□数学漫谈

形形色色的悖论

张景中

数学靠的是严密的逻辑推理，可是有时会发生这种怪事：振振有词的一通推却得到了似乎荒谬绝伦的结论。这结论或者有悖于大家的常识，或者自相矛盾，使人左右为难。这就叫“悖论”。有了悖论，人们就会问：“逻辑的推理的方法可靠吗？怎样运用逻辑推理的方法才不会出毛病？”通过对悖论的分析研究、找出悖论的症结所在，使悖论不悖，这叫做消除悖论。对悖论的研究，有助于数学的发展。有重大影响的悖论的出现与消除，往往标志着数学科学水平的划时代的进展。

毕达哥拉斯悖论

古希腊数学家毕达哥拉斯认为，数只有正整数和分数。但是根据勾股定理（古希腊称为毕达哥拉斯定理），正方形对角线长与边长之比却既不是整数又不是分数。这个发现当时被称为悖论。后来大家认识到无理数也是数，并且建立了严密的实数理论，这个悖论就被消除了。

这个悖论从出现到彻底消除经过了近 2000 年，它的消除标志着实数概念在数学家心目中已经十分明确了。

秃头悖论

一个人有了 10 万根头发，当然不能算秃头，不是秃头的人，掉了一根头发，仍然不是秃头，按照这个道理，让一个不是秃头的人一根一根地减少头发，就得出一条结论：没有一根头发的光头也不是秃头！

类似的悖论还不少。例如：一根鸡毛可以压倒大力士；胖子体重再减一克就不再是胖子；等等。

这种悖论出现的原因是：我们在严格的逻辑推理中使用了模糊不清的概念。什么叫秃头，这是一个模糊概念。一根头发也没有，当然是秃头。多一根呢？还是秃头吧。这样一根一根增加，增加到哪一根就不是秃头了呢？很难说。谁也没有一个明确的标准！

如果硬要订一个明确的标准，比如说，有 1000 根头发的是秃头，有 1001 根头发的就不是秃头了，这就不符合大家的实际看法。

比较现实的办法是引入模糊概念。具体地说，用打分的办法来评价秃的程度。全光头是百分之百的秃，打 1 分（1=100%），有 100 根头发，打 0.7 分，200 根 0.6 分，等等，随着头发的增加，秃的分数逐渐减少，这样就可以消除秃头悖论了。

当然，如何具体打分，是个问题。这可以协商，或者由医生制订，或者用其他办法。不过，这已经不是逻辑问题，不是数学问题了。

说谎者论

这是一个古老的悖论。一个人说：“我现在说的这句话是谎话。”这句话究竟是不是谎话呢？

如果说它是谎话，就应当否定它。也就是说，这句话不是谎话，是真话。

说它是真的，也就肯定了这句话确实是谎话。

这句话既不是真的，也不是假的。这真令人左右为难！

有人说，如果不许一句话谈论本身，就可以消除这类悖论。但是它马上会改头换面，以另一形式出现：

一张卡片，正面写着“反面写的那句话是真的”，而反面却写着“正面那句话是假的”。

究竟正面那句话是真是假？

还可以变成一连串句子：第一句说第二句假，第二句说第三句假，第三句说第四句假……每一句都说下一句是假的。最后，第七句说：“第一句是假的！”第一句是真是假？

如果第一句真，则第三、五、七句真，于是第一句假。如果第一句假，则第三、五、七句假，于是第一句真！

这就像7个孩子手拉手站成一圈，绝不可能让男孩两边都是女孩，女孩两边都是男孩！当然，“7”可以换成任何奇数。这种悖论，叫作“语义学悖论”。

波兰数学家塔斯基（A. Tavski）提出用语言分级的办法来消除语义学悖论。办法是：

最基本的语句是实际语句。它只谈论实际的事物，如“雪是白的”“狗是哺乳动物”……而不涉及句子的真假。比它高一级的句子是1级抽象语句，它包括了实际语句，并且可以谈论实际语句的真假。例如“雪是白的”这句话是对的，就属于1级抽象。往上，有2级、3级…… n 级抽象语句。n 级抽象语言包括了 $n-1$ 级语言，而且可以谈论 $n-1$ 级语言的真假。这样，就可以消除循环判断所产生的悖论。

近年，我国数学家文兰院士提出并论证了说谎者悖论不过是布尔代数里的一个矛盾方程。代数里有矛盾方程不是什么怪事，所以这悖论也就不值得大力去讨论了。

理发师悖论

某村上的理发师声称，他只给那些不给自己刮胡子的村上人刮胡子。那么。理发师给不给自己刮胡子呢？如果他给自己刮，按规定他不应当给自己刮；如果他不给自己刮，按规定他又应当给自己刮！

和这个悖论类似的悖论真不少。图书目录悖论便是一个例子。图书目录也是一本图书，所以它可以把自己列入自己的目录之内。但它也可以不把自己列入。把所有不列入自己目录的编成一本目录，这本目录该不该把自己列入呢？

理发师悖论是1901年由罗素（B.A.W.Russell，1872—1970）提出的集合学悖论的通俗化翻版。罗素悖论是一个相当深刻的难题，它在当时的数学界掀起了一场风波。

讲罗素悖论，要从集合论里的“概括原则”谈起。如果一个集合里只有不多几个元素，比如说你们班美术小组的成员组成的集合，只要开个名单就可以确定这个集合。要是集合里元素很多，甚至多到无穷，就不便开名单，甚至没法开名单了。这时可以指出集合中元素的特征，例如：“所有中国人组成的集合”“所有偶自然数组成的集合”，等等。一般地说，$\boldsymbol{P}$ 表示某一性质，所有具有性质 $\boldsymbol{P}$ 的事物总可以构成一个集合。这就叫作概括原则。

大家承认了概括原则，罗素偏偏就利用它来构造悖论。罗素把所有集合分成两类：以自身为自己的一个元素的集合，叫非正常集。不以自身为元素的集合。叫作正常集。一切正常集组成的集合 $\boldsymbol{B}$，它到底是正常的呢，还是非正常的呢？

如果 $\boldsymbol{B}$ 是正常的，按 $\boldsymbol{B}$ 的定义，$\boldsymbol{B}$ 应当是 $\boldsymbol{B}$ 的元素。这么一来，$\boldsymbol{B}$ 是非正常的。

如果 $\boldsymbol{B}$ 是非正常的，按定义，$\boldsymbol{B}$ 不应当是 $\boldsymbol{B}$ 的元素。这么一来，$\boldsymbol{B}$ 又是正常的了！

集合论是数学大厦的基础。不消除罗素悖论，数学家自然是不甘心的。

罗素本人提出了把集合分层的办法来消除这个悖论，正如塔斯基把语言分级一样，先给定基本集合。第一层集合包括基本集合，以及以基本集合为元素的集合。第 n 层集合包括第 $n-1$ 层集合，以及以第 $n-1$ 层集合为元素的集合。这样，

就不会发生“集合是否以自身为元素”的问题。

罗素的分层方法太烦琐，数学家们不欢迎。后来，大家想出建立集合论公理的办法，用公理限制那些莫名其妙的集合的出现，这才消除了罗素悖论。

但是，能不能保证在已建立的公理系统中永远不产生新的悖论呢？这叫作数学公理系统的协调性问题。哥德尔在 1931 年证明了一个使人失望的定理：包含了自然数的数学公理系统，如果是协调的话。其协调性是无法在系统之内证明的！这表明，数学的真理性，归根到底要靠人类的广泛社会实践来证明。

预言家悖论

算命先生王铁口说他能预知未来。小王在一张纸上写了一件事，请他猜猜这件事会不会发生。会发生，就请王铁口在卡片上写个“是”字，否则写个“否”字。

王铁口事先写了两张卡片：一个“是”字，一个“否”字。他准备见机行事，偷梁换柱。

但小王把纸打开之后，王铁口却无所适从了。小王在纸上写的是：“王铁口在卡片上写的是‘否’字”。

如果王铁口拿出写“否”的卡片，“这件事”发生了，而王铁口没猜对。拿出写 “是”的卡片，“这件事”就没发生，又猜错了。

你仔细想想，便知道这一悖论是说谎者悖论的翻版。

理查德悖论

用汉字可以定义自然数。例如：“最小的素数”定义了“2”，“三的四次方”定义了“81”。能够用少于 100 个汉字定义的自然数当然只有有限个，因为汉字数目是有限的。所以，一定有一个“最小的不能用少于 100 个汉字定义的自然数”。不过这样一来，这个自然数已被我们用 20 个汉字定义出来了。如何解释这个矛盾呢？

问题在于，什么叫作“用少于 100 个汉字可以定义”，这句话是含糊不清的。在这句话里，用到了“可定义的”这个概念。但是，“可定义的”这个概念本身是无法在我们的数学系统中严格加以定义的！

消除理查德悖论的办法，有人主张也用分级抽象语言的方案，像消除说谎者悖论一样。

但是，大家又都觉得分级语言太麻烦了。在写文章、讲话的时候，谁肯不断地说明自己此时用的是哪一级的语言呢？

意外的考试

马老师宣布本星期内他将进行一次考试。他说，考试的日子将使大家感到意外！

学生们纷纷猜测：考试将在哪一天进行呢？

大家一致认为，不会在星期五考试。因为，如果到了星期四还没考试，大家就可以肯定马老师将在星期五考试，那就不是意外的考试了——马老师说话是算数的。

既然不会在星期五考试，那也不会在星期四考试了。因为排除星期五之后，星期四是最后一天。如果星期一到星期三不考，星期五又不会考，那只有星期四考了。既然学生们可以如此推理，星期四考试也不是意外的考试！

于是这样推论下去，星期三考试也非意外，所以也不会在星期三考。同样道理，也不会在星期二、星期一考试。学生们于是非常高兴，马老师这星期里不会考试了！

正当学生们认为不会考试的时候，马老师却在星期二考试了。不过，这的确是出乎意料的考试。

事实上，不论在这五天里哪一天考试，都出乎学生们的意料。即使在星期五考试，也出乎学生意料，因为学生们认为这一天不会考了。

这是一个尚在争议的悖论。一般看法认为，“意外的考试”是个模糊不清的概念，问题就出在这里。

（张景中，著名数学家、数学科普作家，中国科学院院士）