

# 教育数学：缘起、旨趣、现状和意蕴

朱华伟<sup>1</sup>，徐章韬<sup>2</sup>

(1. 广州市教育研究院，广东 广州 510030；2. 华中师范大学 数学与统计学学院，湖北 武汉 430079)

**摘要：**改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学的缘起和旨趣所在。教育数学的研究分3条路径展开：在难点和新点处下功夫，重构数学体系；围绕教育数学的研究成果，开展数学教育研究；对教育数学是什么展开思辨研究。教育数学的发展将有助于数学教育理论的发展，有助于提高数学教育工作者的学术素养，有助于推动数学教育学学科的发展。

**关键词：**教育数学；数学教育；学术素养

**中图分类号：**G40-03 **文献标识码：**A **文章编号：**1004-9894 (2015) 04-0030-03

## 1 引言

自20世纪80年代以来，数学教育开始研究学科内容知识在教师工作中的重要作用。学科教学知识(Pedagogical Content Knowledge, PCK)和面向教学的数学知识(Mathematical Knowledge for Teaching, MKT)理论都十分重视学科内容在教学中的重要性。又如，章建跃编审指出<sup>[1]</sup>，“理解数学，理解教学，理解学生”是做好数学教学的重要前提之一，而且“理解数学”是首要的。如果教师“理解数学”不到位，那么教好数学是不可能的。这些理论和认识正在逐渐打破数学教育潜在的理论假设：数学教师对所教的知识都是了如指掌的，都已具备“理解数学”的能力，不需要再对数学内容进行深入的研究。特别是近年来教育数学理论的提出，对学科内容的重视上升到了一个新的高度。教育数学研究者们认识到了数学内容在教育活动中的整合与创新的可能性和重要性。要彻底防止去数学化的数学教育研究，以及真正地把数学教育作为数学的二级学科，必须重视对数学内容本身的研究，但这种研究是教育取向的，是为教育服务的，不是为数学服务的。教育数学从理念提出到实践探索，到逐渐形成一个研究方向是数学教育发展的使然。为了进一步地提升教育数学的研究水准，有必要梳理教育的缘起、旨趣、现状、以及发展趋势等。

## 2 缘起

“把数学本身变得容易些”是教育数学理念的缘起。数学难学，这是一个不分地域、不分时代的难题。如平面几何虽有很高的教育价值<sup>[2]</sup>，有利于培养学生形成科学的世界观和理性精神，有助于培养良好的思维习惯，有助于发展演绎推理能力和逻辑思维能力等。但平面几何的学习对大多数学生来说就是一个很大的障碍。张景中先生在中学执教时发现，用面积方法讲授几何和三角学颇受学生欢迎，且有助于学生成绩的提高。然后，张景中把面积方法发扬光大，提出了面积解题方法，不仅使技巧多、思路难找、甚至一些有如杂耍的几何问题有了统一解法，而且还用之于机器证明的研究，使几何定理可读证明的自动生成这个多年来进展甚小的难题得到突破。改革数学教育的难点催生了教育数学。

教育数学不满足于仅仅对数学材料进行教学法加工，还致力于对数学本身进行再加工、再创造，使之能更好地反映客观世界的空间形式与数量关系，并进一步改革数学课程，这是教育数学实践的源起。在20世纪90年代，张景中把面积方法和教材改革联系在了一起，提出了建立更合理、更容易学习的教材的标准。这样的教材应当直观、生动，内容丰富；在逻辑结构上，应当有明确的中心，有俯瞰全局的制高点；应当提供有通用效能的解题方法与解题模式，应当兼有几何的直观性和代数的简洁性，像坐标法那样有章可循，又像综合法那样耐人寻味；在和它课程的关系上，它应当瞻前顾后，照顾“左邻右舍”<sup>[3]</sup>。用面积法改革平面几何教材正是这方面的出色实践。课程教材是数学教育研究的重点领域，教育数学首先从课程教材着手，显示出教育数学克难攻坚，重构数学教育体系的恢宏气势。《从数学教育到教育数学》的出版以及2003年中国高等教育学会教育数学专业委员会的成立，标志着教育数学作为一个研究方向产生了。

## 3 旨趣

知识旨趣是启动、维持与强化认识活动，推动知识生产的内在力量与根本动力。掌握知识旨趣有助于强化学习目标、激发求知热情，有助于理解知识的实质内容与探究形式<sup>[4]</sup>。教育数学认为，把数学家的研究成果，仅仅是进行教学法上的加工，而不进行数学上的再创造，难以形成好教材。教育数学的旨趣是对数学家的已有成果，进行数学上的再创造，使之成为“经典”的教程，使之有更简单的逻辑结构、更高效的解题方法、更平易近人的数学概念。对教育数学的“经典”教程再经教学法的加工之后，才能形成好的教学教材。改造数学使之更适宜于教学和学习，是教育数学的旨趣所在。

知识的概念、类型、价值与获得等知识论问题先于知识的选择、组织、传递和评价。知识观是知识教育的基础性、根源性问题<sup>[5]</sup>。教育数学三原理认为<sup>[6]</sup>：在学生头脑里找概念，从概念里产生方法，方法要形成模式。事实上这是从知识论的角度阐明了教育数学的旨趣。教育数学认为，利用学生已有经验或前科学概念进行扬弃，能使学得亲切。这事实上说明了知识的来源，知识是什么的问题——知识是对学生

收稿日期：2015-03-12

基金项目：广东省教育科学“十二五”规划课题强师工程重点项目——教育数学创新教学实验——以初中数学为例(2014ZQJK001)

作者简介：朱华伟(1962—)，男，河南汝南人，博士，教授，博士生导师，主要从事教育数学和数学教育研究。

已有经验的改造。教育数学认为，知识要技能化，形成方法，不能从概念到概念；知识技能化实质上是要形成程序化的知识，这种程序化的知识应有一条鲜明的主线，它能如彩线串珠般将知识贯通起来，而不是杂乱无章。教育数学把知识分成概念与技能，与现代信息加工理论的观点不谋而合。

下列话语形象地揭示了教育数学的旨趣：把学数学比作核桃，核桃仁美味而富有营养，但要砸开才能吃到它。数学教育要研究的，是如何砸核桃吃核桃。教育数学呢，则要研究改良核桃的品种，让核桃更美味、更营养、更容易砸开吃净。教育数学着眼于学生心理，改造数学本身；数学教育着眼于学生心理，使现有的数学更容易学习。两者的目标取向一致，但路径和方式不一样，两者可以互补。数学教育有了教育数学的支持，将不再走一条去数学化的数学教育之路；教育数学有了数学教育的支持，将有利于教育数学的最新成果引入到课堂教学之中。

#### 4 现状

教育数学产生之后，引起了许多学者的注意。教育数学的研究分3条路径展开。第一条路径是在数学的大后方进行教育数学的改造工作，在难点和新点处下功夫，重构数学体系。第二条路径是围绕教育数学的研究成果，开展数学教育研究。第三条路径是对教育数学是什么展开思辨研究。

第一条路径上的出色工作者有林群院士和张景中院士。林群院士让数据说算，从计算的角度重构微积分，并把微积分归结到一个哲学公式<sup>[7]</sup>；张景中从两个数的平均数落在两个数之间这样一个浅显的事实出发，构建起通俗易懂而又具有严格的理论基础的第三代微积分<sup>[8]</sup>。张景中的成果写进了大学数学教材<sup>[9]</sup>。上述工作是高等数学初等化的研究。在初等数学方面，张景中用面积法重构了平面几何，用面积法定义了正弦，又重构了三角<sup>[10]</sup>，进而又把代数、几何、三角融为一体了<sup>[11]</sup>。这是教育数学的出色工作，把初等数学进行了简化与统整。这条路径的工作可用张景中的话来总结：想的是教育，做的是数学。通过提出新概念新定义，建立新方法新体系，发掘新问题新技巧，寻求新思路新趣味。

第二条路径是围绕上述研究成果进行教育学研究。崔雪芳2008年在初中一年级两个普通班进行了角的正弦的教学实验课（1课时），结果表明，初一学生能够较好地掌握用“菱形面积定义的正弦概念”。后来又在更多学校进行了6个课时的教学实践，获得了好的效果<sup>[11]</sup>。王文俊以高中学生和教师为研究对象，做了更详细的实验与调查，结果表明，大部分学生和教师是比较欣赏和认可三角函数新定义体系<sup>[12]</sup>。广州大学的研究生基于第一条路径的研究，开展了课程方面的研究，探讨了初中数学课程结构的改革及教科书的编写<sup>[14-17]</sup>。这条路径的工作主要是检验、验证教育数学提出的方案的可行性。赖虎强在这方面做出了突出的成绩，其根据教学改革实验的实践，编著出版了《妙用正弦数学》，在行动研究中践行了教育数学的思想。

第三条路径是对教育数学是什么做思辨研究。张奠宙指出<sup>[18]</sup>，教育数学是数学的教育形态，主张体现数学本质要做到返朴归真、平易近人、言之有理、感悟真情。在数学教

学中，应突出数学的文化本质，以本原问题驱动展现数学本质，利用数学史加深学生对数学本质的理解。沈文选认为<sup>[19]</sup>，整合创新优化数学是走进教育数学研究的行动纲领，需要现实地改造并组织好数学材料，需要恰当地改变数学内容的呈现方式；返璞归真优化数学是走进教育数学研究的主要途径，需要从各方面展现数学价值；需要渗透数学建模思想；需要从数学史的角度加深对数学本质的理解；需要追本溯源，以本源问题展现数学方法的本质；需要将火热的思考提高到“数学思想”的高度。这些见解或主张引起了美国童增祥教授的注意，其在长期的数学实践和数学教育研究中，认识到数学内容本身优化的重要性，不仅发表了一系列有关教育数学的论文，而且成立了美国第一个教育数学研究生班，从事教育数学的研究与实践<sup>[20]</sup>。

教育数学将着重点放在改良数学上，最终是为了服务数学教育。这个主张将巩固数学教育的“铁三角”——课程论、教学论和学习论，有可能在铁三角的中心安置一个点，这个点就是教育数学的着力点。在吃透、优化、重构数学内容的本身的过程中，阐释教育教学上的见解。这样一来，教育数学的主张和MKT的主张不谋而合了<sup>[21]</sup>。

#### 5 意蕴

教育数学的发展将有助于数学教育理论的发展。正如张景中“信息技术要深入学科”的主张，得到多方面的认同<sup>[22]</sup>。同样，对学科教育而言，需要有“深入学科的教育理论”。如果一般教学理论、学习理论和课程理论能完完全全地指导学科教育的发展，那么学科教育就没有发展空间了。普适的理论在于能启迪人们的思维，开阔人们的眼界，但当把普适的教育理论用之于学科教育时，就要考虑学科的特点。要在深入学科的基础上发现教学与学习的规律，反过来丰富发展一般的教育理论。教育数学并不反对数学教育研究，只是强调要在“数学”上下功夫，不能认为对数学的理解已经完成了，要能吃透数学，能重构数学。当然能重构数学需要相当的数学功力，并非人人能为，但努力理解数学本质，在此基础上阐发教育上的见解，却是人人皆可为之。每个数学教育的研究者都应当有自己的学术信念，不能为了迎合一般性理论而进行去数学化的数学教育研究。上面谈到MKT的主张和教育数学的见解是一致的，这样在教育数学和数学教育之间有了沟通之桥。教育数学更有可能实现“上通数学，下达课堂”的恢宏目标，而这正是数学教育所追求的。

教育数学的发展将有助于提高数学教育工作者的学术素养。数学教育是一个具有相当综合性的研究领域，需要研究者有多方面的素养。任何一个数学家一旦转而谈论数学教育时，他未必就是当然的数学教育家；也并非任何一个教育家转而议论数学教育时，就能理所当然地成为数学教育家<sup>[23]</sup>。理想的情况是，数学教育的研究者不仅要有扎实的数学功底，能进行数学的研究，还应当有深厚的教育理论功底，能从事教育的研究，还应当有丰富的教学实践经验，能指导教学实践活动。数学教育的研究课题的多样性，研究对象的复杂性，研究方法的多样性，研究成果表述的规范性，要求数学教育的研究者能努力提高自己的学术素养。以研究

方法为例,数学教育研究者不仅要了解定量研究、定性研究、思辨研究、实证研究、质的研究的异同,还要能熟练地运用这些研究方法,特别是量的研究方法和质的研究方法.数学教育研究者所从事的工作的难度并不亚于社会学、心理学、教育学及数学研究者所从事的行业.这更需要数学教育的研究者有扎实的数学功底,能把数学方法创造性地运用到数学教育研究中去,发展量的研究方法,教育数学取向的研究就是提高数学教育研究者数学素养一条途径.

教育数学的发展将有助于推动数学教育学学科的发展.数学教育成了数学的二级学科了,这无疑是一个非常令人振奋的消息,这标志数学教育的影响力在提升,学科地位在上升.进入到数学行列之后,如何评价这个学科的研究工作,如何评价这个行业的从业者的学术水平,是一个相当复杂的社会问题.简单点说,如果数学教育的研究者既能发表 SSCI 或 CSSCI 的作品,又能发表 SCI 的作品,那么其它领域的研究者就不能无视这个领域的存在.教育数学的研究取

向勾勒了数学教育工作者可能的研究路径:先做教育数学的研究,发表 SCI 作品;把在做教育数学的过程中获得的见解,用教育学的术语表达出来,做数学教育的研究,发表 SSCI 或 CSSCI 的作品.对任何一个学科或学者而言,没有高质量的作品问世,很难赢得应有的学术地位.

## 6 展 望

数学教育的本质是教育,但是,数学教育更本质的是一种特殊的教育<sup>[24]</sup>.文[23]和文[24],提出了数学教育的逻辑起点问题,文中指出学科教育不但要遵循“教与学对应”原则,还应该遵循“教与数学对应”的原则.按这种观点,教育数学更是“教与数学对应”的典范,应当成为数学教育工作者的一个重要的研究领域,这也是数学教育不可被大教育或心理学研究所替代的重要理据之一.未来的数学教育将更加重视对学科内容本身的研究,建立更有数学学科特点的数学教育学理论.

## [参 考 文 献]

- [1] 章建跃,陈向兰.数学教育之明道取势优术[J].数学通报,2014,(10):1-7.
- [2] 鲍建生.几何的教育价值与课程目标体系[J].教育研究,2000,(4):53-58.
- [3] 张景中,曹培生.从数学教育到教育数学[M].成都:四川教育出版社,1989.
- [4] 潘洪建.知识旨趣:基本蕴涵、教育价值与教学策略[J].当代教育与文化,2014,(7):50-55.
- [5] 潘洪建.教学知识论[M].兰州:甘肃教育出版社,2004.
- [6] 张景中.什么是“教育数学”[J].高等数学研究,2004,(6):2-6.
- [7] 林群.微积分让数据说话[J].数学教育学报,2010,19(5):1-3.
- [8] 张景中,冯勇.微积分基础的新视角[J].中国科学A辑:数学,2009,(2):247-256.
- [9] 鲁东大学函数论研究室.高等数学新讲(上册)[M].北京:科学出版社,2008.
- [10] 张景中.重建三角全局皆活[J].数学教学,2006,(10):封二-10.
- [11] 张景中.一线串通的初等数学[J].北京:科学出版社,2009.
- [12] 崔雪芳.用“菱形面积”定义正弦的一次教学探究[J].数学教学,2008,(11):40-43.
- [13] 王文俊.高中阶段“用面积定义正弦”教学初探[D].华东师范大学,2008.
- [14] 杨姗.初中数学课程结构性改革的可行性研究[D].广州大学,2011.
- [15] 黄国春.基于教育数学思想的初中数学教科书编写研究[D].广州大学,2011.
- [16] 李萃芳.现有初中数学体系与初等数学新体系的整合研究[D].广州大学,2013.
- [17] 曹路路.基于教育数学思想的初中数学教材体系研究[D].广州大学,2013.
- [18] 张奠宙.教育数学是具有教育形态的数学[J].数学教育学报,2005,14(4):1-4.
- [19] 沈文选,吴仁芳.走进教育数学[J].数学教育学报,2009,18(4):5-8.
- [20] 童增祥.在美国传布教育数学的理念[R].深圳:中国教育数学年会书面报告,2014.
- [21] 徐章韬.面向教学的数学知识[M].北京:科学出版社,2013.
- [22] 姚姿如,王以宁.教育技术知识学科化研究[J].课程·教材·教法,2013,(12):106-115.
- [23] 涂荣豹.论数学教育研究的规范性[J].数学教育学报,2003,12(4):2-5.
- [24] 单墀,喻平.对我国数学教育研究的反思[J].数学教育学报,2001,10(4):4-8.

## Education Mathematics: Origin, Purport, Status and Implication

ZHU Hua-wei<sup>1</sup>, XU Zhang-tao<sup>2</sup>

(1. Guangzhou Institute of Educational Research, Guangdong Guangzhou 510030, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Hubei Wuhan 430079, China)

**Abstract:** The transformation of mathematics makes it more suitable for teaching and learning, which is the origin and purport. The researches on education mathematics launched three paths. The reconstruction of mathematical system is carried out around the difficulties and the new knowledge points. Some researchers carry out mathematics education around the outcome of the education mathematics. What is education mathematics is the third research. The development of education mathematics will contribute to the development of the theory of mathematics education, and help improve the academic literacy of mathematics education researches, and help to promote the development of the disciplines of mathematics education.

**Key words:** education mathematics; mathematics education; academic literacy

[责任编辑:周学智]