

在美国推动教育数学(上)

文 | 童增祥



作者简介：童增祥，男，1944年生于上海，1966年毕业于南京大学数学系，在上海的中学里任教12年，又在上海铁道学院的模糊数学研究室工作了6年，于1985年去美国。1991年获得特拉华大学的应用数学博士学位。从1991年至今，一直在奥特本大学的数学科学系任教，现在是该大学的终身教授。2000年获得奥特本大学最优秀教授“教学大师”奖。2007年至2010年任奥特本大学数学系系主任，2013年被奥特本大学授予约翰佩顿教育数学讲座教授的荣誉。近年来，童增祥教授在美国实践、推广张景中院士的教育数学思想，弘扬中国数学文化，并担任“张景中院士工作室”客座教授。

引言

我是一位数学教授，但在今天的会议上，实实在在是一个小学生。这篇报告，与其说是学术报告，不如说是在师长面前，披沥我的心路历程，叙说我在美国两所大学教学28年所见到的美国学生和数学教师，叙说我怎样幸遇教育数学，怎样在数学系里推动教育数学的相关情况。我认为，教育数学的理念是中国数学家的一个伟大创造。中国的数学教育界需要教育数学，美国的数学教育界更需要教育数学。张景中院士和在座的各位师长关于教育数学的智慧之火燎原于美国之时，就是美国的数学教育重归灿烂辉煌之日。

回顾我“文革”前后的青壮年时期，我想提及两点：一是我一直感激那些鼓励、指导、教诲我进入数学之门的师长，特别是南京大学的唐述钊、孙光远、钟瑚绵、黄正中、曾远荣、仇庆久、王声望教授，华东师范大学的程其襄、李锐夫教授，上海师范学院的吴望名教授，北京师范大学的汪培庄教授，四川大学的刘应明教授，上海铁道学院的楼世博、李鸿祥教授；二是我热爱数学，热爱学生，热爱数学教学，一直希望以最有效的教学帮助学生学得快、学得好、学得深。“文革”结束后百废待兴，1977、1978年，上海市普陀区举行以班级

为单位的数学团体竞赛,我任教的班级连续两年获得第一名。1978年,上海举办“文革”后的第一次数学竞赛,我辅导的一位学生获得第三名。我的儿子于1989年至1991年连续三年获得特拉华州全州初中数学竞赛第一名,于1993年获得俄亥俄州全州高中数学竞赛第一名。

我1985年10月来美国,至今已近32年。我主要在两所大学(特拉华大学和奥特本大学)任教。特拉华大学有20000多名学生,其学术上的综合排名,在全美3600多所大学中位列第75名。奥特本大学是私立大学,有3000多名学生,其学术上的综合排名,在美国中西部200多所可授硕士学位的类似大学中位列第12名。这两所大学当然不是长春藤名校,其入学新生的学术水准位于全国前25%至40%,因而更能代表美国的大学水平。我教授的课程有微积分、线性代数、微分方程、复变函数、实变函数、组合数学、高等几何、概率论,也有数学史、数学文化、高等数学入门,还教过实际上是中学数学的三角以及大学代数、前微积分和初等数理统计。所以,我了解美国数学上各种层次的学生。

美国大学生的数学基础出奇地差

我在来美国前,曾以为美国的科学和数学教育无疑是世界第一。来美国后的一大震撼是发现美国相当数量的大学生,其数学基础是出奇地差。以下是我的观察和估计。

初等代数:(1)40%的学生不熟悉和平方公式、差平方公式和平方差公式,70%的学生不熟悉立方公式和差立方公式,85%的学生不熟悉立方和公式和立方差公式。(2)70%的学生不会做较为复杂的分式运算。(3)85%的学生不会证明一元二次方程的求根公式。(4)99%的学生不知道一元二次方程的根与系数关系的韦达定理。

初等几何:(1)70%的学生不会证明三角形内角和是180度。(2)70%的学生不知道三角形的中位线定理,90%的学生不会证明这个定理。(3)95%的学生不知道三角形一个内角的平分线将对

边分成两段,这两线段的长度之比等于这个角的两条邻边之比,99%的学生不会证明这个定理。(4)99.999%的学生不会证明三角形三高共点的定理。我不说是100%,因为我不愿意绝对化,或许有人坐在教室里的哪个角落,默默地三言两语证明了这个定理,却没有展示给我看。

美国学生中,数学表达不准确、不规范、不合逻辑,以及不会证明,害怕文字题,不敢做难题的比比皆是。

美国的数学教师都优秀吗?

我在美国的又一个震撼是发现有相当数量的数学教师并不对其所教授的数学有透彻严谨的理解。整体而言,美国的数学教师未必是世界上最好的。下述几例都是我的亲眼目睹。

1.一位教授A(数学教育博士)在数学文化课上解释无限有不同的等级,无理数集合的势比整数集合的势大的时候,说:“你们看,一个整数2可以产生无限多个无理数,平方根2、立方根2、四次方根2,等等。所以,无理数集合的无限,比整数集合的无限要大得多。”

2.一位教授B(数学教育博士)对数学补习班学生解释一元二次方程求根公式中的正负号来自于平方根法则,说:“ x 的平方是9,两边开方,左边是 x 的绝对值,右边是3,所以 x 等于正负3。”另一位教授问B:“假如 x 的平方是负9,两边开方,左边是 x 的绝对值,右边是虚数 $3i$,所以 x 等于正负 $3i$ 。这也是平方根法则吗?”B说:“是的。”

3.一位教授C(数学教育博士)分析一道抽象代数习题,如果一个群的每一非单位的阶数都是2,那么这个群一定是阿贝尔群。教授C花了25分钟,分析了几种情况,几乎写了一黑板。一位听课的教授课后对他说:“你的详细分析固然对学生有益,但是就题论题,只需一句话即可直捣黄龙,完成证明。”教授C听了,却是一片茫然。

4.一位教授D(数学教育博士)颇为著名,到另一所大学申请讲座教授职称,被邀请试教概率论随机变量引论。他准备的Power Point讲稿上定

义着：“连续型随机变量是可以取无限多个值的随机变量。”在面试中，另一位教授问他：“假如你被录用，教哪些课程是你喜欢而且擅长的？”他的回答中，概率论赫然列在第二位。

5.一位年轻的图论新博士 E 申请一个大学的助理教授职位，被要求试教微积分中求极值的应用问题。题中涉及一个分式函数的求导。学生发现 E 写在黑板上的导数答案是错的。E 看着黑板，却不知自己错在哪里。学生请 E 用求导法则一步一步演示，只需 1 分钟即可得到结果。E 略显羞涩，说为了不影响教学进程，就不演算了。奇怪的是，这个系里的大多数教授主张录用 E。

6.一位年轻的代数学新博士 F 申请一个大学的访问助理教授职位，被要求在该系的教授面前试教微积分基本定理及其应用。F 叙述了基本定理的两个部分，准备讲应用的例题。一位教授说：“且慢。请先证明该定理的第一部分：若函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则函数在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且在 (a, b) 上。”F 开始证明……卡住了。他停顿了一会，就直接写了结论。那位教授不肯放松，请 F 说明怎么能跳跃到最后的结论。F 脸色泛红，承认自己是知其然而不知其所以然。

7.一位教授讲了一个真实的故事。他的儿子 G 是某城一所较好的初级中学的学生。一天，G 带回来一张彩色图，图中两个一样的大三角形，由几块同样的图形拼成，只是拼图的次序不同。奇怪的是一个大三角形比另一个多出了一个小方块。怎么会凭空多出一个方块？那个学校有十多位数学教师，却没有一位能破解其中的奥秘。他们知道 G 的父亲是一位数学教授，所以请 G 的父亲为他们释疑解惑。

8.一位中年的中学教师 H 到一所大学申请一个初等数学的临时教职。系主任与他面谈，以了解他的教学经验和知识背景，结果发现 H 已有近 25 年的教龄，却不懂得排列组合，连排列组合的定义也不知道。

9. 一个高等欧几里得几何班里有 8 位高中或社区大学的教师。教授问他们最喜欢哪一本几何著作。令人惊讶的是，他们列不出一本书。他们都有

10 年、20 年，甚至 30 年教授几何的经验，却除了所教的教科书之外，没有读过一本或深或浅、或有趣或严谨、或可修炼自身或可辅助教学的几何书！

10.一位教授 J(数学教育博士)作讲演，介绍教育学中的布鲁姆分类学说。他引经据典，显示图表，滔滔不绝，认为一个教授在数学教学中要有意识地注意认知和思维的六个层次——知识，理解，应用，分析，综合和评判——才能给予学生完备的数学教育。有一位教授对 J 说：“你是一位数学教授，请你以你的教学，一个科目，一堂课，一个概念，或者一个问题为例证，说明你是怎样引导学生的认知在这六个层次上逐步深入、逐步提高的。”J 顿时张口结舌，最后王顾左右而言他了。

我估计在美国 3600 多所高校中，不合格的数学教师占 10% 至 15%，在美国的中小学中不合格的数学教师占 20% 以上。要提高美国中小学数学教育的质量，关键在于提高现任和未来的教师的质量。单纯增加钱未必有用。要有智慧地使用钱，把钱用到培养教师、提高教师的事业中去。

为什么——疑惑复疑惑

1993 年至 1995 年间，我和系里的同事谈起我的发现，说我内心感到很震撼、很失望、很不安。一位美国教授说，“你的参照物不恰当。中国只有极少数人接受高等教育，所以进入大学的都是精英。美国的高等教育已经普及，只要愿意，高中毕业生几乎都可以进大学。”我想也对，我 1961 年进南京大学，那时，我同年龄的青年中只有小于 2% 的人有幸入大学；而美国，则是 30% 甚至更多的青年进入了大学。

但是，这个解释没有完全消除我的疑惑。进入大学的青年至少应该高中毕业了吧，这样的数学程度怎么能毕业呢？学生没学好，错误应该是千奇百怪的，带有鲜明的个人色彩。为什么很多来自不同地区、不同学校的学生会犯类似的错误呢？我从自己直接的朴素的经验中知道，美国中小学的数学教育中存在着问题，且是相当严重的问题。问题在哪里呢？

总统的药方不管用

美国的有识之士也都意识到数学教育中存在着问题。各届总统,如里根、布什、克林顿、小布什和奥巴马,都看到美国中小学生的科学和数学知识已沦于世界上的二流甚至三流水平,都信誓旦旦要恢复美国的辉煌。他们充满信心,认为美国有世界上最好的教师队伍,又是世界上最富有的国家,只要不断地增加钱,优秀的教师就一定能培养出最优秀的学生。但是,总统的药方不管用,年年岁岁豪言壮语,岁岁年年拨款增钱,效果却不明显。问题的症结在哪里呢?

我的早期药方——东方与西方相结合

怎样才能有效地提高教师的质量呢?20世纪末,我的结论是要在西方的教育思想、教育制度、教学方法中注入中国的因素、中国的精神,要提高教师的数学知识和素养。2000年,我在系里作了一个报告,题为“教就要学”,副标题是“东方与西方相结合”,其英文或许更传神,是“To Teach Is To Learn——The East Meets The West”。2001年初,又在美国数学学会(AMS)和美国数学协会(MAA)的联合年会上作了报告。经学会中一些同仁和朋友的鼓励与推荐,2002年夏,又在北京举办的国际数学家协会(ICM, International Conference of Mathematicians)的会议上作了报告。这个报告虽然反应较好,但是反响不大,我自己也不甚满意,因为没有清晰的概念,什么是教师的数学知识和素养也不是很清晰。

幸遇教育数学——如露入心,醍醐灌顶

大约是2007年,我的良师益友张肇炽教授告知我,张景中院士提出了教育数学的概念,倡导教育数学的研究。我从互联网上找到张院士的著作《从数学教育到教育数学》,下载后进行了阅读。在此,我必须先向张院士致歉,因为从互联网上下载

是侵犯了张院士的知识产权。张院士的著作,从数学的内部揭示数学的美,充溢着深思、精思、巧思,而且文字简洁、精到、优美,秋水文章不染尘。张院士关于教育数学的论述,关于数学材料的教学法改造与教育数学内容的再创造的区别的论述,真正是精辟之至,读之如露入心,醍醐灌顶。我郁结心中的欲言难言、模糊朦胧的观念顿时清澈如水。

自20世纪60年代失败的新数学运动以来,美国的中小学数学教育江河日下,已陷入深重的危机。美国学生在国际数学统考和竞赛中的屡屡失败只是冰山一角。实际上,美国的数学教师、教材、教法,甚至教育思想和教学大纲都存在严重的问题。这是一种系统性的病,几入膏肓。美国的有识之士,包括近40年来的总统,都看到了病症,担心美国会因此而衰落,但都开不出有效的药方。他们的主药就是钱,以为有了钱就会有足够数量的教师,有了教师就会有优秀的学生。我的认识是,美国数学教育沉痾之一是教师的质量。中小学、技术学校、社区大学,包括部分普通高校中,有相当数量的数学教师数学素养之低,简直让人不可思议。他们的数学知识是断砖碎瓦,一盘散沙,而不是结构精妙的哥特式教堂。美国需要的不是泛泛的教师,而是优秀的教师。优秀的教师有两个来源,一是改革师范的教育,二是再教育现职教师。师范教育应改革,应以教育数学为指针,为重点,为核心。教师的再教育、再学习、再提高有两类方法,一是被动的学习,二是主动的学习。被动的学习就是现行的教师培训计划,教师无针对性地选修一些大学课程。主动的学习就是从事教育数学的学习和研究,有针对性,有明确目标,用高的新的观点看所教的初等数学,明确其逻辑结构,或改善优化其逻辑结构,增删内容,去粗取精,必要时增添精妙的内容,以帮助学生提高数学素养,培养严谨的逻辑,欣赏数学的美,具备数学家的眼光。钱多教师多,学生未必优秀;有大量优秀的教师,必然会有大量优秀的学生。所以,我认为张院士关于教育数学的智慧之火燎原于美国之时,才是美国的数学教育灿烂辉煌之日。

(未完待续)