

从数学科普到课堂教学的改革

——单位菱形的故事

张景中 2024.07

记得上小学的时候，就在儿童读物上看到过米老鼠。如今七十多年过去了，米老鼠的可爱形象长盛不衰，依然吸引着众多的孩子们。

写科普三十多年，有没有为读者奉献一个长盛不衰的小东西呢？

回顾自己的作品里，还真有一个类似的角色。

它是什么呢？原来是一个边长为 1 的小菱形，也叫做单位菱形。

1974 年，我在新疆生产建设兵团农二师 21 团场子女校教数学，为了给初二上的学生讲三角，我把小菱形的面积叫做它的角的正弦。

后来，在 1980 年发表的一篇数学科普文章里，又一次推出了这样的小菱形，用它的面积定义它的一个角的正弦。

这是一个长达半个世纪的故事。

(一) 事情的缘起

文章引用小学课本上的一幅图，用来说明矩形面积等于长乘宽：

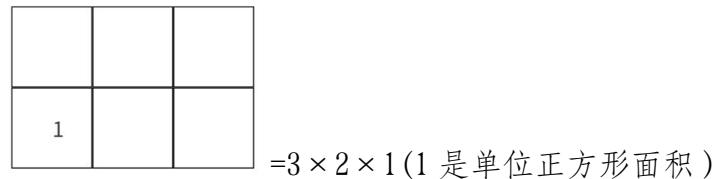


图 1 矩形的面积

接下来让矩形变斜成为平行四边形，单位正方形就成了边长为 1 的小菱形，计算面积的公式就变成了这个样子：

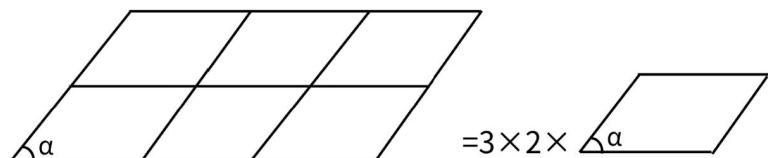


图 2 平行四边形的面积

上面的等式右端最后一个东西表示的是"有一个角为 α 的边长为 1 的菱形的面积"。为了简便，给它一个名字叫"角 α 的正弦"，用符号 $\sin \alpha$ 来表示。

这样就有了一个新的平行四边形面积公式。取一半，就是已知两边一夹角的三角形面积公式：

$$S_{ABC} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ac\sin B}{2} = \frac{bs\sin C}{2}$$

从这个公式可以变出不少花样来。例如，如果三角形的两个角相等，不用画图就看出两个角的对边相等；又如，把这个式子同乘以 2，再同除以 abc，就立刻推出有名的正弦定理。正弦定理按课程标准是高中的学习内容，可是高中学了用处不大。初中一年级如果懂了正弦定理，就带来不少乐趣，对解决几何问题也就大有帮助。

本来，“正弦”和符号“ \sin ”是三角学的术语，表示多种三角函数中的一种。早在公元前 2 世纪，希腊天文学家希帕霍斯（Hipparchus of Nicaea）为了天文观测的需要，将一个固定的圆内给定度数的圆弧所对的弦的长度，叫做这条弧的正弦。经过近两千年的研究发展，科学家又引进了余弦、正切等更多的三角学概念。现在初中三年级课本上的正弦定义，把直角三角形中锐角的对边与斜边的比值，叫做这个锐角的正弦，是 16 世纪形成的概念。但是只有锐角的正弦不够用。为了几何中的计算就常常常用到钝角的正弦了，进一步的学习更需要任意角的正弦。因此到高中阶段，要引进 18 世纪大数学家欧拉所建立的三角函数的定义系统把正弦与坐标系、单位圆以及任意角的终边联系起来。

按照两百年来形成的数学教学体系，正弦是一个层次较深的概念。即使仅仅提到锐角的正弦，就要先有相似形的知识。所以要到初中三年级才讲。

但是，初中一二年级的学生，从算术进入几何和代数，正是逻辑思维形成的关键时期。这时，向他们展示不同类型知识之间的联系以激发其思考非常重要。三角概念，首先是正弦概念，是形数结合的纽带，是几何与代数之间的桥梁。如果能够不失时机地在初中一年级引入正弦，使学生有机会把几何、代数、三角串通起来，进而体会近现代函数思想的威力，岂不妙哉？这些是我在 1974 年在新疆 21 团农场子女学校教书时开始想到的。

也巧，我注意到“有一个角为 a 的边长为 1 的菱形的面积”在数值上正好等于课本上的正弦，而且不论锐角直角钝角都是成立的。信手拈来，就用它引进正

弦，不是大大方便了吗？这样一来，无须到初三，更无需到高中，初一甚至小学五、六年级都可以讲正弦了。

这样引进的正弦，所联系的几何量不是两千年前引入的弦长，不是四百多年前引入的线段比，也不是两百多年前数学大师欧拉建议的任意角终边与单位圆交点的坐标，而是小学生非常熟悉的面积。

这样定义正弦是一次离经叛道。但在客观上，在数学中是成立的。课本上不这样讲，写在科普读物里却没有错。不但没错，还能让读者开眼界，活思考，提兴趣，链知识，学方法。

这样的正弦定义，比起初中三年级课本上的定义，至少有四个好处：更简单，更直观，更严谨（这里直角的正弦为 1，因为它就是单位正方形的面积；课本上要用极限来解释），更一般（这里的定义覆盖了锐角、直角、钝角和平角的情形；课本上只包括锐角）。缺点也有：来晚了。

于是一发不可收拾，单位菱形成为我的作品中的常客。

（二）三十年的历程

在 1980 年发表的小文“改变平面几何推理系统的一点想法”中把单位菱形面积叫做正弦，不过是开了一个头。

1982 年，在“三角园地的侧门”文中，正式提出了用单位菱形面积定义正弦。

1985-1986 年，岳三立先生邀我为他主编的《数学教师》月刊写了长篇连载的“平面几何新路”，更详细地发挥了用单位菱形面积定义正弦的作用。

1989 年，《从数学教育到教育数学》在四川教育出版社出版。这本书杜撰了“教育数学”的概念（15 年后，即 2004 年，中国高等教育学会增设了“教育数学专业委员会”），从单位菱形面积定义正弦出发，展开了设想中的几何推理体系方案之一。

1991 年 7-10 月，《中学生》杂志连载了我的科普文章“神通广大的小菱形”。

1992 年，四川教育出版社出版了我的《教育数学丛书》，其中《平面几何新路》书中，用单位菱形面积引入正弦，展开三角。

1997 年，在中国少年儿童出版社出版的《平面三角解题新思路》书中，我将单位菱形面积定义正弦作为全书的出发点。后来，这些内容收入该社 2012 年出

版的《新概念几何》中。附带说一句，《平面三角解题新思路》是《奥林匹克数学系列讲座》丛书中的一本，这说明用单位菱形面积引入正弦的主张不仅仅是科普，它开始进入奥数。

以后近 10 年间，我又多次在科普演讲中一再提起这个小菱形。听众有老师，有大学生，有高中生，有初中生和小学高年级的孩子和家长。于是我常常想，这个小菱形能不能更上一层楼，进入课堂，为数学教育的发展做出贡献？

有的老师说，这样引进正弦很有趣。不过，讲讲科普可以；在数学课程里这样讲，就要误人子弟了。

我理解，他是怕这样会影响成绩，分数上不去。

2006 年，我在《数学教学》月刊发表了“重建三角，全盘活——初中数学课程结构性改革的一个建议”一文，大胆地提出能不能用单位菱形面积引入正弦的办法让初中一年级学习三角。我国著名数学教育家张奠宙先生当即发文“让我们来重新认识三角”回应，热情支持，对“用单位菱形面积引入正弦”给以高度评价，还提出了有关教学实验策略的宝贵建议。

张奠宙先生看得很远。他在 2009 年出版的《我亲历的数学教育》一书中回顾此事时写道：“如果三角学真的有一天会下放到小学的话，这大约是一个历史起点”。

2007 年，我的更详细的“三角下放，全局皆活——初中数学课程结构性改革的一个方案”一文在《数学通报》1-2 期连载刊登。

真要改革数学课程的结构，只有顶层设计远远不够。老师需要可以操作的方案。为此，我写了《一线串通的初等数学》，由科学出版社在 2009 年出版。这是《走进教育数学丛书》中的一册。

这本书里，提供了两个具体教学设计。一个是直接用单位菱形面积引入正弦；另一个是用半个单位菱形（也就是腰长为 1 的等腰三角形）的面积。前者如上面所述，是导出一个平行四边形面积公式，取一半得到三角形面积公式，由此展开。后者则直接奔向三角形面积公式。两者本质相通，风格不同，前者更直观，后者较严谨。

2012 年，王鹏远老师和我合写的《少年数学实验》在中国少年儿童出版社出版，其中把单位菱形面积引入正弦的过程用动态几何图像来表现，设计成一次数学实验活动。王老师还亲自为初中生做了有关的科普讲座。

(三) 从科普渗入课堂

经过三十年的发酵，在课堂上产生后进入科普的用单位菱形面积定义正弦的想法，终于从科普开始渐渐回归又渗入课堂。

从互联网上看到，有些大学生、硕士生的毕业论文里，提到他们把单位菱形面积定义正弦的想法在高中做了教学实验，引起高中同学和老师的兴趣。

我下载了华东师大 2008 年的一篇教育硕士论文“高中阶段‘用面积定义正弦’教学初探”。作者王文俊是在高中教师岗位上进修攻读硕士学位的。他利用假期补课中的三节课（每节 35 分钟），为无锡市辅仁高中高一、高二的 4 个班 198 名学生讲了用单位菱形面积定义正弦的有关内容，对教学效果和学生的想法做了详细的调研分析，还了解了十几位教师的看法。

论文作者在研究结论中认为：“总的看来，学生、教师均对用面积定义正弦持欢迎态度。与以往比较呆板枯燥的定义相比，新定义出发点别具一格，体系的走向简洁易懂，学生易于接受也就在情理之中了”。

具体的统计数据表明，在高一学生中，有 53% 认为用单位菱形面积定义正弦更容易理解和接受，认为初中课本上的定义更容易理解和接受的则为 18%；其余 29% 认为两者差不多。认可新定义的占 82%。

而在高二的学生中，认为用单位菱形面积定义正弦更容易理解和接受的为 36%，认为初、高中课本上的定义更容易理解和接受的则为 19%；其余 45% 认为两者差不多。认可新定义的总数仍有 81%，但对新定义的热情远低于高一的学生。论文作者分析，这是由于“先入为主”之故。高二的学生在高一阶段学习和应用传统的定义有 22 个课时了；高一学生的三角知识仅仅是初三学的那一点，对新的定义印象相对来说更深一些。

不论如何，科普内容刚进课堂就有如此的影响，还是令人难免有喜出望外的感觉。

这篇论文里还提到，台湾省台北县江翠国中陈彩凤老师曾经给资优班学生讲过用单位菱形面积定义正弦的三角体系，获得学生热烈回响。可惜未能见到有关的研究论文或报告。

做过有关教学实验的，还有青海民族学院数学系的王雅琼老师。她的文章“利用菱形的面积公式学习三角函数”刊登于2008年11期的《数学教学》月刊。从内容上分析，是针对高中数学教学的。

继续前面的话题。既然高一学生比高二学生更喜欢用单位菱形面积定义正弦，是不是初中学生学习新的定义效果更好呢？这更重要。希望初中一年级的学生能够领略三角学，并且由此把三角、几何和代数串联起来，正是引入这个小菱形的初衷。

第一位吃螃蟹的是宁波教育学院的崔雪芳教授。她与一位有经验的数学教师合作，于2007年底在宁波一所普通初级中学初一的普通班上了一堂“角的正弦”的实验课。实验的结果写成“用菱形面积定义正弦的一次教学探究”一文，也发表于《数学教学》2008年11期。

那么，初一普通班的学生能不能学懂正弦呢？

文章得出的结论说，“初步结果显示，学生可以懂。三角和面积相联系，比起直角三角形的‘对边比斜边’定义更直观，更容易把握。”

文章介绍了这一节课的教学设计，“菱形面积定义正弦”教学效果的形成性检验；最后在“教学反思”中说，用菱形面积定义正弦能够“降低教学台阶，学生掌握新概念比较顺利”；“克服了以往正弦概念教学中从抽象到抽象的弊端”；“教学引申比较顺利，变式训练的难度大大降低，学生在学习过程中始终保持浓厚的兴趣，对后续学习产生了强烈的期待，学习的动力被进一步激发”；“这种全新的课程逻辑体系将有利于学生‘数、形’融合，使后续学习的思维空间得到整体的拓展”；“在三角、几何、代数间搭建了一个互相联系的思维通道”。

崔教授的实验研究没有就此止步。她接着又组织了宁波市4所初中的7个班进行实验。这4所学校分别代表了宁波城区生源较好学校、生源一般学校、城乡结合部学校和城区重点学校4种类型。经过两年对不同生源结构班级的实验以及教师、专家访谈，得到的结论是：在初一“以‘单位菱形面积’定义正弦引进三角函数是可行的；用面积方法建立三角学有利于初中学生构建三角函数直观的数学模型，形成多方面的数学学习方法，多角度把握‘数学本质’”；“‘重建三角’的学科逻辑十分有利于中学生的数学学习”。

这两年实验的较详细的总结，写成论文“数学中用‘菱形面积’定义正弦的

教学实验”，于 2011 年 4 月发表于《宁波大学学报（理工版）》24 卷 2 期。文章建议，“把用‘菱形面积’定义正弦编入地方或校本课程，做进一步的实验”。

后来，崔教授就此主题继续实验研究，完成了浙江省教科规划课题《基于初中数学“用菱形面积定义正弦”教学实验“重建三角”教学逻辑的策略研究》的研究，该课题于 2012 年 3 月结题，获宁波市教科规划研究优秀成果二等奖，又发表了几篇文章。期间她编写了《换一种途径学三角》的读本作为实验教材，在宁波市几所中学进行了不同程度的教学实验，从一节课发展到六节课，组织了多次针对性的教学分析和研讨，获得了一批第一手的研究资料。

在我国做教学改革实验，统考成绩如何这个坎是绕不过去的。单位菱形定义正弦从科普进入课堂，作为校本、补充、教学实验看来都没有问题了。但如果正式进入教学以取代原有体系中某些相应内容，就有了统考成绩如何的风险。你学这一套，统考是原来的一套，学生能适应吗？家长能放心吗？校领导以及上级部门敢负责批准你做这个实验吗？

在广州科协启动的千师万苗工程项目支持下，广州市海珠区的海珠实验中学大胆尝试，进行了贯穿初中全程的“重建三角”教学实验，使得在科普读物中流转 30 年的“用单位菱形面积定义正弦”第一次光明正大地进入课堂。

2012 年 6 月，海珠实验中学设立了“数学教育创新实验班”，生源主要是数学相对薄弱但语文、英语等成绩尚可的学生，入学分班平均分实验一班 62.5 分、实验二班 64 分。两个实验班共有 105 名学生，其中实验一班还有 4 名阿斯伯格综合症的学生和 10 名小学鉴定为较差的学生，两个实验班的数学课由青年教师张东方担任。

实验班不直接使用统编的数学教材，而是将上面提到的科普读物《一线串通的初等数学》的主要内容与人教版数学教材上的知识点进行整合，形成一种新的体系结构。新体系中有 90 节课是根据我那本书的内容设计的，这 90 节课主要分布在初一下到初三上这 4 个学期，其余 270 课基本上按课本的内容来讲。当然不可避免会受到那 90 节课的影响。

从面积出发引进正弦的效果，前面叙述的教学实验结论中已经讲了。在这次更多课时更为正式的教学试验中，效果就更明显。七年级下学期引入菱形面积定义正弦后，代数、几何知识密切联系起来，学生的思维能力提升，分析和解决问题的能力增强了。从测试成绩上也有了明显的表现。

一年后，实验一班和二班在海珠区统一测试中，分别以平均分 140 分和 138 分领先于区平均 91 分的成绩（满分 150 分），在全区 80 个班中为第一名和第八名。八年级上学期末，又以平均分 136 分和 133 分领先于区平均分 87.76 分，分列第一和第五。八年级下学期，两班以 145 分和 141 分（区平均分 96.83 分），分列第一和第三。九年级上学期，两班以 137.5 分和 129.75 分（区平均分 93 分），分列第一和第五。

2015 年中考，两个班的数学成绩平均分别为 131.47 分和 131.11 分，单科优秀率达到 100%（该校的中考数学成绩单科优秀率 66.91%）。数学素质的提高对其他各科成绩有了正面影响，这两个班中考总成绩平均分别为 733.96 和 730.25，显著超过 4 个对比班总平均 664 分，更超过广州市中考总平均成绩 532.50 分。

据实验班的数学老师张东方介绍，使用了调整后的教材结构方案，学生探索和解题的能力明显提升，尤其是解决综合题的能力大大增强了。有一次测试，全区有 15 名同学成功解答压轴题，其中有 12 名来自这两个实验班。

有些说法好像把素质教育和应试教育对立起来。其实，真正提高了素质，是不怕考试的。这一轮实验表明，你按统编教材考，我按自己处理过的体系学，不跟指挥棒转，反而考得更好。原因就是学生的思考能力上来了，数学素质提高了。

海珠实验中学的教学实验，引起了关注。四川和贵州有些老师对此有了兴趣，开展了类似的教学实验，效果很好。

2018 年 1 月，由北京师范大学中国教育创新研究院、中国高等教育学会教育数学专业委员会和广州市教育研究院主办，在广州召开了“教育数学与中小学课程专题研讨会”来自全国各地的 30 多位数学教育的专家学者和一线教师，听取了有关“重建三角”的研究和 6 年来教学实践情形汇报。与会专家热情地肯定了这方面的探索，提出了要编写实验教材并逐步扩大教学实验的建议。

目前，由李尚志教授主编的含有重建三角内容的初中实验教材《新思路数学》已由湖南科学技术出版社出版发行，并在 16 个省近 40 个地市立项在近 200 所学校进行教学实验。

（四）反思与展望

这个案例并不具有一般性，但令人惊喜，引人深思。

科普读物和学校教材，各有自己的定位和特色。科普读物浩如烟海，而教材的体例篇幅和内容严格受限。科普读物的内容如能进入教材，也是稀有的偶发的特例。但这特例既然可能出现，也自有其理由。

在校学生是科普传媒的广大受众中重要的一个部分。这部分受众一方面学教材，一方面读科普。教材和科普既然作用于同样的受众，这里就会有联系，就会相互影响。比如，教师读多了科普，讲课就更生动，学生读多了科普，正课就理解得更深，回答问题思路就更广，写作文时想象力更强，素材也更丰富。教师为了教学更出色，会找有关教材内容的科普资料；学生对教材上的问题想得深入了，就引起读有关主题科普的兴趣。进一步，科普作者（可能本身就是教师或曾经是教师）会联系教材写作品；教材编者会参考科普做教材或教辅。于是，教材上语焉不详的东西会成为科普的选题；科普作品中的精彩创意也有可能进入教材。

当前出书很多，一本科普读物的受众是很有限的。例如，尽管 30 年间我至少在前述 5 篇文章和 5 本书里向读者用各种手法推荐“单位菱形”这个角色，而且其中有些书先后由两个、三个出版社印行了，了解者依然很少。前面引用的硕士论文里提到：作者所访谈的 14 位高中教师（是江苏省一所四星级重点高中呢），其中虽有三位看过我的书并知道有关的机器证明研究和数学教育软件《超级画板》，但都没有看过或听说过“用单位菱形面积定义正弦”。由此可见，科普读物受众确实不多。但其中的内容一旦进入教材或教辅，其传播面将成倍扩大，持续传播的时期将大大延长。

比起教材来，科普读物更为通俗生动。科普读物中富有创意的部分一旦进入教材，可能为课本添加新鲜血液，推动教学改革。本文前述的教学实验若能完全成功，其影响将遍及全国两亿青少年，甚至在国际数学教育领域产生可观的影响。若不能完全成功，相信也会进入教辅教参，并成为数学教育研究领域热点。

科普和课堂的联系与影响，可能蕴含着科普创作理论研究的许多极有价值的课题。愿本文提供的案例，引发对这一方面的关注。