

基于数据分析的实证性研究案例

北京市陈经纶中学

基于数据分析的即时分析式研究：高考题探究实验——《解析几何圆过定点问题》

1. 测试题目

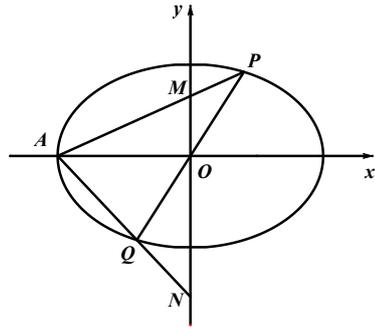
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

短轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 如图, 椭圆左顶点为 A , 过原点 O 的直线 (与坐标轴不重合)

与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 直线 PA, QA 分别与 y 轴交于 M, N 两点.



试问以 MN 为直径的圆是否经过定点 (与直线 PQ 的斜率无关)? 请证明你的结论.

2. 被试的选取

本次测试的被试选取自北京市陈经纶中学 2018 级高三年级, 其中在高三一轮复习《解析几何圆过定点问题》的复习课中参与了网络画板教学的学生共 30 人, 本实验选取该 30 名学生形成实验组, 并根据实验组学生平时的数学学习水平, 从高三年级实验班中随机挑选 30 名与实验组被试学生成绩相近的 30 名未参与网络画板教学的学生形成对照组.

3. 《解析几何圆过定点问题》学习评价的数据结果及其分析

(1) 被试初始数据对比

表 1 不同组别初始基本数据

组别	总分均分	Sig	客观题均分	Sig	主观题均分	Sig	总分方差
实验组	116.13	p=0.538	78.84	p=0.39	37.29	p=0.753	85.38
对照组	117.55		80.52		37.03		77.19

两个组的初始数据选自最近一次朝阳区统一测试, 可以看出两个组从总分、客观题、主观题的均分以及总分方差差异均不大, 并且各项均分的显著性检验结果均为差异不显著, 可以比较充分的说明实验组与对照组的初始数学素养、能力差异不大, 可以视为同一水平的两个组, 进而表明后续经过基于网络画板的数学实验干预后产生的差异可以归因为不同方式的教学干预所带来的.

(2) 两个特殊变量的设置

变量名称	数形结合变量	代数运算变量
------	--------	--------

涵盖采分点	作图、猜测、几何转化	方程组运算、椭圆方程、设点、设直线、推导直线方程、推导点坐标、向量、数量积、同理推导、结论
-------	------------	---

以上特殊变量的设置用于后续数据分析之用，本文之后将直接使用对应变量名称进行描述。

(3) 不同组别学习评价总分基本数据结果

表 2 不同组别的描述性统计基础数据

	实验组	对照组
最高分	22	19
最低分	10	9
平均分	18.07	14.97
方差	11.638	11.275

从实验组与对照组的描述性统计结果看，不同组别之间应当存在差异，但无法从直观上判定两组差异较大，其中平均分实验组（18.07），明显高于对照组（14.97），方差两组差异较小，对照组略小（11.275），表明实验组与对照组的总分离散程度相近，这与学生的学习现状息息相关，由于高三年级正处于一轮复习阶段，同一水平的学生数学素养相近，知识掌握情况相近，因此两组的学生能力分布也应当相近，这一定程度上解释了不同组别之间的数据离散程度相近这一现象。而在总分平均分的比较中，实验组均分较高，因此存在着对两组平均分进行显著性差异检验的必要。

(4) 不同组别学习评价总分的显著性差异分析

表 3 不同组别总分的方差分析结果

方差来源	df	MS	F	Sig
组间变异	1	141.917	12.391	p<0.01
组内变异	57	11.453		
总数	58			

实验进行 2（实验组别）×1（总分）单因素方差分析，得到结果如上表所示。表中数据表明，实验组与对照组之间出现高度显著差异（p<0.01），结合描述性统计结果，表明经过网络画板干预后的教学与传统的圆过定点问题教学相比对学生的学习效果产生了高度显著的提升。在已知总分具有显著差异的基础上，需进一步分析差异来源主要在哪里，以探究出网络画板对学生的哪些数学素养的提升产生正迁移作用。

(5) 不同组别学习评价数形结合变量、代数运算变量的显著性差异分析

表 4 不同组别数形结合变量的方差分析结果

方差来源	df	MS	F	Sig
组间变异	1	105.221	56.097	p<0.01
组内变异	57	1.876		
总数	58			

实验进行 2（实验组别）×1（数形结合变量）单因素方差分析，得到结果如上表所示。表中数据表明，实验组与对照组之间出现高度显著差异（p<0.01），其中实验组数形结合变量平均分（4.14），对照组数形结合变量平均分（1.47）。

表 5 不同组别代数运算变量的方差分析结果

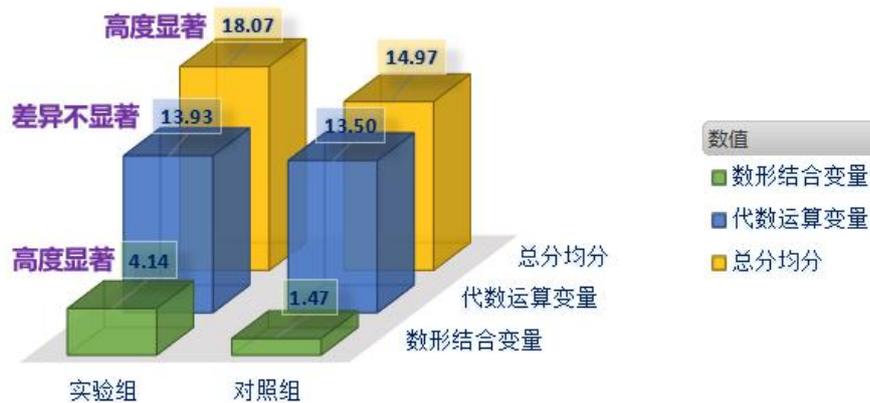
方差来源	df	MS	F	Sig
组间变异	1	2.740	0.442	p=0.509

组内变异	57	6.199		
总数	58			

实验进行 2 (实验组别) \times 1 (代数运算变量) 单因素方差分析, 得到结果如上表所示。表中数据表明, 实验组与对照之间差异不显著 ($p=0.509$), 同时 F 值极小表明了不同组别学生在代数运算环节上呈现出的特点相似度极高, 其中实验组代数运算变量平均分 (13.93), 对照组代数运算变量平均分 (13.50)。

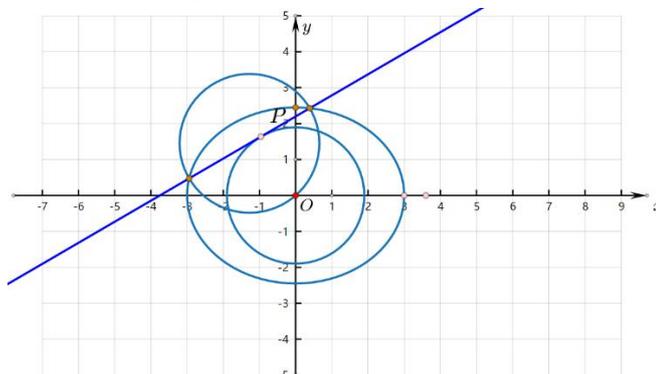
结合描述性统计量, 可以得到如下数据图表:

图 1 实验组与对照组数形结合变量、代数运算变量、总分均分的显著性差异对比结果



根据以上数据分析结果, 不难发现经过网络画板干预后, 学生总分均分出现了显著性差异, 实验组水平较高, 同时可以看出两组的显著差异产生自数形结合变量, 由于数形结合变量差异高度显著, 实验组水平较高, 同时代数运算变量没有显著差异, 我们可以分析得出实验组与对照组在数学运算素养上水平相当, 这一点可从选取被试学生时两组学生数学成绩相当得到印证。而数形结合能力上实验组较高, 说明网络画板的使用对学生数形结合能力的发展起到了较为明显的正迁移作用。

以上数据结果表明基于网络画板的数学实验在解析几何复习课上能起到比较明显的促进作用, 具体产生的较为明显的正迁移作用体现在发展学生数形结合的能力上。因本测试题目核心的几何转化分析有两点, 其一是通过动圆的运动轨迹发现其所过定点在坐标轴横轴上, 同时借助特殊位置的选取可以进一步直接锁定定点坐标, 从而将证明过程转化为一个验证的过程, 达到减少未知量的效果; 其二是通过观察动圆中定点的特性, 结合圆的性质发现用圆周角垂直以及向量工具对定点进行刻画最为直接和简单, 达到减元降次的效果。而结合数学实验的教学设计恰到好处的体现了这两点。



上图为圆过定点问题专题课堂上实际使用的网络画板课件, 可以清晰的看到红色坐标原点为动圆的定点。在本测试题所对应的实际教学过程中, 学生通过使用网络画板, 参与到课堂上数学实验的环节中, 获得了动手操作、直观感知的机会。凭借着自己亲身确认的过程,

借助网络画板体会动圆的运动轨迹，在运动时容易发现动圆过定点这一事实，同时观察到定点应位于坐标原点，这就为之后的运算铺垫好了切入思路。从认知心理学的角度分析，学生在动手操作时获得的直观感受应当是本课时授课过程中印象最深的内容，所以在课后完成相关练习时，会形成主动地绘图、先猜后证的意识，这一思路在圆过定点问题求解中具有极大优势，学生在得到相关习题的反馈时，会进一步确认动手画图、猜测结论、先猜后证思路的重要性，为形成良好的几何转化能力、提升与发展直观想象核心素养打下基础。

结合以上分析，可以确定基于网络画板的数学实验会对学生直观想象素养产生促进提升作用，目前已知对学生数学运算素养提升作用不明显。故以下进一步分析学生直观想象素养提升程度的差异。

(6) 数学实验对不同层次学生直观想象素养的促进差异分析

① 实验组、对照组内部被试学生分层聚类分析

表 6-1 实验组聚类分析结果

分组情况	聚类中心	聚类案例数	Sig
1 (实验组学优生)	21	9	p<0.01
2 (实验组中学生)	19	15	
3 (实验组学困生)	11	5	

表 6-2 对照组聚类分析结果

分组情况	聚类中心	聚类案例数	Sig
4 (对照组学困生)	9	7	p<0.01
5 (对照组中学生)	15	8	
6 (对照组学优生)	18	15	

根据日常教学经验，大多数情况下不同班级或小组内部均会出现内部分层的情况，按照教育学一般规律，群体中约前 25%称为学优生，后 25%称为学困生，中间部分的 50%称为中学生，本文对实验组和对照组分别进行 3-均值聚类分析，得到结果如上表。首先以上聚类情况良好，显著性检验结果为高度显著，代表分类较为成功，表明学生基本数据较好的集中在以上三类聚类中心附近，根据聚类中心的大小，定义中心较大者为学优生群体，中心较小者为学困生群体，中心居中的为中学生群体，且从聚类案例数看，实验组聚类与一般规律相似度高，对照组分布规律与一般规律差异较大需在后续内容中进一步分析其形成原因。

② 各层次之间被试学生的显著性差异分析

表 7-1 两组学优、学中、学困生数形结合变量方差分析结果

方差来源	df	MS	F	Sig
组间变异	5	37.98	90.524	p<0.01
组内变异	53	0.42		
总数	58			

表 7-2 两组学优、学中、学困生数形结合变量事后检验结果

参与比较的聚类组别	Sig
实验优&实验中	p<0.01
实验困&实验中	
实验优&实验困	
对照优&对照中	p<0.01
对照优&对照困	
对照困&对照中	p=0.596
实验优&对照优	p<0.01

实验优&对照中	
实验优&对照困	
实验中&对照优	
实验中&对照中	p<0.01
实验中&对照困	
实验困&对照困	p<0.01
实验困&对照中	
实验困&对照优	p=0.552

实验进行 6 (聚类分析组别) × 1 (数形结合变量) 单因素方差分析, 得到结果如上表所示。表中数据表明, 实验组内部三个不同层次的学生群体数形结合变量差异显著; 对照组内部学优生与学中、学困生数形结合变量差异显著, 学中、学困生数形结合变量差异不显著; 实验组学优生、中学生与对照组三个不同层次学生群体差异均显著; 实验组学困生与对照组学优生差异不显著, 与对照组学中、学困生差异均显著。结合相关描述性统计结果, 绘制图表如下所示:

图 2-1 各层次之间被试学生的描述性统计箱线图

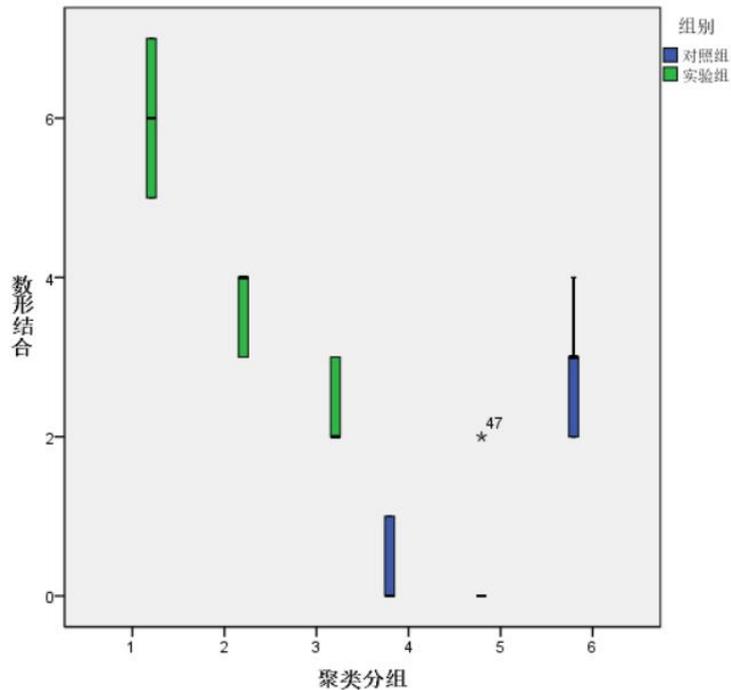
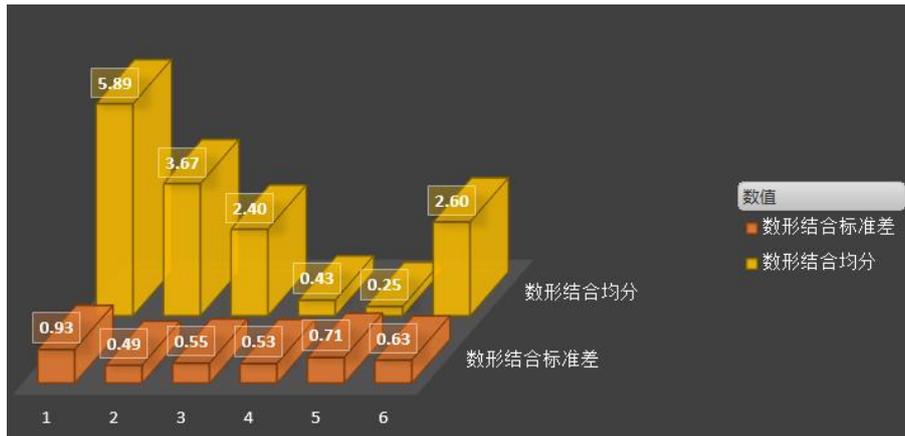


图 2-2 各层次之间被试学生的描述性统计柱状图



以上分析表明数学实验对不同层次的学生均有提升，层次越高的学生提升作用越大，层次较低的学生也可在圆过定点的几何情境中提升两个层次左右。说明基于网络画板的数学实验教学设计在解析几何专题——圆过定点问题中对学生学习可以产生较大的促进作用，具体表现在提升学生通过数形结合思想解决平面解析几何问题的能力上，进一步可以展望，平面解析几何中一些与几何转化有关的专题问题，借助网络画板辅助的数学实验教学环节都应会对学生直观想象的数学素养有比较明显的促进、提升作用。