根据函数的一般性概念进行对应分析，来判断点 P 的横坐标 x 、纵坐标 y 是否是关于角 α 的函数。错失了一次学生对一般函数的教学路径的再次深刻体会的机会。

综上所述，关于《三角函数概念》单元教学设计，我着重完善 3 点。第一，《三角函数概念》单元 3 课时的完整教学过程；第二，三角函数概念得出过程的教学设计，我的原则是，依据新课程改革以后教材的编写意图，延续章引言中的问题，引导学生从函数的一般性概念（两个数集之间的对应关系说）出发

判定点 P 的横坐标 x 、纵坐标 y 是否是关于角 α 的函数。再设置问题“初中学习的锐角三角函数，与任意角三角函数之间是什么关系？”启发学生明确两者是特殊与一般关系。整个设计遵循单元教学设计理念和学习函数的一般路径，让学生体会函数一般性概念的强大，体现“函数”板块内容的整体性；第三，针对具体问题在设计意图中点明要发展的核心素养，体现了围绕核心素养的教学。

作者编号 设计作业与检测

- ①曹弋函 没有《三角函数概念》的相关作业设计。指出设计单元作业时，需要做到以下几点要求：一、凸显育人价值。二、作业类型要多样，包含对基础知识的检测，开放探究性的，具有实践价值的作业。在本单元的最后一次作业中，可以给学生布置导图类作业。三、对作业进行分层设计，在作业中标注上必做题及选做题。
- ②谭海丞 没有《三角函数概念》的相关作业设计
- ③杨瑜倩 作者根据课标要求和单元整体规划，设计了“三角函数单元测试卷”和相应的“单元测试命题多维细目表。”细目表中点明了对核心素养的考察。

表14. “三角函数”单元测试命题多维细目表

题型	题号	分值	难度	考查知识点	数学核心素养
----	----	----	----	-------	--------

- ④马泽蓉 作者在教学效果评价中提到了课堂测验，设计了《三角函数概念》第一课时的考试，侧重于对学生基础知识与基本技能的掌握。考试内容被分成三个方面，分别是：基础强化（20分）、拓展应用（30分）、自我挑战（50分）三个方面（总计100分）。作者没有给出选题依据、没有相关的相应的“测试命题多维细目表。”

表 5.3-4：设计作业与检测内容分析表

对于 D1，参考喻平教授的“数学作业类型与形式二维结构”，常见作业类型有基础类、综合类、探究类和实践类。作业形式有阅读作业、习题作业和写作作业。①提到了相关作业类型，但没有具体案例。③④没有提到相关作业类型。对于 D2，③有关于三角函数整章的一套单元测试卷，在“单元测试命题多维细目表”中点明了对核心素养的考察，没有课时作业设计。在我的研究案例中，有《三角函数概念》单元3课时的完整作业设计。目的是检验学生对知识的理解、运用以及核心素养的生成情况，从而改进教学。

7 《三角函数概念》单元教学设计案例开发

7.1 确定单元内容

本研究第三章确定的《三角函数》共有 4 个单元，分别是预备单元、函数单元、运算单元和正弦型函数单元。函数单元涵盖三大内容板块，所需课时较多，三角函数的概念需要 3 个课时、正（余）弦函数和正切函数的图象与性质需要 4 个课时，共计 7 个课时。考虑到内容庞大，开展 7 个案例并不现实，所以又分为“三角函数概念与基本性质小单元”和“三角函数的图象与性质小单元”。下面我将结合前面《三角函数》章单元教学设计分析和其中阐明的具体步骤与理论依据，借助第四章《三角函数概念》单元主要环节的案例分析结果，以“三角函数概念与基本性质小单元”即《三角函数的概念》单元为例，详细展开核心素养下《三角函数概念》单元教学设计案例。

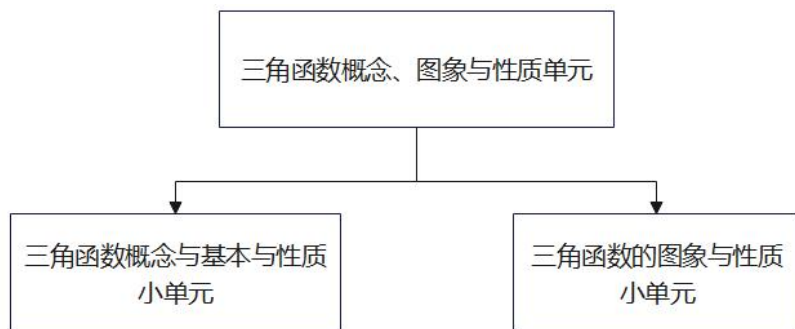


图 6.1-1 《三角函数》中“函数单元”划分

7.2 单元内容解析

7.2.1 《三角函数概念》内容结构框图

在第三章《4.1 三角函数在“函数”板块中的地位和作用》中分析出学习函数概念的一般路径：情境（背景）—研究对象—对应关系—定义—辨析—性质—应用。人教 A 版（2019 年）中编排的《三角函数概念》单元内容顺序和该路径完全一致，这有利于促进学生对函数板块内容形成良好的整体认知结构，也符合单元教学设计的整体性特点。基于对教材内容的梳理，本节内容研究思路如图 6.2-1。

结合实际教学情况，我对本单元内容划分为三个课时，如图 5.1.1 所示。

第一课时主要围绕解决情境问题展开，结合“对应关系说”函数概念得到三角函数概念，并进行简单应用；第二课时实际是对三角函数内部联系的进一步研究得到的基本性质；第三课时是综合性应用，主要通过本节课进一步培养学生的逻辑推理、数学运算的二级或三级数学核心素养。

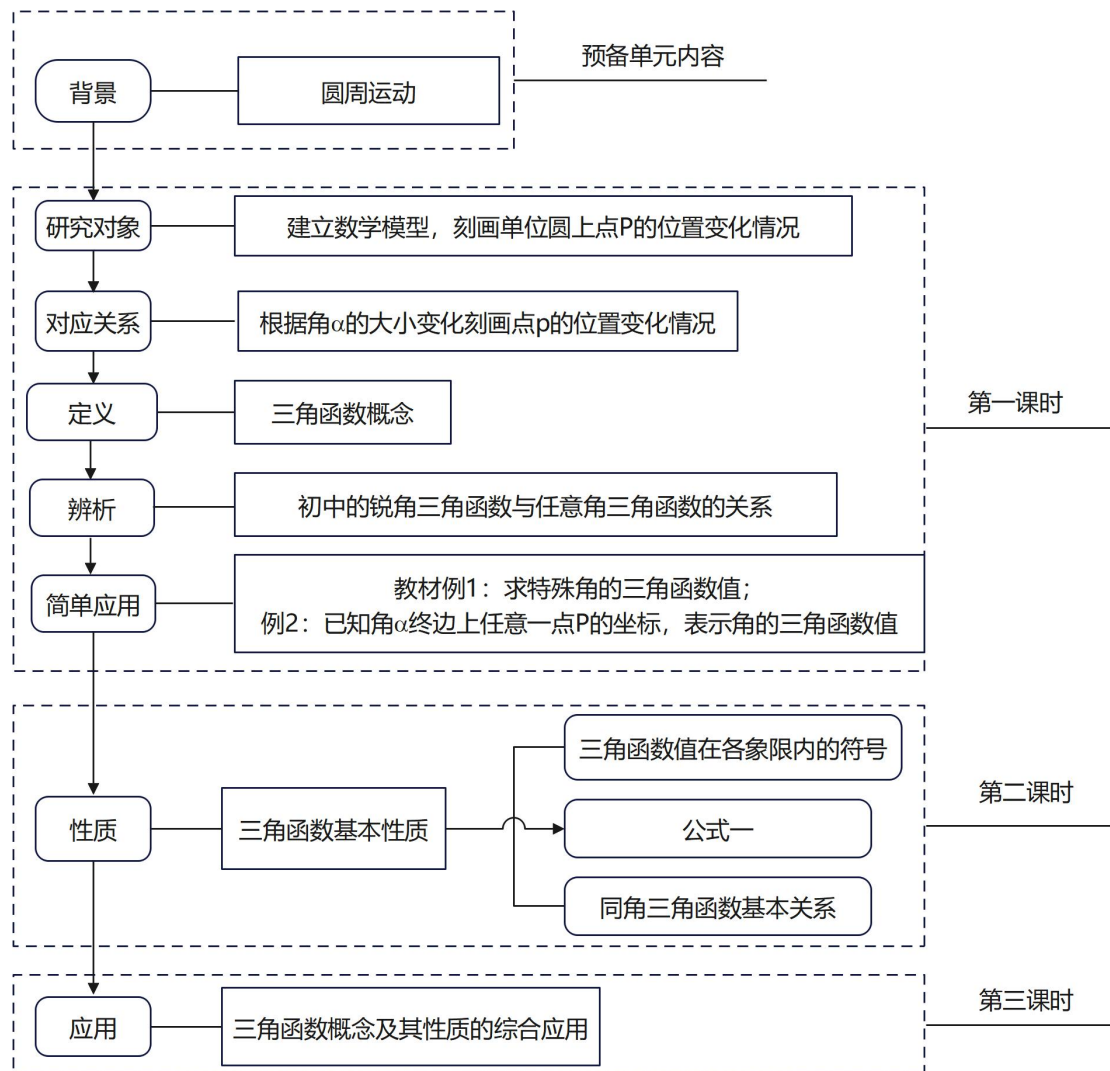


图 6.2-1 《三角函数概念》内容结构框图及课时划分

7.2.2 《三角函数概念》小单元在本章的地位作用

由图 6.2-1 直接体现了《三角函数》章大单元与《三角函数概念》小单元的联系。关于背景（圆周运动）是在本章章引言就提出的内容，而本节就是对这一情境的具体详细的研究，体现单元教学设计的整体性和情境性特点。另外，《三角函数概念》小单元承上启下，既是对本章情境问题的进一步深入研究，又引出了本章核心工具—单位圆，从而为后续利用圆的对称性推导诱导公式和

利用几何直观特点研究三角函数的图象与性质提供重要作用。这也凸显了《三角函数概念》在本章的核心地位。

7.3 分析教学要素

7.3.1 教学目标

依据本研究第四章的目标层级“核心素养—学科核心素养—课程标准/内容标准—单元目标—课时目标—活动目标”。关于《三角函数概念》单元的相关内容要求如表 6.3-1 所示。

课程标准内容要求	1. 借助单位圆理解三角函数（正弦、余弦、正切）的定义。 2. 理解同角三角函数的基本关系式： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$
课程标准学业要求	掌握一些基本函数类（一元一次函数、反比例函数、一元二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等）的背景、概念和性质。
核心素养要求	重点提升数学抽象、数学建模、数学运算、直观想象和逻辑推理素养。
单元目标	1. 经历三角函数概念的抽象过程，借助单位圆理解任意角三角函数（正弦函数、余弦函数、正切函数）的定义，发展数学抽象素养； 2. 学生能初步应用三角函数的定义分析和解决与三角函数值有关的一些简单问题； 3. 掌握三角函数值的符号； 4. 掌握公式一，初步体会三角函数的周期性； 5. 理解同角三角函数的基本关系式，体会三角函数的内在联系性，通过运用基本关系式进行化简证明，发展逻辑推理、数学运算素养。

表 6.3-1：《三角函数概念》目标层级

依据本单元的课程标准内容要求、学业要求和核心素养要求，关于课时目标层级我会利用“了解”“理解”“掌握”三个认知层次进行区分，且高一级的层次要求包含低一级层次要求，还会通过有关行为动词“经历”“体验”“探究”等表述目标。呈现方式会注意过程、方法与结果的融合。书写格式按照三

维目标的结构形式呈现，即通过（经历）X，能（会）Y，发展（提高、体会）Z形式呈现，其中X表示数学活动过程，Y表示应会解决的问题或具体知识点目标），Z表示数学思想和方法、数学关键能力或核心素养等^[1]。另外，结合喻平教授的《数学核心素养对应法人水平描述表》，研究者对相应的核心素养明确了层级要求。

课时	课时目标	核心素养及层级
三角函数 概念 （第 一课 时）	1. 学生经历以单位圆建立数学模型，刻画圆周上点P运动的过程，理解三角函数的定义； 2. 通过引导学生观察点P运动中角 $\angle AOP$ 的大小变化，探究两者之间的相互影响，借助函数概念来获得对应关系并能够抽象出三角函数概念，发展学生的逻辑推理和数学抽象核心素养；（经历探究过程理解三角函数概念） 3. 通过回顾锐角三角函数内容，让学生对比内容理解两者之间的联系，体会其中蕴含的特殊与一般思想； 4. 通过三角函数定义能求出给定角的三角函数值，进一步理解定义的内涵；（发展基本知识、基本技能） 5. 通过教材例2的探究学习，加强学生对三角函数定义的理解运用，体会到三角函数的一般性定义与已有定义是等价的，使用更广泛。	数学抽象（1级） 数学建模（1级） 逻辑推理（1级） 数学运算（1级和2级）
三角函数 基本 性质 （第 二课 时）	1. 学生能通过定义得出三角函数在各象限取值的符号规律，体会数形结合的简便性； 2. 引导学生结合定义和终边相同的角的表示，自主探究终边相同的角的同一三角函数值的关系，得出公式一，进一步体会三角函数定义的强大作用，发展直观想象素养； 3. 学生通过公式一的简单应用，体会到公式一可以把求任意角的三角函数值转化成求 $[0, 2\pi]$ 范围内的角，初步体会三角函数的周期性，培养学生用联系的观点看问题，同时提高数学运算能力；发展直观想象核心素养； 4. 学生能通过定义以及单位圆上点的横、纵坐标之间的关系，理解“同角三角函数的基本关系”，并能简单应用，发	直观想象（1级）、 数学运算（1级和2级）、 逻辑推理（1级和2级）

展逻辑推理和数学运算能力。

综合应用 (第 三课 时)	1. 能熟练运用同角三角函数的基本关系式进行三角函数式的化简、求值和证明;	直观想象(1级)、 数学运算(1级和 2级)、 逻辑推理(1级和 2级或3级)
	2. 通过设计开放性问题,激发学生自我发现问题解决问题的能力,培养开放性思维。	
	3. 通过题目隐含特殊到一般的数学思想,培养学生的类比推理、大胆猜想、严谨证明的研究数学问题的过程。渗透在数学中发现一般性规律的历程,树立学生敢于探索的精神。	

表 6.3-2: 《三角函数概念》课时教学目标及核心素养

7.3.2 学情分析

在本研究第三章“分析教学要素”的学情分析中,已提到学生已有认知基础是函数的一般概念和研究路径以及具体的幂函数、指数函数、对数函数的研究经验,还有圆的有关知识。另外,也解释了为什么不从锐角三角函数出发引出任意角三角函数,这些不再赘述。这里,我针对《三角函数概念》小单元内容,具体谈谈学生的二个学习困难点,以及如何突破。

关于三角函数概念的产生和理解是学生遇到的第一个学习难点。先前学习的基本初等函数中,涉及的变量较少,函数的解析式通常具有明确的代数运算含义,这符合学生对于函数一般概念的理解。学生在处理这些函数时,可以依赖“模板”或模式来把握概念。然而,在三角函数中,单位圆上点的坐标变化受到多个因素的影响,这些因素之间的对应关系不再是简单的代数运算形式,而是涉及到了几何元素之间的对应。这种转变要求学生更多地从几何的角度去理解函数的性质和行为。为了帮助学生适应这一转变,教师需要强调三角函数的几何背景,引导学生理解单位圆在三角函数定义中的作用,并对比函数概念举具体实例理解教学。比如:先让学生理解“ α 是一个特殊角,求出其终边与单位圆交点坐标”的任务,体会此时交点坐标的唯一性;再结合信息技术,让学生观察任意取定一个角 α ,此时交点坐标是否唯一,从而突破这一难点。

第二个难点是对三角函数内在联系性的认识,也就是发现“同角三角函数基本关系”经验不足。因此,在教学中,让学生重新解读三角函数概念,体

会 $y = \sin \alpha, x = \cos \alpha$ 和 $\frac{y}{x} = \tan \alpha$ 中的 x, y 是角 α 与单位圆交点的横纵坐标, 若将三个式子联系起来, 则会得到什么样的关系? 再借助单位圆, 以此引导学生数形结合观察探究出结果。

7.3.3 教学方式分析

根据内容特点, 结合第四章教学方式的说明, 《三角函数概念》单元的第一课时采用情境教学法和问题引导的探究式教学相结合方式; 第二课时通过实例启发式教学; 第三课时是对所学内容综合能力的培养, 多以解决问题的探究式教学为主。

7.4 学习评价设计

基于 4.5 节对“预设学习评价”的思考, 评价任务的设计包括预设评价任务、评价方式和评价标准。本章将在 6.5 《单元教学过程设计》中及时体现这三点。

关于结果性评价, 本研究主要以单元作业的认真度和正确率等为主。因为布置分层作业是为了满足不同层次不同理解程度的学生需要, 所以作业评价的标准也就不同。学困生完成考察核心素养一级的作业即可, 主要集中在基础性作业和少量综合性作业; 优等生考虑到培优目的, 对于作业中的基础 2-3 道题可以不做, 重点完成综合性和探究性作业; 中等生及中等偏上学生, 需要完成基础性作业和综合性作业, 选做探究性作业。学习评价的具体操作分为三步: 先设计单元-课时作业题目及其考察的核心素养和等级; 再利用教学软件“智学网”分析不同层次学生答题正确率, 来评价单元目标完成情况; 最后再优化讲评作业反映出的问题, 引导学生回归问题本质。同时, 也可以通过每一课时的作业表现反馈学生对知识的掌握情况, 及时调整教学。

另外, 为了更好地利用评价结果促进学生的全面发展, 教师应定期与学生进行面对面的交流, 讨论他们的学习进展和遇到的困难。在这个过程中, 教师可以根据学生的实际情况调整教学策略和方法, 以满足学生的个性化需求。同时, 教师还应鼓励学生进行自我反思和总结, 以便他们能够更好地认识自己的学习风格和习惯, 从而养成良好的数学学习习惯。

综上所述，评价结果的呈现和利用应当关注学生的全面发展，以增强他们的数学学习自信心和兴趣为目标。通过提供全面的反馈、具体的建议和个性化的教学支持，教师可以帮助学生更好地明确自己对数学知识与技能的掌握情况，及时查缺补漏，养成良好的数学学习习惯。

7.5 单元教学过程设计

《三角函数概念》单元第一课时教学过程设计

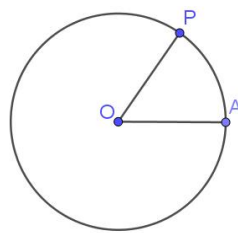
根据喻平教授的 CTI 教学模式，第一课时《三角函数概念》可以按照五个步骤展开，下面是完整的教学过程设计，主要包括创设情境—探究与建构—知识的理解应用—知识的迁移应用—课后作业 1（在单元过程设计结束之后统一呈现）。

第一步：创设情境

对于问题情境任务，教师需要明确的告诉学生任务是什么，任务的要求有哪些、评价标准是什么以及要解决哪些问题或是需要克服什么困难。

导语：在预备单元，我们就已经知道本章要解决关于圆周运动的实际问题，为了研究的方便，不失一般性，我们简化问题进行研究。

问题 1：如图 1，已知单位圆 $\odot O$ 上的点 P 以 A 为起点做逆时针方向旋转，请你建立一个数学模型，刻画点 P 的位置变化情况。

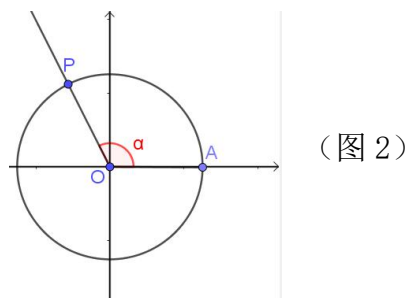


(图 1)

【设计意图】明确任务，确定研究对象。

第二步：探究与建构

导语：构建数学模型第一步就是将实际问题通过数学工具转化为数学问题。通过观察图 1，我们发现点 P 在运动过程中 $\angle AOP$ 也在变化。所以我们可以通角的变化来刻画点 P 位置变化情况。这里我们以直角坐标系为工具进行转化。以单位圆的圆心 O 为原点，以射线 OA 为 x 轴的非负半轴，建立直角坐标系，点 $A(1,0)$, $P(x,y)$ 。射线 OA 从 x 轴的非负半轴开始，绕点 O 按逆时针方向旋转角 α ，终止位置为 OP 。此时点 P 的坐标能由 α 唯一确定吗？



(图 2)

【说明】导语中的问题对学生抽象概括能力要求很高，学生不能很快做出判断，可以分解问题，逐层上升。

问题 2：当 α 取特殊角，如 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ 等时，点 $P(x, y)$ 的坐标是多少？他们是唯一确定的吗？

生：学生利用勾股定理作答，得出当角确定时，坐标是唯一确定了。

问题 3：一般地，对任意给定的一个角 α ，单位圆上的点 $P(x, y)$ 坐标唯一确定吗？

师：利用几何画板，拖动改变角 α 大小的滑动条，请大家注意观察，在角 α 变化的过程中有哪些量也是变化的呢？当 α 确定时，点 $P(x, y)$ 坐标此时唯一确定吗？

生：点 P 坐标随着角 α 的变化而变化。当 α 确定时，就有唯一的一条终边 OP 与它对应，它与单位圆的交点 P 也就随之确定下来了。

师：很好。换句话说，任意角 $\alpha \in R$ ，对任意给定的一个角 α ，单位圆周上就有唯一确定的点 $P(x, y)$ 与之对应，即它们有如下对应关系：

(板书)：任意取一个角 $\alpha \longrightarrow$ 唯一实数 x ； ①

任意取一个角 $\alpha \longrightarrow$ 唯一实数 y 。 ②

问题 4：请同学们继续思考，对任意给定的一个角 α ，既然 x 与 y 是唯一确定的，那 $\frac{y}{x}$ 是不是唯一确定的？

生：当 x 不等于 0 时，是唯一的。

师：任意取一个角 $\alpha \longrightarrow$ 唯一实数 $\frac{y}{x}$ 。 ③

师：请大家思考，①②③中， x ， y ， $\frac{y}{x}$ 都是关于 α 的函数吗？

生：结合函数一般概念思考作答，是。

【说明】若学生对函数一般性概念（数集之间的对应关系说）记忆不深，则先统一复习概念。若有学生能准确回忆出函数概念，及时通过肯定的表扬性

语言给予过程性评价，带动学生学习积极性。

师：哪位同学能详细说一说？

生：由前面学习知道，在弧度制下，任意角的集合是实数集，而单位圆上点的横、纵坐标取值范围分别 $[-1,1]$ 。所以，对于 R 中的任意一个实数 α ，按照对应关系①，都有 $[-1,1]$ 中唯一一个数 x 与它对应；同理，对于 R 中的任意一个实数 α ，按照对应关系②，都有 $[-1,1]$ 中唯一一个数 y 与它对应；③也同理是函数。

【说明】这里需要对回答问题的学生给予过程性评价，比如：语言表达准确，逻辑清晰等。

师生共同：设任意角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$ ，那么， x 叫做 α 的余弦，记作 $\cos\alpha = x$ ； y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin\alpha = y$ ； $\frac{y}{x}$ 叫做叫做 α 的正切，记作 $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ 。这些函数都是以角 α 为自变量，以单位圆上的点的坐标（或坐标的比值）为函数值的函数，统称它们为三角函数。

【设计意图】：整个探究与建构环节采用“问题串”引导学生梳理清楚单位圆上点 $P(x,y)$ 的坐标随着角 α 的变化而变化，当角确定时，点 $P(x,y)$ 的横纵坐标与坐标比都是唯一确定的。对学生而言，获得研究对象必须经历从事实到概念的数学抽象，概念学习过程就是学会数学化的过程。

问题 5：习惯上用 x 表示自变量， y 表示因变量，请大家对三个解析式改写，并写出定义域。

$$y = \sin x, x \in R.$$

$$\text{结果： } y = \cos x, x \in R.$$

$$y = \tan x, x \in \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$$

【设计意图】问题 5 需要学生深刻理解解析式中的符号含义，具备转化思想。尤其是正切函数的定义域先让学生自己思考，根据以往教学经验，这里有可能会有学生可能会出错，但也有同学得出正确结果，正好引发学生主动思考辨析。

问题 6：任意角三角函数概念中角 $\alpha \in R$ ，当 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，任意角三角函数概念与初中学习的锐角三角函数概念是什么关系？

【设计意图】明白两者之间一般与特殊的关系，理解任意角三角函数概念是锐角三角函数的推广。本质一样。

第三步：知识的理解应用

例 1（教材 178 页）：求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值。

练 1（教材 179 页）：利用三角函数定义，求 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 的三个三角函数值。

【设计意图】例 1 是三角函数概念的直接应用，练 1 为得到三角函数值域做准备，让学生体会单位圆的重要性和数形结合思想的应用。属于考查数学核心素养的 1 级水平题目。

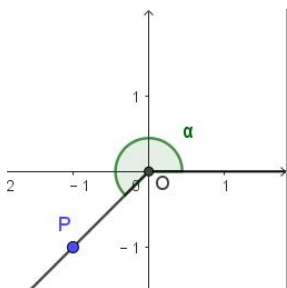
第四步：知识的迁移应用

练 2（教材 180 页）：已知角 α 的终边过点 $P(-12, 5)$ ，求角 α 的三角函数值。

【设计意图】学生已有的知识是三角函数概念，但学生发现此时 $P(-12, 5)$ 并不是角终边与单位圆的交点，通过数形结合，学生发现可以联系相似三角形内容，从而突破问题。我设计意图是，让学生以问题解决过程自己发现“角终边上一点非单位圆交点时”怎么处理，为推广到三角函数一般概念做铺垫。

思考：如图，设 α 是一个任意角，它的终边上任意一点 P （不与原点 O 重合）的坐标为 (x, y) ，点 P 与原点的距离为 r ，求证： $\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}$ 。

（三角函数的“坐标比”定义）



练 3（教材 180 页）：已知点 P 在半径为 2 的圆上按顺时针方向做匀速圆周运动，角速度为 1rad/s ，求 $2s$ 时点 P 所在的位置。

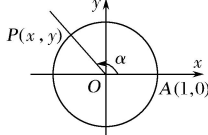
【设计意图】本题综合性高，涉及知识在现实生活中的迁移应用，均属于考查数学核心素养 2 级水平的题目。考察内容有角速度与角度关系、角的方向对角正负的影响和上面思考得到的三角函数一般概念的直接应用。让学生体会到三角函数一般概念使用性更广泛。

《三角函数概念》单元第二课时教学过程设计

第二课时《三角函数基本性质》可以按照五个步骤展开，下面是完整的教学过程设计，主要包括旧知过关—探究与建构—知识的理解应用—反思提升—课后作业2（在单元过程设计结束之后统一呈现）。

第一步:旧知过关（5 分钟）

1. 任意角的三角函数的定义

前提	如图，设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$		
定义	正弦	叫做 α 的正弦，记作 $\sin \alpha$ ，即 $\sin \alpha =$	
	余弦	叫做 α 的余弦，记作 $\cos \alpha$ ，即 $\cos \alpha =$	
	正切	叫做 α 的正切，记作 $\tan \alpha$ ，即 $\tan \alpha =$	
	三角函数	正弦、余弦、正切都是以_____为自变量，以单位圆上的点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，将它们统称为_____。	

2. 正弦、余弦、正切函数在弧度制下的定义域

三角函数	定义域
$\sin \alpha$	
$\cos \alpha$	
$\tan \alpha$	

3. 应用:

在平面直角坐标系中，角 α 的终边与单位圆交于点 A ，点 A 的纵坐标为 $\frac{3}{5}$ ，求 $\tan \alpha$ 。

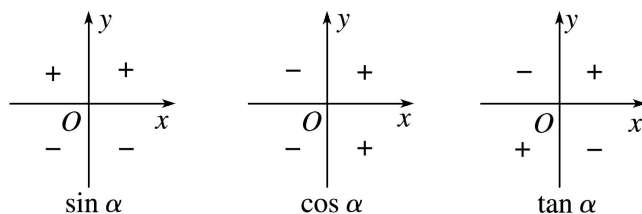
【设计意图】这部分内容以过关单形式在上课发给学生，限时 5 分钟完成并统一上交，为本节课学习的内容做准备，提升课堂效率。

第二步:探究与建构

导言：学习了三角函数定义，根据函数的一般研究路径，接下来我们研究一些基本性质。

探究一：由三角函数的定义以及任意角 α 的终边与单位圆交点所在的象限，你能发现正弦函数、余弦函数和正切函数的值的符号有什么规律吗？

生：当 α 为第一象限角时， $y > 0, x > 0$ ，故 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \tan \alpha > 0$ 同理可得当 α 在其他象限时三角函数值的符号，如图所示。



【设计意图】学生能通过定义得出三角函数在各象限取值的符号规律，体会数形结合的简便性。

例 1（教材 180 页）求证：角 θ 为第三象限角的充要条件是 $\begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \tan \theta > 0. \end{cases}$

【设计意图】例 1 目的是对探究一结论的直接应用。但是题干中涉及到逻辑用语“充要条件”。教学时要让学生先分析清楚证明“充要条件”的过程，也就是需要证明充分性和必要性都成立。这一问题的解决有利于训练学生的逻辑推理能力和数学语言表达能力。

探究二：上节课课后作业第 7 题（分别求 $-\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值，再结合教材 178 页例 1，你有什么一般性结论？）

【设计意图】设置本题的目的有三，第一，让学生熟练掌握三角函数定义；第二：问题式启发学生自主研究终边相同的角的同一三角函数值的关系，得出公式一，进一步体会三角函数定义的强大作用，发展直观想象素养。同时提前完成本节课一个学习目标。第三，考虑到题目不难，学生可以独立解决，以课后作业的形式让学生提前探究，提升本节课学习效率。

生：终边相同的角的同一三角函数值相等。

师：请学生展示一般结论，并回答怎么发现的。

【设计意图】让学生展示学习成果，可以激发学生自信，同时训练学生的语言表达能力。

师生共同：学生互相补充完善结论，教师板书学生结果。

【归纳知识点 2】诱导公式一

1. 语言表示：终边相同的角的同一三角函数的值相等。

$$\sin \alpha + 2k\pi = \sin \alpha,$$

2. 式子表示： $\cos \alpha + 2k\pi = \cos \alpha,$

$$\tan \alpha + 2k\pi = \tan \alpha, \text{ 其中 } k \in \mathbb{Z}.$$

3. 作用：把求任意角的三角函数值，转化为求 $0 \sim 2\pi$ 范围内角的三角函数值。

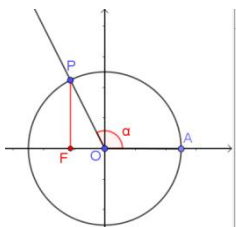
例 2 (教材 181 页) 求下列三角函数值: (1) $\sin 1480^{\circ}10'$ (精确到 0.001);

(2) $\cos \frac{9\pi}{4}$; (3) $\tan(-\frac{11\pi}{6})$

【设计意图】培养学生直观想象和数学运算核心素养。

【导语】公式一表明, 终边相同的角的同一三角函数的值相等。而正(余)弦函数和正切函数定义都和角的终边与单位圆的交点坐标有关, 所以它们之间一定有内在联系。那么, 终边相同的角的三个三角函数之间有什么关系呢?

探究三: 由三角函数定义可知, 在平面直角坐标系中, 设 α 是一个任意角, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$, 则 $\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$ 。如图, 你能否根据 x, y 的关系得到 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 的关系?



生: 自主探究, 回答问题, 学生相互补充。

【设计意图】问题指向清楚, 学生能结合图象, 推出平方关系和商数关系。目的是发展学生数形结合思想和逻辑推理能力。

【归纳知识点 3】同角三角函数的基本关系 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 。

其中, $\sin^2 \alpha$ 是 $(\sin \alpha)^2$ 的简写, 读作“ $\sin \alpha$ 的平方”, 不能将 $\sin^2 \alpha$ 写成 $\sin \alpha^2$ 前者是 α 的正弦的平方, 后者是 α^2 的正弦, 两者是不同的, 要弄清它们的区别, 并能正确书写。

第三步: 知识的理解应用

例 3 (教材 183 页) 已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha, \tan \alpha$ 的值。

【设计意图】例 3 考察了同角三角函数基本关系的直接应用, 也涉及到三角函数值在各象限的符合应用, 属于基础题。培养学生分类讨论思想。

练 1 (教材 184 页) 已知 $\tan \varphi = -\sqrt{3}$, 求 $\sin \varphi, \cos \varphi$ 的值。

【设计意图】练 1 是对同角三角函数基本关系的直接应用, 只是改变已知条件。目的是通过例 3 和练 1 的对比, 让学生理解 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 三者直接可

以“知一求二”。同时也是对同角三角函数基本关系的熟练应用。

第四步：反思提升

请同学们回顾本节课所学内容，你有什么收获？可以从知识层面和数学思想层面梳理总结。

预设：

1. 知识层面：三角函数在各象限取值的符号规律；诱导公式一；同角三角函数的基本关系 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$.
2. 数学思想方法或核心素养：数形结合、分类讨论思想，直观想象、数学运算、逻辑推理核心素养。

《三角函数概念》单元第三课时教学过程设计

第三课时《三角函数概念及基本性质综合应用》可以按照五个步骤展开，下面是完整的教学过程设计，主要包括复习回顾—知识的理解应用—知识迁移应用—知识创新应用—反思提升—课后作业 3（在单元过程设计结束之后统一呈现）。

第一步：复习回顾

问题 1：请同学们回想目前学习了《三角函数概念》哪些知识？

第二步：知识的理解应用

导语：通过完成课时作业 2，我们发现同角三角函数基本关系应用灵活，题目考察公式的变形使用，而且题型多样，涉及到计算、化简和证明问题。本节课我们结合课时作业 2 继续探究 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 中的奥秘。

问题二：通过课时作业第 6 题和第 8 题，思考平方关系 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 商数关系 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 可作哪些变形？

（预设答案）生： $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$;

$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$; ...

练 1：化简下列各式：

$$(1) \frac{\sqrt{1 - 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \sqrt{1 - \sin^2 10^\circ}};$$

$$(2) \sqrt{1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

【设计意图】本题目的有二，第一，同角三角函数基本关系变形应用；第二：在去根号的问题上，本题回归到三角函数概念本质，再次体现了单位圆的重要作用。

【方法归纳】三角函数式的化简技巧

(1)化切为弦，即把正切函数都化为正、余弦函数，从而减少函数名称，达到化繁为简的目的。(2)对于含有根号的，常把根号里面的部分化成完全平方式，然后去根号达到化简的目的。(3)对于化简含高次的三角函数式，往往借助于因式分解，或构造 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，以降低函数次数，达到化简的目的。

问题三：通过课时作业第 7 题不同解法，你能发现分式与条件的关联吗？

【设计意图】解决微专题“齐次式求值问题”。

练 2. 已知 $\tan \alpha = 2$ ，则① $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$ _____；②

$$\frac{2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{4\sin^2 \alpha - 9\cos^2 \alpha} = \text{_____};$$

【设计意图】通过解决问题，让学生体会到“整体思想”的重要性。

问题四：下面我们继续来研究三角函数式的证明问题，请大家思考例 3 如何证明？

练 3（教材 183 页）求证： $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ 。

师：教材 183 页特别强调，今后，除特殊注明外，我们假定三角恒等式是在使两边都有意义的情况下的恒等式。请大家先独立尝试解决问题。

【设计思路】根据学生实际情况，可选择相互讨论方式，再让学生分享证明方法和证明过程，老师学生一起点评总结。若学生开展效果不理想，可引导学生观察等式，寻找突破点。方法一：直接法，若从左边开始推出右边，那不妨从结果出发，观察右边需要的内容。右边分子是 $1 + \sin x$ ，而左边分母是 $1 - \sin x$ ，由此想到给左边分子分母同时乘以 $1 - \sin x$ ，再化简。方法二：整体观察式子结构，等价变形得到 $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ ，由此得到证明思路，逆向证明即可。

【方法归纳】证明三角恒等式常用的方法

从一边开始，证得它等于另一边，一般是由比较复杂的一边开始化简到另一边，其依据是相等关系的传递性。(2)左右归一法：即证明左右两边都等于同一个式子，其依据是等于同一个量的两个量相等。(3)比较法：即证左边一右边

$=0$ 或证 $\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=1$ 。

第三步：知识的迁移应用

练 4. (教材 186 页 14 题 1 小问) 求证 $\frac{1-2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$;

【设计意图】本题涉及同角三角函数基本关系的变形应用（1 的妙用）、齐次式化简，以及证明题的常用方法的灵活应用，是对本节内容的综合应用，属于中档题。考察学生的知识迁移能力。

第四步：知识的创新应用

知识的创新应用是在知识的理解应用基础上的第二次进阶，教学以学生提出更深层次问题和解决结构不良问题为主要任务，核心素养指向是创新意识和实践能力的培养。

练 5. 已知 $\tan \alpha = 2$ ，计算 $4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha$ 的值。

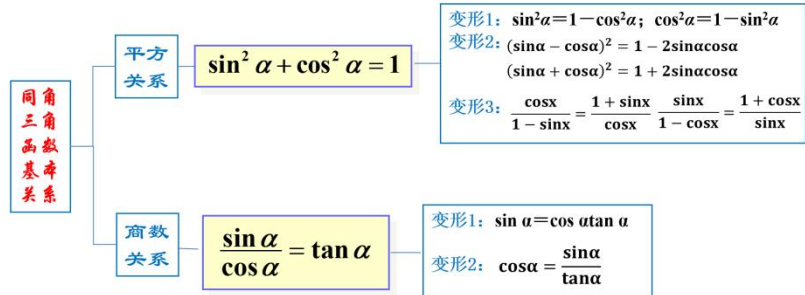
【设计意图】本题中的式子结构不良，让学生和练 2 对比，引发思维冲突。再结合“齐次式求值”经验，思考解法，培养学生创新意识。

【总结】已知角 α 的正切求关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的齐次式的方法：(1) 关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的齐次式就是式子中的每一项都是关于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的式子且它们的次数之和相同，设为 n 次，将分子、分母同除以 $\cos \alpha$ 的 n 次幂，其式子可化为关于 $\tan \alpha$ 的式子，再代入求值。(2) 若无分母时，把分母看作 1，并将 1 用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ 来代换，将分子、分母同除以 $\cos^2 \alpha$ ，可化为关于 $\tan \alpha$ 的式子，再代入求值。

第五步：反思提升

预设：

知识网络：



思想方法：(1) 利用同角三角函数的关系式求值：方程思想，构造齐次式；(2) 三角函数式的化简：转换法、降次、化繁为简；(3) 三角函数式的证明：比较法、综合法、分析法等。

7.6 单元作业设计

7.6.1 作业设计和设计意图分析

第1课时课后作业

一：基础性作业

1. 已知角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边与单位圆交于点

$(-\frac{1}{4}, m)$ ，则（ ）

A. $m = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ B. $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\cos \theta = -\frac{1}{4}$ D. $\tan \theta = \pm\sqrt{15}$

2. 若角 α 的终边经过点 $P(-3, 4)$ ，则 $\sin \alpha + \tan \alpha$ 等于（ ）

A. $-\frac{8}{15}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $-\frac{19}{25}$ D. $-\frac{11}{15}$

3. 已知角 α 的终边经过点 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ，则 $\sin \alpha =$ _____， $\cos \alpha =$ _____，

$\tan \alpha =$ _____.

二：综合性作业

4. (教材 184 页习题 5.2 第 2 题) 已知角 α 的终边上有一点的坐标是 $P(3a, 4a)$ 其中 $a \neq 0$ ，求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 。

5. (教材 184 页习题 5.2 第 2 题) 计算：

(1) $6\sin(-90^\circ) + 3\sin 0^\circ - 8\sin 270^\circ + 12\cos 180^\circ$;

(2) $10\cos 270^\circ + 4\sin 0^\circ + 9\tan 0^\circ + 15\cos 360^\circ$;

(3) $2\cos \frac{\pi}{2} - \tan \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\tan^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos \frac{3\pi}{2}$;

(4) $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^4 \frac{3\pi}{2} - \tan^2 \frac{\pi}{3}$

6. 已知 θ 终边上一点 $P(x, 3)(x \neq 0)$ ，且 $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}x$ ，求 $\sin \theta, \tan \theta$ 。

7. 分别求 $-\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值，再结合教材 178 页例 1，你有什么一般性结论？

三：预习类作业

8. 若 $\sin \theta \cos \theta < 0$ ，则角 θ 是()

- A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限角
C. 第三或第四象限角 D. 第二或第四象限角

9. 点 $A(\sin 913^\circ, \cos 913^\circ)$ 位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

10. 已知 $\frac{1}{|\sin \alpha|} = -\frac{1}{\sin \alpha}$ ，且 $\lg(\cos \alpha)$ 有意义。

(1)试判断角 α 的终边所在的象限；

(2)若角 α 的终边与单位圆相交于点 $M(\frac{3}{5}, m)$ ，求 m 的值及 $\sin \alpha$ 的值。

11. 已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，(1)求 $\sin \theta \cdot \cos \theta$ 的值；(2)当 $0 < \theta < \pi$ 时，求 $\tan \theta$ 的值。

第 1 课时课后作业分析表				
题目类型 及题号		考点	核心素养及水平	设计意图
基础类	1	三角函数定义直接应用	直观想象一级	
	2	三角函数一般性定义直接应用	数学运算一级	
	3	三角函数定义直接应用	数学运算一级	
综合类	4	三角函数定义应用	数学运算一级 逻辑推理一级	含参问题,培养分类讨论数学思想
	5	特殊角的三角函数数值运算	数学运算一级 直观想象一级	体现单位圆的几何直观性
	6	三角函数一般性定义和含参问题	数学运算二级 直观想象一级	
	7	三角函数定义、公式一的感知	数学运算一级 直观想象一级	寻找结果一样的原因,并得出自己的结论,为下节课学习做铺垫。

预习类	8	三角函数在各象限的符号	逻辑推理一级	体现单位圆的几何直观性
	9	公式一的直接应用	数学运算一级 逻辑推理一级	本节课内容重在研究三角函数概念的理解,包括和锐角三角函数的辨析,以及三角函数一般性概念的证明上,具体应用较少,所以设置预习作业,为下节课做准备。
	10	三角函数一般性定义;三角函数在各象限的符号;对数范围问题	数学运算一级 逻辑推理一级	
	11	同角三角函数基本关系应用	数学运算一级 逻辑推理一级	

第2课时课后作业

一：基础性作业

1. (教材 185 页第 8 题) 确定下列式子的符号.

$$(1) \tan 125^\circ \sin 273^\circ; (2) \frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ}; (3) \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{4\pi}{5} \tan \frac{11\pi}{6}; (4) \frac{\cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{11\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{3}}.$$

2. (教材 185 页第 6 题 2 小问) 已知 $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第二象限角, 求 $\sin \alpha, \tan \alpha$ 的值;

3. 化简 (教材 184 页练习第 4 题) (1) $\cos \theta \tan \theta$; (2) $\frac{2\cos^2 \alpha - 1}{1 - 2\sin^2 \alpha}$; (3)

$$(1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha.$$

4. (教材 184 页练习第 5 题) 求证: $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

二：综合性作业

5. (教材 185 页第 10 题 1 小问) 角 θ 为第二或第三象限角的充要条件是

$$\sin \theta \tan \theta < 0;$$

6. (教材 186 页第 13 题) 已知角 α 的终边不在坐标轴上,

(1) 用 $\cos \alpha$ 表示 $\sin \alpha, \tan \alpha$; (2) 用 $\sin \alpha$ 表示 $\cos \alpha, \tan \alpha$ 。

7. (教材 186 页第 15 题) 已知 $\tan \alpha = 2$, 求 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 的值。(请尝试不同解法)

三: 探究性作业

8. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 求: (1) $\sin \alpha \cos \alpha$; (2) $\sin \alpha - \cos \alpha$; (3) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ 。

并尝试得出 $\sin \alpha \pm \cos \alpha, \sin \alpha \cos \alpha$ 之间的三角恒等式。

第 2 课时课后作业分析				
题目类型及题号		考点	核心素养及水平	设计意图
基础类	1	三角函数在各象限取值的符号规律;	数学运算一级	对三角函数在各象限取值的符号规律、公式一和同角三角函数的基本关系能进行直接应用。
		与公式一应用		
	2	同角三角函数的基本关系的计算	数学运算一级	
	3	同角三角函数的基本关系的化简	数学运算一级	
	4	同角三角函数的基本关系的证明	逻辑推理一级	
综合类	5	三角函数在各象限取值的符号规律	逻辑推理一级	对课堂例 1 思维过程和书写的巩固练习。
	6	同角三角函数的基本关系的理解	逻辑推理一级	为第三课时同角三角函数的基本关系的等价变形理解做铺垫。
	7	商数关系的理解	数学运算一级 逻辑推理二级	让学生尝试不同解法, 目的是引导学生多角度思考, 能发现

				分式与条件的关联，学会构造出同角三角函数基本关系。是对考点的灵活应用。也为下节课学习做铺垫。
探究类	8	平方关系的综合应用	数学运算二级 逻辑推理二级	启发学生联系初中所学的完全平方关系进行探究，学生主动思考，培养严谨思维，提升学生综合解决问题的能力。

第3课时课后作业

一、单选题

- 已知 α 是第一象限角， $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ，则 $\cos \alpha =$ ()
 A. $-\frac{5}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $-\frac{12}{5}$ D. $\frac{12}{5}$
- 已知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，则 $2\sin \theta + \sqrt{1 - 2\sin(\pi - \theta)\cos \theta} =$ ()
 A. $\sin \theta + \cos \theta$ B. $\sin \theta - \cos \theta$ C. $3\sin \theta - \cos \theta$ D. $3\sin \theta + \cos \theta$
- 若 α 是三角形的最大内角，且 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，则三角形是 ()
 A. 钝角三角形 B. 锐角三角形 C. 直角三角形 D. 等腰三角形

二、多选题

- (多选)已知 $\theta \in (0, \pi)$ ，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，则 ()
 A. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ B. $\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$
 C. $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{7}{5}$ D. $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$
- 已知 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，则 $7\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$ 的值为 ()
 A. $\frac{11}{5}$ B. $\frac{21}{5}$ C. $\frac{29}{5}$ D. $\frac{33}{5}$

三、填空题

- 已知角 α 的终边经过点 $P(-8m, -6\cos 60^\circ)$ ，且 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ，则 m 的值为_____。

7. (教材 186 页习题 5.2 第 16 题) 化简 $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} =$ _____ 其中 α 为第二象限角。

四：解答题

8. (教材 184 页习题 5.2 第 4 题) 化简：

$$(1) a^2 \cos 2\pi - b^2 \sin \frac{3\pi}{2} + ab \cos \pi - ab \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$(2) m \tan 0 + n \cos \frac{1}{2}\pi - p \sin \pi - q \cos \frac{3}{2}\pi - r \sin 2\pi.$$

9. 求证： $\frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\tan \alpha - \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + \sin \alpha}{\tan \alpha \sin \alpha}.$

10. 已知 $\sin \theta, \cos \theta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a = 0$ 的两个根。求：

$$(1) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta; (2) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}.$$

五：拓广探索

11. (教材 186 页习题 5.2 第 18 题)

(1) 分别计算 $\sin^4 \frac{\pi}{3} - \cos^4 \frac{\pi}{3}$ 和 $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}$ 的值，你有什么发现？

(2) 任取一个 α 的值，分别计算 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha, \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ ，你又有什么发现？

(3) 证明： $\forall x \in R, \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha.$

12. (教材 186 页习题 5.2 第 17 题) $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ 是 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 的一个变形。你能利用同角三角函数的基本关系推导出更多的关系式吗？

13. (选做题) 化简式子： $\frac{1-\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{1-\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha}.$

第 3 课时课后作业分析

第 3 课时课后作业分析			
题目类型及题号	考点	核心素养及水平	设计意图
基础类	1	同角三角函数的平方关系的直接应用	数学运算一级

	2	三角函数概念和平方关系	数学运算一级 逻辑推理一级	利用单位圆和三角函数定义化简 $\sin(\pi - \alpha)$, 体会单位圆的对称性, 为后续借助单位圆研究诱导公式和三角函数图象性质做准备。
	3	同角三角函数的基本关系的应用	数学运算一级 逻辑推理一级	
综合类	4	$\sin \theta \pm \cos \theta$ 与 $\sin \theta \cos \theta$ 关系的应用	逻辑推理二级	
	5	齐次式求值	数学运算一级或二级 逻辑推理一级	该题解法一: 构造齐次式求值; 解法二: 利用平方关系计算代入化简。从而体会解法一的优势。
	6	三角函数“坐标比”定义的应用	逻辑推理一级 数学运算二级	体会“坐标比”定义比三角函数定义使用范围更广泛。
	7	根式形式化简	数学运算一级 逻辑推理二级	
	8	特殊角的三角函数值	直观想象一级 数学运算一级	
	9	同角三角函数的基本关系的证明应用	数学运算二级 逻辑推理二级	巩固训练证明方法
	10	韦达定理、同角三角函数的基本关系的化简应用	数学运算二级 逻辑推理一级	
探究类	11	利用平方关系探究一般性规律	数学运算二级 逻辑推理二级	题目隐含特殊到一般的数学思想, 培养学生的类比推理、大胆猜想、严谨证明的研究数学问题的过程。渗透在数学中

				发现一般性规律的历程，树立学生敢于探索的精神。
	12	同角三角函数的基本关系的理解	逻辑推理二级或三级	是对课堂练 3 的再次剖析和延续，开放性问题，激发学生自我发现问题解决问题的能力，培养开放性思维。
	13	平方关系的灵活应用和式子结构的变形	数学运算二级 逻辑推理二级	分层设计作业

7.6.2 作业设计与教学设计的联系

三节课时作业与教学设计之间的自然衔接、承上启下、凸显单元整体性特点的几处设计，在这里做一说明。（1）第一课时作业设计了预习作业，一来预习内容难度不大，学生自学没问题，再者，预习作业是基于三角函数概念基础上的应用，这样既可以让学提前主动探究性质，又能加深对概念的理解；（2）第二课时先设计了旧知过关 5 分钟，既是对第一课时基本概念的理解和应用，也为本节课三角函数基本性质探究做铺垫；（3）课时作业 2 中设计的第 6 题、第 7 题和第 8 题，都为了第三课时的学习做铺垫。通过第 6 题和第 8 题，想让学生思考平方关系 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，商数关系 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ 的变形公式？通过第 7 题启发学生探索微专题“齐次式求值问题”。

7.6.3 作业设计的合理性分析

（1）喻平教授提出，基础类、综合类、探究类是数学作业的主要类型，考虑对应的核心素养水平在作业体系中的比例，总体是否控制在 5:3:2 或 5:4:1 左右。结合喻教授的“数学核心素养对应的水平描述表”，本节作业的三种类型占比为 4:3:1，同时根据数学核心素养等级划分题目，数学运算能力题目，一级与二级占为比 4:1；逻辑推理能力题目，一级与二级占比为 3:2。（2）作业选题来源首先是教材习题，通过对题目考点分析，进行整合规划，再结合学习目标，在智学网或其他途径补充题目；（3）重视分层作业设计，包括开放性、

探究性题目，这类问题不多，但是更能发展学生的综合核心素养，这也是教材设置拓广探索类题目的意图。第二课时第 8 题、第三课时的 11 题和 12 题能够体现这一点。（4）围绕本单元教学目标设计题目考点、考察的核心素养和难度。

7.6.4 作业效果检测工具

核心素养的落实，除了通过单元教学来体现，也可以通过设计单元作业来实现。例如，丰富作业的形式，提高作业的质量，提升学生完成作业的自主性，有效性。利用目前使用方便的教学软件——“智学网”，可以在浏览器上直接在线使用。在作业方面，他有两大优点，第一，按照“智学网”作业上传模板制作作业单，打印发给学生，学生在规定区域内作答，平时就在培养良好的做题习惯；第二，教师批改学生作业之后通过扫描仪完成作业上传，“智学网”会智能进行试卷分析，汇总数据，为教学给予准确高效的数据反馈。主要有四个板块。（1）学情总览（班级均分、最高分、优秀率、合格率），整体了解全年级学生作答情况；（2）试卷分析和讲评，主要包括每道题的班级均分与年级均分的对比、每个选项的答题统计、考点和资源拓展，还有整体的答题情况，分为较易、一般、较难和困难，用不同颜色标注，学生整体做题情况一目了然，及时明确需要统一讲解的问题，同时可以利用智能资源拓展选项，设置变式再练，提升学生对考点的掌握情况；（3）学生成绩，会自动生成一份成绩报告，包括每人的排名，原卷，每题的作答情况分析，以及与历次考试的对比，可以很全面的了解该生自己的学习状况。

7.6.5 作业评价，导向本质

针对“智学网”数据反馈的学情，开展作业讲评，实现单元教学的闭环。如表所示，自然思考指通性通法，基于知识的自然生成过程，基于概念、定理、性质本身的简单综合应用，需要所有学生掌握，所以教师统一讲解；有效思考是灵活应用，基于对基本知识本质的把握，能自然地学会变通解决问题，这需要学生反应敏捷，具有跳跃思维，适用于优等生，所以老师不统一讲授，只是做好前期的选题、点拨等工作，让学生相互探讨解决；简练思考是基础应用，针对考察一级核心素养的题目或问题，这些内容若未掌握，主要原因在于学生思考角度或理解有偏差，可以让学生讲给老师听，从而发现学生思维上的漏洞。

讲什么	谁来讲	怎么讲
-----	-----	-----

自然思考	教师	讲给全班
有效思考	优等生	讲给同伴
简练思考	学困生	讲给老师

表 6.6-1 作业评价方式

7.7 单元教学设计反思

单元教学设计内容有序而旁支繁杂，在主线之下设计完整的单元教学设计方案之后，我们还应纵览全局，整体回顾设计过程，考虑设计环节的衔接性、逻辑性，全面性等问题。一般地，在通读教学设计过程基础之上，可以从以下几个方面入手进行设计的反思。（1）本单元研究的主要内容和脉络是否清楚并考虑到位？（2）我们采用了什么方法来研究这些内容的？（3）单元教学过程设计中的教学环节是否围绕学生开展，问题设置是否得当连贯？（4）对于本单元用到的前置内容“函数概念和研究函数的一般路径”，学生是否熟练？（5）三角函数概念区别于幂函数、指数函数、对数函数概念的显著特征是什么？

7.8 单元教学设计的访谈反馈

7.8.1 访谈对象与访谈内容

新课程改革之后，《三角函数》内容安排在人教 A 版（2019 年版）必修第一册第五章。根据成都市教科院教学规划，本章内容在高一上学期的期末学完。2022 年进入高中的学生是第一批参加新高考改革的对象，目前本校只有高一和高二教师采用新教材教学。所以，我选择了高一数学教研组长 A（教学能力强，教龄 12 年）和两位高二数学老师（一位也是教研组长 B，教龄 16 年，另一位老师 C 教龄 7 年）作为访谈对象。访谈主要内容是基于单元教学设计操作步骤与特点的理论梳理，对本研究第六章开发的《三角函数概念》单元教学设计案例，进行阅读之后的想法访谈。

7.8.2 访谈过程记录

访谈目的是借助他人视角和教学经验，评价第六章开发的《三角函数概念》单元教学设计案例的先进性和实用性。对此，在访谈过程中，我提出了 3 个主

要问题，并对三位老师的访谈结果进行汇总。

(1) 在阅读本论文之前，您是否清楚单元教学设计的内涵和具体开展过程？阅读之后呢？

A:我经常关注教学改革动态，阅读之前就清楚。简单来说，单元教学设计就是整体视角下的教学设计。关于开展过程，我之前就曾借鉴吕世虎教授 2017 年提出的五大步骤，进行过教学设计实践。所以，对这一领域熟悉。

B:熟悉。近年来，关于单元教学设计和单元作业设计的比赛也是越来越多。我就参与过相关课题研究。

C:阅读你论文之前，没有从专业角度去研究这一板块。但是，结合平时新课改的培训，对于其含义还是有自己的解读。阅读之后，理解更加深刻。而且，你的研究中的理论部分描述的很详细，步骤清楚，可操作性很强。后面我可以尝试去开展相关研究。

(2) 关于第六章《三角函数概念》单元教学设计案例，请从完善性、实用性等谈谈您的想法。

A:你的案例开发是基于自己梳理的单元教学设计步骤进行的。步骤本身考虑全面，逻辑自然，所以整体框架没有问题。尤其是课程教材分析板块，无论从《三角函数》大单元视角，还是《三角函数概念》小单元视角，都对教材编写意图考虑的很全面。只有大方向走对，接下来的路才不会出大差错。另外，关于实操行还是比较强的。而且，你引用的 CTI 教学模式，本身就注重“知识建构”和“问题情境”创设，这也是培养核心素养的核心手段。所以，建议你后续结合自己的研究开展实验教学。

B:从设计中明显看出，对于三角函数的学习你的研究很深入。可以说，你有一个最大的“单元”——函数单元，这个单元是对必修一整本书的几类函数的综合解读。你引用的那个比喻很形象，说整个函数框架的学习过程就像一节课的几个环节一样，有理论知识、例题、练习和变式练习。然后，还有一个《三角函数》单元视角，双管齐下，研究比较到位了。另外，再谈谈你第六章这个单元案例的实用性，因为我参加过相应比赛，从实用性来说很强，这也和你作为一线教师有很大关系，很多地方的问题预设都是从实际出发的，没有问题。

C:思维导图逻辑清晰，看完之后，让我对本章内容内部联系印象更加深刻。而且对于三角函数概念的研究，不仅是在这章中进行了分析，更是基于“函数”板块做了清晰解读，这是我比较意外的。还有那个单元作业设计，更是紧贴单

元教学设计过程，两者关系紧密，足以体现你所研究的单元整体性特点。是我要学习的地方。

(3) 您对于本章《三角函数概念》的单元教学设计有什么建议？

A: 你的这个小单元教学设计在理论支撑下研究相对全面，整体来看比较完善。当然，若在细节上打磨一下会更好。建议你后期除了进行教学实践之外，还可以换一个角度来研究三角函数概念，从而实现你的两个研究之间的对比性研究。

B: 提出几点建议哈。首先，注意设问的规范性，在同等含义之下，规范简洁的数学语言表达最能体现你的数学概括总结能力，也是我们提倡的数学简洁美。其次，相比于你的单元教学设计，你的单元作业设计细节还需要再完善。比如设置预计完成作业的时常，还有作业的排版等，可以借助“智学网”设置成机扫模式，这样更有利于实际教学。你的选题都是基于课堂教学内容的，而且连贯性强，没什么问题。

C: 建议每课时的反思提升板块，可以以设问的形式引导学生回顾。或者，关于本单元，可以让学生自己制作思维导图，凝练知识、思想方法的同时，提升数学核心素养。

7.8.3 访谈结果分析

对于 A 的意见，后续在教学中，我会继续深入研究我的课题，进行教学实验，并尝试老师提出的意见。对于 B 的意见，“注意设问的规范性”和“作业排版”，我已经做了修正。对于 C 的意见，在实际教学中，我会予以采纳。本研究中只是预设答案。

8 研究总结

8.1 研究总结

通过对高中数学单元教学的研究进度、研究方法和单元教学设计的研究内容的文献研究，确定了本研究采用 CTI 教学模式进行单元教学过程设计；文献分析法+理论研究+案例研究法的研究方法贯穿全文；以课程标准、教材编写意图、教学实际和学生认知结构为单元教学设计的策略和依据。

通过文献研究对“单元教学”和“单元教学设计”概念界定，概括性描述了“数学单元”和“数学单元教学设计”的内涵。对数学单元类型进行研究，其中以吕世虎等人提到的三种方式最科学全面。后续通过对三角函数单元分析，确定《三角函数概念》单元属于主题类单元。结合喻平教授在《数学单元结构教学的四种模式》中提到的“以问题解决过程线索为主题的单元教学模式”，确定本单元的教学过程设计为任务型、问题驱动的单元教学。这也与 CTI 教学模式中的环节——“创设问题情境”相一致。

正式开展《三角函数概念》单元教学设计之前，本研究做了大量前期分析工作。（1）通过梳理典型文献内容，总结出单元教学设计操作步骤和特点。（2）依据步骤进行《三角函数》大单元教学设计分析的研究。通过课程教材分析、确定单元内容和分析教学要素，明确课程标准的内容要求和整章的教学主线；通过梳理文献，确定单元学习目标层级为“学科核心素养—课程标准/内容标准—单元目标—课时目标—活动目标”；通过解读课标（2020 年修订）关于教学与评价建议，明确数学教学活动要重视过程评价，注重评价的整体性与阶段性，评价方式多元化，评价结果的呈现和利用应有利于增强学生学习数学的自信心；基于喻平教授提出的核心素养水平等级，提出了指向核心素养的单元作业设计框架。（3）以第 3 章和第 4 章研究结果为依据开展《三角函数概念》单元教学设计案例研究。筛选研究案例，设置编码系统，重点研究了案例中的学习目标、学习评价设计、学习过程设计和作业与检测设计。针对每个版块对比分析，取长补短。基于上述所有研究结果，在第 6 章开发完整的《三角函数概念》单元教学设计案例和单元作业设计。

本研究有三点相对突出：一是理论研究扎实，不仅梳理整合文献，归纳出单元教学设计操作步骤，而且借助《三角函数》对每个步骤进行了更细致的解读、基于核心文献理解，规范重点环节细节，使其可操作性更强；二是开发了

《三角函数概念》单元-课时完整的单元教学设计，三是围绕学科核心素养设计了配套的单元视角下的单元作业。总体来说，基于王磊等人对数学单元教学走向“新常态”提出的几点建议，本研究努力做到了两点，第一，“夯实设计功底，助力单元落地”；第二，“拓展理论研究，关注案例开发”。

8.2 教学建议

综合单元教学设计研究过程和研究成果，结合研究者本人的教学实践，我提炼了几点教学建议如下：

8.2.1 研读课程标准和教材，理清编写意图

课程标准和教材是我们开展教学设计的根基和方向标。在实际教学中，很多老师脱离课程标准谈教材，偏重于“知识传递”而非“知识建构”。造成这种现象的主要原因就是教师在备课时没有关注课程标准对于核心素养的要求，不明确相应知识点的核心素养水平要求，更不清楚“知识建构”的课堂教学如何设计。这也是本研究的目的之一，希望本研究中的单元教学设计操作步骤和案例对一线教师有启示。

8.2.2 注重整体性教学，落实核心素养

单元教学过程和单元作业是“教、学、评”一体化教学的两个重要过程。从学习分工来说，“单元教学过程”是学生理解数学概念、定理等，训练思维的核心阵地。“单元作业”作为知识的载体，是学生对课堂所学理论的灵活应用，深度理解。两者相辅相成，内部协调一致，共同促进学生核心素养的发展。从单元角度出发设计这两个环节，除了满足内部一致性，更要注重单元的整体性和逻辑性。相邻课时之间，以上节课的课时作业为桥梁，可以设置前置作业，为下节课的学习内容做铺垫过渡，也实现作业功能的最大化。本研究在第6章《三角函数概念》单元教学设计案例中的一单元—三课时教学设计中的6.5和6.6两节内容，就是以课时作业为桥梁开展进行的。在6.6.2节就是《作业设计与教学设计的联系》的突出说明。

8.2.3 注意宏观调控，紧扣单元主线

单元教学设计与课时教学设计是总一分结构。若没有大视角下的单元整体分析,课时教学设计就只局限于一课时的研究,容易出现“一叶障目”的情况,导致教师的教学内容没有铺前引后,缺少维度的提升,课堂效率不高的现象。而在单元教学设计之下,教师的课堂把控就会游刃有余。比如,不纠结于时间不够一道题没讲或者要不要讲这道题等小问题上。以单元为单位教学,学生在逐渐提升核心素养的过程中,后续大致可以自己解决问题。

8.2.4 注重变式,提高“学”与“教”的质量

变式教学在单元教学设计理念之下作用更加显著。变式训练的精髓就是不断启发学生,活跃思维,寻找变与不变的联系,在对比中领悟数学中的“万变不离其宗”思想。体会数学设问的切入点,通过长期培养,学生能逐渐学会举一反三,潜移默化提升数学核心素养。同时也大大提升课堂效率。

教师设计变式练习需要注意关键的两点。一是把握变式的“度”。选择有代表性的典型例题,体现教学的必要性,然后再进行变式。若问题间跨度较大,但有已学内容做辅垫台阶,可以增加学生对新知识的探究性和挑战性;若跨度太近,学生将感觉不到学习的挑战性而缺乏思考;跨度太大,学生又会因为题目太难而畏学,这都不利于学生的激发学习热情,反而事倍功半。二是在进行变式训练后,需要引导学生对问题中所涉及的思想方法进行归纳总结,促进思维的迁移和应用^[2]。

8.2.5 关注学习评价,实现高效教学

为了促进学生成长与发展,教师要在教学中对学生学习过程中的困难与障碍提供反馈与指导,即进行学习评价。根据不同的内容安排合适的评价方式。在教学过程中,过程性评价活动要贯穿教学全过程。有效的过程性评价能够帮助教师掌握学生的学习状态和存在的问题,帮助学生了解自己的收获和障碍,从而诊断并推动教学活动逐渐接近教学目标,真正实现“教、学、评”一体化教学。

8.3 研究不足与展望

一,本研究最终目标是让单元教学设计理论落地的案例开发研究。该研究不仅加深自己对高中数学单元教学理念的深刻解读,更希望研究成果对一线教

师开展单元教学提供案例参考价值。但是关于案例在实际教学的效果并没有通过实验法验证，这不是本研究的目的，但是如此一来，《三角函数概念》单元教学设计案例对发展学生学科核心素养的效果总归缺少实践证明。这一点在我后续的教学生涯中会进行实践，也期待其他一线教师进行实践，提出改进意见。期待学者们开展基于核心素养的数学单元教学的评价研究。

二，数学教学活动的评价目标，既包括对学生学习的评价，也包括对教师教学的评价。基于数学学科核心素养的教学评价具有挑战性，后续希望老师们可以采取教研组集体研讨的方式设计评价工具和评价准则。

三：关于方法类单元和素养类单元的研究较少，希望后续有所突破。

后续我会继续夯实设计功底，开发设计其他数学知识板块的单元教学案例，助力单元落地；在平常教学实践中时刻重视学生学习效果评价，从而反映学生的个性特征和学习中的优势与不足，为改进教学的行为和方式、改进学习的行为和方法提供参考。

参考文献

- [1] 崔允漷. 如何开展指向学科核心素养的大单元设计[J]. 北京教育(普教版), (2):11-15, 2019.
- [2] 邓天, 唐小文, 段小龙. 筹谋单元之全局启于引言之设计——以《三角函数》为例谈单元教学视角下的章引言课设计[J]. 数学通讯, (18):8-11+26, 2021.
- [3] 国务院办公厅关于新时代推进普通高中育人方式改革的指导意见[J]. 中华人民共和国国务院公报, (18):35-39, 2019.
- [4] 何小亚, 张敏, 李湖南等. 数学单元教学设计标准与案例[J]. 数学通报, 60(05):46-48+53, 2021.
- [5] 侯梁燕, 田莉. 解构与重构: 混合式教学中的过程性评价再认识[J]. 上海教育评估研究, 10(05):45-50, 2021.
- [6] 李保臻, 吕雅雅, 关丽娟. 数学单元教学设计的基本原理与实施策略探究——以初中“图形的平移与旋转”单元设计为例[J]. 中小学教师培训, (3):45-50, 2019.
- [7] 李昌官. 基于核心素养的数学单元教学[J]. 中国数学教育(高中版), (5):3-6, 2018.
- [8] 李家齐. 高中数学单元作业设计与实施[J]. 上海课程教学研究, (Z1):67-71, 2019.
- [9] 李磊, 安桂清. 以单元为单位进行整体教学设计[J]. 人民教育, (01):52-55, 2019.
- [10] 李润洲. 指向学科核心素养的教学设计[J]. 课程·教材·教法, 38(07):35-40, 2018.
- [11] 林珑, 喻平. 斯腾伯格成功智力理论对中学数学教学的启示[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), (03):20-26, 2023.
- [12] 刘权华. 高中数学单元教学设计存在的问题及对策[J]. 教学与管理, (4):55-57, 2019.
- [13] 吕世虎, 吴振英, 杨婷等. 单元教学设计及其对促进数学教师专业发展的作用[J]. 数学教育学报, 25(05):16-21, 2016.
- [14] 吕世虎, 杨婷, 吴振英. 数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J]. 当代教育与文化, 8(04):41-46, 2016.
- [15] 庞志雷. 核心素养视角下数学学科单元教学设计的方法与策略[J]. 青海教育, (05):42-43, 2019.
- [16] 钱卫红. 素养导向的数学单元整体教学设计的内涵与路径[J]. 中学教研(数学), (07):12-14, 2023.
- [17] 邵朝友, 崔允漷. 指向核心素养的教学方案设计:大观念的视角[J]. 全球教育展望, 46(6):11-19, 2017.
- [18] 邵朝友, 杨宇凡. 回顾与反思:近十年我国单元教学设计述评[J]. 现代教育论丛, (04):59-68, 2020.
- [19] 邵朝友. 单元设计的理论与实践[R]. 北京:北京第一六六中学, (04):11, 2019.
- [20] 孙秀萍. 斯腾伯格智力理论对教育的启示[J]. 当代教育科学, (18):48-50, 2007.

- [21] 王磊, 陈建明, 杨博谛等. 回顾与启示:近四十年中国基础教育数学单元教学研究[J]. 数学教育学报, 32(04):21-27, 2023.
- [22] 吴新静, 盛群力. 理解为先促进设计模式——一种理解性教学设计的框架[J]. 当代教师教育, 10(02):40-47, 2017.
- [23] 杨婷. 高中数学教师单元教学设计存在的问题及对策研究[D]. 西北师范大学, 2017.
- [24] 余胜泉, 胡翔. STEM 教育理念与跨学科整合模式[J]. 开放教育研究, (4):13-22, 2015.
- [25] 喻平. 发展学生数学核心素养的一个教学模式建构[J]. 数学通报, 62(09):1-6+11, 2023.
- [26] 喻平. 核心素养指向的数学作业设计[J]. 数学通报, 61(05):1-7+12, 2022.
- [27] 喻平. 数学单元结构教学的四种模式[J]. 数学通报, 59(5):1-8,15, 2020.
- [28] 张优幼. 指向认知结构生长的大单元教学[J]. 教学与管理, (26):31-33, 2019.
- [29] 章飞. 数学学习任务整体设计的意义与路径[J]. 中小学教师培训, (5):54-57, 2018.
- [30] 章建跃. 用几何直观和代数运算的方法研究三角函数[J]. 数学通报, 59(11):4-13+57, 2020.
- [31] 章建跃. 《普通高中教科书·数学(人教 A 版)》“单元一课时教学设计”体例与要求[J]. 中学数学教学参考, (22):14-16, 2019 .
- [32] 《中共中央国务院关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》[J]. 河南教育(基教版), (09):1, 2019.
- [33] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京:人民教育出版社, 2020.
- [34] 钟启泉. 学会单元设计[J]. 新教育, (14):1, 2017.
- [35] 钟毅平, 叶茂林主编. 认知心理学高级教程[J]. 安徽人民出版社. 2010.
- [36] Erich F and Carl R. 《Constructivism in the Classroom: Learning by Doing》[J]. Harper & Row. 1961.
- [37] Jingxi H, Jilei J. The overall teaching design of physics units using transfer learning of big concepts:Taking Electrical Power as an example[J]. Frontiers in Educational Research, 6(27):53-56, 2023.
- [38] Nyunt N K S, Buxin H. Effectiveness of successful intelligence training program: A meta-analysis[J]. PsyCh journal, 10(3):323-339, 2021.
- [39] Zhou M, Deng P. The cultivation of core competencies in disciplines in large unit teaching design[J]. International Journal of New Developments in Education, 5(9):45-47, 2023.