

# 从普适的信息技术到数学教育技术

## ——信息技术与数学教学深度融合的思考

■ 王鹏远 张景中

### 一、从一节美国的视频公开课谈起

2013年，有位朋友推荐了一节美国的网络公开课，主讲人是Conrad Wolfram，演讲的题目是“用计算机教孩子真正的数学”。这个题目令人关注：什么是真正的数学？莫非我们现在教的不是真正的数学？又怎么用计算机教数学？我们从1990年开始把计算机手段引入教学，很想看看国外教师在这方面是怎么做的。带着这些疑问，我们反复观看了这个演讲视频。视频中，演讲者指出，我们的时代正由“知识经济时代”转变为“计算机经济时代”。一方面，现在的数学比人类历史上任何时期都更重要，我们的世界比以前更加趋于数学化；另外一方面，人们正逐渐丧失对数学的兴趣。

所谓真正的数学，演讲者指的是与我们所处时代的现实世界密切联系的数学。从这个角度看，目前学校的数学教育与此有些脱节。至于学生对数学逐渐丧失兴趣与我国的情况有些相似，两国的数学教育面临同样的困难。怎么解决呢？演讲者提出“现在需要进行一场以计算机作为数学教育工具的改革，且刻不容缓。恰当使用计算机应该是使数学教育变得有效的一剂良方，率先这样做的国家一定会鹤立鸡群”。

既然美国专家开出了这样一副使数学教育变得有效的良方，美国的基础数学教育一定该“鹤立鸡群”了吧？其实不然。据报载，通过调查，美国的学生使用技术与不使用技术的成绩相差无几！美国基础数学教育的现状并不乐观。这说明如何在数学教学中“恰当”使用技术的问题并没有真正得到解决。

2015年，在青岛召开的国际教育信息化大会上，华中师范大学校长杨宗凯教授对我国教育信息化进程作了总结：第一阶段是起步阶段，主要工作

是架网络、买设备、配软件、建资源以及对教师的技术培训；第二阶段即“应用整合”阶段，主要的工作是教材的电子化、课程的网络化、教学的PPT化和教室的多媒体化（“新瓶装旧酒”）；今后将进入“融合创新”阶段，即第三阶段，主要工作内容为技术与教育教学深度融合和技术与教育管理深度融合（“新瓶装新酒”）。

“教学的PPT化和教室的多媒体化”，这的确反映了近年来课堂教学的变化。杨校长说这是“新瓶装旧酒”，说到了点子上。这些做法确实没有对基础教育产生实质的影响。下一阶段“融合创新”的提法也切中要害，但“新瓶”怎么装“新酒”呢？

“新”体现在何处？对于数学教学来说，怎样才能实现技术与数学教学深度融合，这实在是一个值得深入思考的问题。

让我们从数学教学的学科角度考察信息技术的影响。《义务教育数学课程标准（2011年版）》载明：“信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容及教学方式产生了很大的影响。”“数学课程的设计与实施应根据实际情况合理地使用技术，要注意信息技术与课程内容的整合，注意实效。”但是，究竟信息技术的发展对数学教育的价值、目标、内容及教学方式产生了怎样的影响？单从教学资源看，当前的数学教学主要还是依靠纸质的教科书，并没有多大变化！从教学内涵看，也没有看到信息技术的发展使教学内容发生实质性的改变。另外，“课标”提出的“注意实效”的确反映出近年来数学教学出现的“为技术而技术”的追求形式的问题。于是，技术有效使用的问题提到了议程上。能否实现技术与数学学科深度融合，它每天影响着数学教学的质量。我们需要思考：在数学教学的什么场合、什么内容需要使用技术？使用什么技术？怎样使用技术？

## 二、从普适的信息技术到数学教育技术

普适的信息技术对数学教学是有影响的。不论是教语文还是教数学，很多教师上课已经离不开PPT了。普适的信息技术，例如PPT，确实能够节省教师的劳动，但它毕竟不是专为数学教学设计开发的。比起普适的技术更进一步，数学教育技术把学科知识与信息技术有机地结合起来了。它诞生的目的，就是为数学的教与学服务。20世纪80年代，美国国家科学基金支持下开发了“几何画板”，第一次把动态几何引入数学教学，对数学的教与学产生了革命性的影响。过去，教师指着黑板上一个画好的三角形，讲述三角形三条高线交于一点的垂心定理。现在，动态几何环境下三角形的顶点可以任意拖动，这使学生把众多三角形收入眼底。不管三角形怎样变动，高线都交于一点。在图形的千变万化中，学生对其共性一目了然！再比如，动态三角形还生动直观地显示出三条中线交于一点的性质；借助动态测量的功能，容易发现这交点把每条中线分成2与1之比。这是传统教学手段无法做到的。动态几何呈现的四边形，不管是凸的还是凹的，其中点四边形总是平行四边形，利用鼠标拖动改变四边形的形状，还便于考察一般的平行四边形与特殊的平行四边形的关系，类似的例子还有很多（如角的平分线与线段平分线的性质、两圆的位置关系、圆周角的性质）。

动态几何的使用，不仅极大地提高了教学效率，更重要的是有利于深刻且直观地揭示图形的本质属性。可以说，“几何画板”打开了数学课程改革的一扇窗户。但是，开发软件平台不是数学教育技术的全部，应用软件平台也是数学教育技术的不可缺少部分。我们在1998年写了《如何用几何画板教数学》一书，着重探讨怎样把这种技术恰当地用在教学中，包括使用的时机、方式与传统教学手段的配合。

我国自主开发的数学教学软件“超级画板”在20世纪初就投入使用了。“超级画板”把动态几何推广为动态数学，使用更方便，功能更强大。它不仅能更好地服务几何教学，还满足了代数、概率统计、微积分初步、算法等多方面教学的需求，对数学教学的目标、内容、教学方式等诸多方面产生了更为深刻的影响。如果说“几何画板”打开了数学

课程改革的一扇窗，那么或许可以说“超级画板”为数学课改打开了一扇门。

譬如计算，信息技术的进步对计算教学的影响就很显著。分解一个大数123454321，解一元二次方程，计算10的阶乘，计算一个复合函数的导数，计算……这些都是枯燥的力气活儿。在“超级画板”用一个命令马上能得到结果，这些命令（在“超级画板”免费版提供的“方便面”中）很容易掌握，如“分解”的命令是“f(j)”“阶乘”的命令是“j(c)”“求导”的命令是“ds()”，解一元二次方程的命令是“fc12()”。于是，在计算教学中我们需要思考在什么情况下还要坚持笔算，哪些传统教学中繁复的计算训练应该省略，教学的重点应该放在哪里（如概念、算法、算理、建模）。“一枚均匀的硬币掷100次，恰好50次正面朝上的概率是多少？”我们的教学重点应放在分析算法和算理，具体的计算则交给计算机；又如对中学阶段导数的教学，重点在于搞清导数的概念，而不必花费更多时间用于复合函数求导的训练上。

数学除了需要画图计算之外，有时还需要证明。“超级画板”正好提供了机器证明的功能。有人会有疑问：既然计算机能够证明，那还需要我们教给学生证明吗？这对培养学生的逻辑推理能力不见得是好事。其实要看怎么恰当地在教学中利用这一功能，“超级画板”提供的证明是可视化的，图形语言与论证用到的符号语言同步显示，既能给出分析的思路，又能给出有条理的证明过程，这对帮助学生理解几何证明肯定是有帮助的。

看一个例子，在 $\triangle ABC$ 中 $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$ 分别为三边的中线，过 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 三点作圆与三边交于点 $G$ 、 $H$ 、 $I$ ，问：你发现图形中的哪些性质？

在“超级画板”画图后选择推理按钮，经过十多秒，计算机显示出2565条信息（如图1）！

|                                |
|--------------------------------|
| ① 共2565条非平凡信息(推理时间:10.274175秒) |
| ② 共2565条非平凡信息(推理时间:10.274175秒) |
| ③ [2] 任意相等信息共30条               |
| ④ [3] 相等角信息共384条               |
| ⑤ [4] 共线信息共31条                 |
| ⑥ [5] 线段和信息共11条                |
| ⑦ [6] 线段的不等式信息共216条            |
| ⑧ [7] 角的和信息共18条                |
| ⑨ [8] 互补角信息共273条               |
| ⑩ [9] 互余角信息共237条               |
| ⑪ [10] 中点信息共3条                 |
| ⑫ [11] 角平分线信息共9条               |
| ⑬ [12] 平行线信息共9条                |
| ⑭ [13] 垂直信息共6条                 |
| ⑮ [14] 斜直角三角形信息共15条            |
| ⑯ [15] 等腰三角形信息共9条              |
| ⑰ [16] 直角三角形信息共9条              |
| ⑱ [17] 全等三角形信息共27条             |
| ⑲ [18] 镶形信息共9条                 |

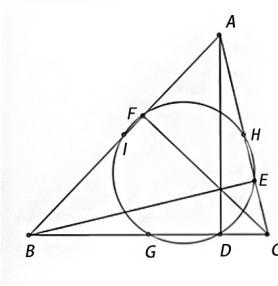


图1 利用“超级画板”分析图形几何性质

这个结果令人惊叹，所以可以把“超级画板”看作洞察图形的“显微镜”。这双慧眼对几何的证明教学绝对是很有意义的。我们打开左边第12条“角平分线”前面的加号，可得到9条有关角平分线的信息，打开最后一条前面的加号，就能得到说明 $AD$ 是 $\angle DEF$ 平分线的理由。按鼠标右键又可以得到本题的完整证明过程（如图2）。

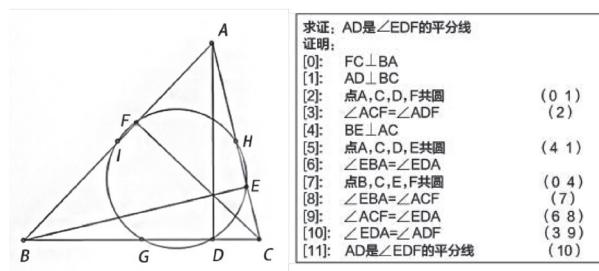


图2 利用“超级画板”求证



这样一来，可以把“超级画板”作为一个满足完整数学活动要求的实验室（由画图观察猜想到证明），也可以看成一个拥有极大容量的灵活的题库。这无论对教师的备课，还是学生的课外活动以及对学生的个别辅导，都有积极的作用。

如何促成技术与数学学科的深度融合，笔者认为现在需要对数学教育技术进行深入的研究和大力推广。推动和主导教育信息化的信息技术专家与推动和主导数学课改的数学教育专家在这方面应该发挥更大的引领作用。

### 三、信息技术与数学教学内容的深度融合

讨论信息技术与数学教学内容的深度融合，还要细化研究信息技术对于数学学科的不同领域教学的恰当应用案例以及技术在不同课型教学中的有效应用案例。不做具体深入的研究，遑论技术与数学学科的深度融合。

例如，函数教学是中学数学教学的重点。在技术的支持下怎么引入抽象的函数概念，怎么帮助学生理解函数图象的生成，怎么画出函数的图象，怎么研究函数的性质，都是值得研究的。至今，这部分教学我们大都还沿用老一套教学方法，没有充分发挥技术的作用，其实技术在这部分教学中深藏的潜力有待挖掘。如研究函数性质的途径，一般是画

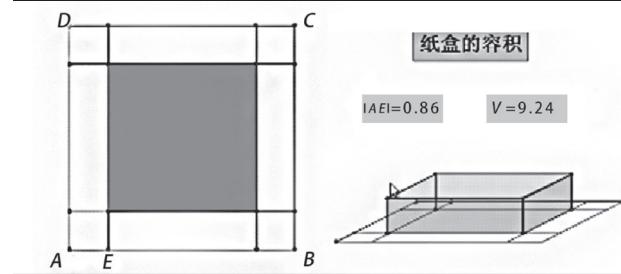


图3 “超级画板”显示长度与容积的关系

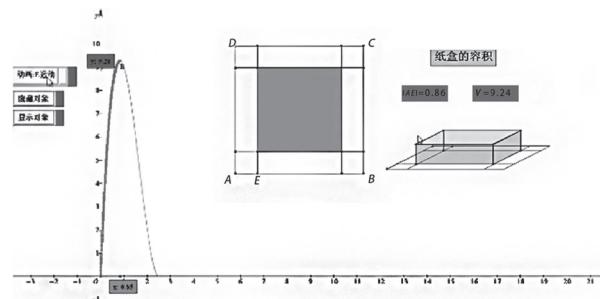


图4 “超级画板”显示长度与容积的函数对应

出函数图象的略图，再从观察图象的走势得出函数的性质。细一想，画出的图象只是自变量变化范围的很少一部分，由此推出自变量从10变到100或1000时函数变化的情况，当然只能是猜想！而利用“超级画板”的计算功能，加一个“动画”按钮或“变量尺”，就可以动态地观察在一个相当大的范围内函数变化的情况。又如，引入函数概念举什么样的例子很重要。我们做了一个关于讨论纸盒最大容积的课件。通过鼠标选择 $E$ 点拖动（如图3），右面的“纸盒”随之变化，同时显示出 $AE$ 的长度和“纸盒”容积的值的对应关系。图4则给出纸盒容积变化的图象。这个例子可以印证引入函数概念的必要，并揭示函数概念的“对应”本质。

几年来，我们在数学教学的各个领域积累了一大批教学案例，我们愿意结合各类的教学案例与同行和专家探讨，集思广益，凝聚共识。这对促成技术与数学学科教学的深度融合应该是有益的。

（作者王鹏远系北京大学附属中学高级教师；张景中系中国科学院院士，计算机学科和数学学科博士生导师，中国科普作家协会理事长）

责任编辑：祝元志