doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2020.01.001

先于极限的微积分

林　群[1]，张景中[2,3]

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院，北京 100190；2. 中国科学院 重庆绿色智能技术研究院，重庆 400714；
3. 广州大学 计算科技研究院，广东 广州 510016)

摘　要　不借助于极限而建立微积分，证明了微积分基本定理、初等函数求导法则以及泰勒公式.

关键词　差商；导数；定积分；泰勒公式

中图分类号　O156　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2020)01－0001－16

Calculus Prior to Limits

LIN Qun[1] and ZHANG Jingzhong[2,3]

(1. Institute of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, PRC;
2. Chongqing Institute of Green Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 400714, PRC;
3. Institute of Computational Science and Technology, Guangzhou University, Guangzhou 510016, PRC)

Abstract　In this paper, the Fundamental Theorem of Calculus, the derivation rule of elementary functions, and Taylor's formula are proved without the use of limits.

Keywords　difference quotient, derivative, definite integral, Taylor's formula

0　引言

为了使微积分变得容易学习而不失严谨，已有不少工作[1－12].

最近[13]指出，从一些很平常的想法出发，即使没有微积分，也能够系统而简捷地解决通常认为用微积分才能解决的许多问题，其中包括判断函数的增减凸凹，求作曲线的切线以及计算函数曲线下的面积等等.

将[13]中的这些方法进一步包装深化，使之和传统的微积分分享共同的符号语言，自然就形成了进入微积分天地的另一条通道. 这条通道无需经过极限的关口，可以称为**先于极限的微积分**.

先于极限不是不要极限. 极限是极为珍贵的一份数学遗产，对微积分以及相关学科的成长发展极为重要，不可缺少. 但它并不是微积分入门的拦路虎. 先学一些微积分，接着学极限并非不可. 本文将在[13]的基础上，**建立不依赖于极限的导数和定积分的概念，证明微积分基本定理，给出初等函数的求导法则，引出泰勒公式**，并进一步阐述有关的应用.

1　函数在区间上的导数

导数是微积分中重要的基本概念. 其经典物理模型是运动物体的**瞬时速度**.

什么是瞬时速度？这是建立微积分过程中需要克服的第一个难题. 牛顿曾经设想过，当时间区间长度趋于 0 时，平均速度的**极限**叫做瞬时速度[14]. 但什么是极限呢？

牛顿用一个**一般性的难题**代替了一个**具体的难题**. 为了回答这个新的难题，数学家们用了一个多世纪！

收稿日期：2019－06－09

作者简介：林群(1935－)，男，福建连江人，中科院院士，从事计算数学研究与科普工作. Email:linq@lsec.cc.ac.cn
张景中(1936－)，男，河南汝南人，中科院院士，从事计算机推理与教育数学研究. Email:zjz2271@163.com

牛顿和其后的数学家没有注意到,有一个更平易的办法来理解瞬时速度与平均速度的关系:**瞬时速度有时不大于平均速度,有时不小于平均速度.**

用函数 $F(x)$ 表示运动质点在时刻 x 走过的路程,则从时刻 u 到时刻 v 该质点走过的路程为 $F(v)-F(u)$,于是它在时间区间 $[u,v]$ 上的平均速度就是 $\dfrac{F(v)-F(u)}{v-u}$. 若函数 $f(x)$ 表示它在时刻 x 的瞬时速度,则"瞬时速度有时大于等于平均速度,有时小于等于平均速度."的数学表达就是:在 $[u,v]$ 上有某两个时刻 p 和 q,使得不等式 $f(p)\leqslant\dfrac{F(v)-F(u)}{v-u}\leqslant f(q)$ 成立.

正是基于上述案例的启发,[13]引入了下述很有用的**差商控制函数**的概念.

[定义 1-1(*差商控制函数*)**]** 设函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在数集 S 上有定义,若对 S 中的任意两点 $u<v$,总有 $[u,v]\cap S$ 中的 p 和 q,使得

$$f(p)\leqslant\frac{F(u)-F(v)}{u-v}\leqslant f(q)$$

成立,则称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 在数集 S 上的差商控制函数.

在[13]中已经看到,差商控制函数是研究函数性质的有力工具.

对差商控制函数加上什么条件才能获得合理的导数概念呢?讨论瞬时速度是为了认识运动过程,如果所设想的瞬时速度能帮助我们尽可能准确地认识运动过程,这设想就是合理的. 至于在具体应用环境下要用什么条件来界定或检验,是进一步细化的任务.

[定义 1-2(*函数在区间上的宏导数*)**]** 设在区间 Q 上 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的差商控制函数. 如果在 Q 上以 $f(x)$ 为差商控制函数的任一个函数都有 $F(x)+C$ 的形式,则称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 在 Q 上的宏导数,并称 $F(x)$ 在 Q 上可控.

也可以说,$F(x)$ 的宏导数就是专属于它的差商控制函数. 按定义宏导数并不要求是唯一的.

注意我们仅仅定义了函数在区间上的宏导数,还没有定义一点处的导数. 更细致的探讨表明,宏导数和传统的导数确实不等价,而且互不包含. 宏导数这个词是我们杜撰的. 更深入的研究表明,$f(x)$ 是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的宏导数当且仅当 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的变上限的黎曼积分.

由上述定义和[13]中所得,立刻知道

[命题 1-1(*用函数的宏导数研究函数性质*)**]** 设 $F(x)$ 在区间 Q 可控,$f(x)$ 是 $F(x)$ 在 Q 上的宏导数,则

若 $f(x)$ 在区间 Q 为 0,则 $F(x)$ 在 Q 为常数;

若 $f(x)$ 在区间 Q 为常数,则 $F(x)$ 在 Q 为线性;

若 $f(x)$ 在区间 Q 为正,则 $F(x)$ 在 Q 递增;

若 $f(x)$ 在区间 Q 为负,则 $F(x)$ 在 Q 递减;

若 $f(x)$ 在区间 Q 不减(递增),则 $F(x)$ 在 Q 下凸(严格下凸);

若 $f(x)$ 在区间 Q 不增(递减),则 $F(x)$ 在 Q 上凸(严格上凸). □

其实,函数的增减凸凹,理论上并不要求上面的 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的宏导数,只要它是 $F(x)$ 的差商控制函数就够了.

[命题 1-2(*函数的差商控制函数差商有界时是其宏导数*)**]** 设 $F(x)$ 在区间 Q 有差商控制函数 $f(x)$,则当 $f(x)$ 差商有界时它是 $F(x)$ 的宏导数.

证明 这是宏导数定义与[13]中命题 4-3 相结合之推论. □

由[13]的命题 4-2,差商有界的宏导数若存在必唯一. 这类宏导数在理论和应用上极为重要,故下面给以特别的关注.

[定义 1-3(*函数在区间上的李普希兹导数*)**]**

设 $f(x)$ 在区间 Q 上差商有界,并且是 $F(x)$ 的差商控制函数,则称 $F(x)$ 在 Q 上李普希兹可导,称 $f(x)$ 为 $F(x)$ 在 Q 上的李普希兹导数,记作 $F'(x)=f(x)$.

关于宏导数和李普希兹导数之间的关系,可以证明一个有趣的事实:设有一串定义于 $[a,b]$ 的函数 $f_0,f_1,\cdots,f_n,f_{n+1}$,其中当 $k>0$ 时 f_{k+1} 是 f_k 的控制函数. 那么,只要 f_{n+1} 是 f_n 的宏导数,则对所有 $k<n$,f_{k+1} 是 f_k 的李普希兹导数.

所谓李普希兹导数,按传统意义就是满足李普西兹条件的导数,国外有些教材上有此说法,不是我们的创意. 为简便,本文下面提到的导数均指李普希兹导数,可导也指李普希兹可导;特别是有关命题在传统意义上也成立时,命题表述中就省略李普希兹. 事实上,在传统意义下初等函数的导数除个别特殊点外都是李普希兹导数.

按此定义,在[13]中已经求出了一些函数的导数,如

$$(x^2)'=2x,(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ (\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2},$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}\ \ (n\text{ 为整数}),(\sin x)'=\cos x,$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},(\log_a x)'=(a>0,a\neq 1),$$

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,(a^x)'=a^x\ln a\ \ (a>0,a\neq 1).$$

根据[13]中命题 4－1，若 $g(x)$ 在 Q 上是 $f(x)$ 的李普希兹导数，则对任意 $[a,b]\subseteq Q$ 有正数 M，使得对 $[a,b]$ 上的任两点 $u<v$ 和任意 $s\in[u,v]$，有不等式

$$\left|\frac{f(v)-f(u)}{v-u}-g(s)\right|\leqslant M|v-u|.$$

下面进一步指出，此不等式也是 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的李普希兹导数的充分条件. 称上述不等式为一致性不等式.

［**命题 1－3**（函数 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的李普希兹导数的充分条件）］　设 $g(x)$ 和 $f(x)$ 在 Q 上有定义，且对任意 $[a,b]\subseteq Q$ 有正数 M，使得对 $[a,b]$ 上的任两点 $u\neq v$ 有不等式

$$\left|\frac{f(v)-f(u)}{v-u}-g(u)\right|\leqslant M|v-u|,$$

则 $g(x)$ 在 Q 上是 $f(x)$ 的李普希兹导数.

证明　将题设条件 $\left|\frac{f(v)-f(u)}{v-u}-g(u)\right|\leqslant M|v-u|$ 中的 u、v 交换后得 $\left|\frac{f(v)-f(u)}{v-u}-g(v)\right|\leqslant M|v-u|$，比较两式得 $|g(v)-g(u)|\leqslant 2M|v-u|$，这证明了函数 $g(x)$ 在 Q 上差商有界. 下面来证明 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的差商控制函数. 这证明的想法很简单很自然：在 $[u,v]$ 上找个很小的子区间，使得 $f(x)$ 在此子区间上的差商大于（小于）它在 $[u,v]$ 上的差商；当此子区间足够小时，$g(x)$ 在此子区间上的值非常接近 $f(x)$ 在此子区间上的差商，从而也大于（小于）$f(x)$ 在 $[u,v]$ 上的差商，这正是要证明的. 具体写出来就是下面的推导.

若对于所有 $x\in(u,v]$ 差商 $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ 为常数则显然. 不然，由差商分化定理（[13]中命题 2－1）就有 $[r,s]\subset[u,v]$ 使

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}-\frac{f(s)-f(r)}{s-r}=d>0.$$

将 $[r,s]$ 等分为 n 段，记 $h=\frac{s-r}{n}$，则 n 段中必有一段 $[p,p+h]$ 使 $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\leqslant\frac{f(s)-f(r)}{s-r}$，当 $Mh<d$ 时就有

$$g(p)\leqslant\frac{f(p+h)-f(p)}{h}+Mh<\frac{f(s)-f(r)}{s-r}+d$$

$$=\frac{f(v)-f(u)}{v-u}.$$

同理可证有 $q\in[u,v]$ 使得 $g(q)\geqslant\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$. □

由此立刻得到一个重要的结论：

［**命题 1－4**（函数 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的李普希兹导数的充要条件）］　设 $g(x)$ 和 $f(x)$ 在 Q 上有定义，则 $g(x)$ 在 Q 上是 $f(x)$ 的李普希兹导数的充要条件是：对任意 $[a,b]\subseteq Q$ 有正数 M，使得对 $[a,b]$ 上的任两点 $u\neq v$ 有

$$\left|\frac{f(v)-f(u)}{v-u}-g(u)\right|\leqslant M|v-u|.$$

下面应用命题 1－4 来验证几条[13]中已经得到的结果.

例 1－1　求证 $g(x)=2x$ 是函数 $f(x)=x^2$ 的导数.

证明　计算差商得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h,$$

故有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-2x\right|\leqslant|h|,$$

由命题 1－4 知 $2x$ 是 x^2 的导数. □

例 1－2　求函数 $f(x)=x^3$ 的导数.

解　函数 $f(x)=x^3$ 的差商为 $\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$，在任意区间 $[a,b]$ 上有不等式

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-3x^2\right|=|(3x+h)h|$$

$$\leqslant 3(|a|+|b|)|h|,$$

故得 $f(x)=x^3$ 有导数 $3x^2$. □

例 1－3　求 $F(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的导数.

解　对于不含 0 的闭区间 $[a,b]$ 中的 x 和 $x+h$ 计算差商得

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}+\frac{h}{x^2(x+h)}$$

移项，并且设 $m=\min\{|a|,|b|\}$，则有

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-(-\frac{1}{x^2})\right|=\left|\frac{h}{x^2(x+h)}\right|\leqslant\frac{|h|}{m^3}.$$

故得$-\frac{1}{x^2}$是$\frac{1}{x}$的导数. □

例 1-4 求证$\frac{1}{2\sqrt{x}}$是函数$G(x)=\sqrt{x}(x>0)$的导数.

解 设$0<a<b$,在$[a,b]$上估计函数的差商和$\frac{1}{2\sqrt{x}}$的差得

$$\left|\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|$$
$$=\left|\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\right|$$
$$=\left|\frac{h}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})^2}\right|\leqslant\frac{|h|}{8a\sqrt{a}},$$

即知$\frac{1}{2\sqrt{x}}$是$\sqrt{x}$的导数. □

将上述不等式写成形式 $\left|\sqrt{x+h}-(\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}})\right|\leqslant\frac{|h|^2}{8a\sqrt{a}}$,可以看出$\sqrt{x+h}$的近似值为$\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}}$而误差不超过$\frac{|h|^2}{8a\sqrt{a}}$,这里$a$可取$x$和$x+h$中较小者.例如,$\sqrt{50}=\sqrt{49+1}\approx\sqrt{49}+\frac{1}{2\sqrt{49}}=7.071428\cdots$,误差不超过$\frac{1}{8\cdot 7^3}\approx 0.0004$.这比[13]中例1—5的方法更为直截了当.

例 1-5 对正整数n,验证函数$g(x)=nx^{n-1}$是$f(x)=x^n$的导数.

解 由$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^{n-k}h^k$,当$x\in[a,b]$时得

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-nx^{n-1}\right|=\left|\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^{n-k}h^{k-1}\right|$$
$$\leqslant 2^n(|a|+|b|)^{n-2}|h|,$$

可知$f(x)=x^n$有李普希兹导数nx^{n-1}. □

我们看到,利用一致不等式来计算导数,有时更为方便.

2 求导法则

为了更广泛地应用导数知识,就要知道更多函数的求导公式.

应用下面几个求导法则,结合已有的求导公式,可以解决初等函数类的求导问题.

[命题 2-1(函数线性组合的求导法)**]** 若$f(x)$和$g(x)$都在区间I上可导,则对任意实数α和β,函数$\alpha f(x)+\beta g(x)$也在区间I上可导,且有

$$(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

证明 根据李普希兹可导的定义和题设,对于任意闭区间$[a,b]\subseteq I$,有正数M_1和M_2使对$[a,b]$中任意的x和$x+h$有下列不等式成立

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|\leqslant M_1h^2,$$
$$|g(x+h)-g(x)-g'(x)h|\leqslant M_2h^2.$$

记$H(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$,得

$$|H(x+h)-H(x)-(\alpha f'(x)+\beta g'(x))h|$$
$$\leqslant|\alpha(f(x+h)-f(x)-f'(x)h)|+$$
$$|\beta(g(x+h)-g(x)-g'(x)h)|$$
$$\leqslant(|\alpha M_1|+|\beta M_2|)h^2,$$

由命题9-2可知$H(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$有李普希兹导数$\alpha f'(x)+\beta g'(x)$. □

[命题2-2(复合函数求导的链式法则)**]** 设函数$F(x)$在区间I上可导,$G(x)$在区间J上可导,且当$x\in I$时有$F(x)\in J$,则复合函数$G(F(x))$在I上可导,且

$$(G(F(x)))'=G'(F(x))F'(x).$$

注意求导数的记号的两种形式:$(G(F(x)))'$表示函数$G(F(x))$对x求导,而$G'(F(x))$表示$G(u)$对u求导后再令$u=F(x)$代入.

证明 为简单且不失一般性,我们对$I=[a,b]$且$J=[c,d]$的情形加以论证.

只要证明有一个正数M,使对$[a,b]$中的任意两点x和$x+h$有不等式$|G(F(x+h))-G(F(x))-G'(F(x))F'(x)h|\leqslant Mh^2$即可.

记$F(x)=y$,$F(x+h)-F(x)=H$,则上式左端可以写成

$$|G(y+H)-G(y)-G'(y)F'(x)h|$$
$$=|G(y+H)-G(y)-G'(y)H+$$
$$G'(y)H-G'(y)F'(x)h|$$
$$\leqslant|G(y+H)-G(y)-G'(y)H|+$$
$$|G'(y)|\cdot|H-F'(x)h|.$$

根据李普希兹可导的定义和条件,有正数A、M_1、M_2等使对$[a,b]$中的任意两点x、$x+h$和$[c,d]$中的任意两点y、$y+H$有不等式

$$|H-F'(x)h|=|F(x+h)-F(x)-F'(x)h|$$
$$\leqslant M_1h^2,$$

$|G(y+H)-G(y)-G'(y)H| \leqslant M_2H^2$,

$|G'(y)|<A,\ F'(x)<A$;

$|H| \leqslant |F'(x)h|+|M_1h^2|$

$<(A+M(b-a))|h| = M_3|h|$.

把这些不等式用于前式即可. □

[**命题 2-3**(多重复合函数求导的链式法则)] 设函数 $F(x)$ 在区间 I 上可导,$G(x)$ 在区间 J 上可导,$H(x)$ 在区间 K 上可导,且当 $x\in I$ 时有 $F(x)\in J$,当 $u\in I$ 时有 $G(u)\in K$,则复合函数 $H(G(F(x)))$ 在 I 上可导,且

$$(H(G(F(x))))' = H'(G(F(x)))G'(F(x))F'(x).$$

证明 记 $\varphi(x)=G(F(x))$ 得 $(H(\varphi(x)))' = H'(\varphi(x))\varphi'(x)$;再得 $\varphi'(x)=(G(F(x)))'=G'(F(x))F'(x)$;集成两式得

$$\begin{aligned}(H(G(F(x))))' &= (H(\varphi(x)))'\\ &= H'(\varphi(x))\varphi'(x)\\ &= H'(G(F(x)))G'(F(x))F'(x).\ \square\end{aligned}$$

利用链式法则,可以轻松获得函数乘积与商的求导公式.

[**命题 2-4**(函数乘积的求导法则)] 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在区间 I 上可导,则函数 $f(x)\cdot g(x)$ 也在区间 I 上可导,且有

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x).$$

证明 只要在 I 的任意闭子区间 Q 上考虑即可.

取足够大的正数 A 使得 $f(x)+A$ 和 $g(x)+A$ 在 Q 上都为正值,由于

$$\begin{aligned}&(f(x)+A)(g(x)+A)\\ &=\exp(\ln(f(x)+A)(g(x)+A))\\ &=\exp(\ln(f(x)+A)+\ln(g(x)+A)),\end{aligned}$$

左端展开求导,右端用复合函数求导的链式法则得

$$\begin{aligned}&(f(x)g(x))'+A(f'(x)+g'(x))\\ &=(f(x)+A)(g(x)+A)\cdot\left(\frac{f'(x)}{f(x)+A}+\frac{g'(x)}{g(x)+A}\right).\end{aligned}$$

整理后得到所要的公式. □

[**命题 2-5**(函数倒数的求导法则)] 若 $f(x)$ 在区间 I 上可导,且 $f(x)\neq 0$,则函数 $\frac{1}{f(x)}$ 也在区间 I 上可导且 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$.

证明 把 $\frac{1}{f(x)}$ 看成 $y=\frac{1}{u}$ 和 $u=f(x)$ 的复合函数,用链式法则即可. □

于是立刻得到

[**命题 2-6**(函数商的求导法则)] 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在区间 I 上可导且 $g(x)\neq 0$,则函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也在区间 I 上可导,且有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}.\ \square$$

反函数求导公式,可用类似于[13]中求指数函数的差商控制函数的方法.

[**命题 2-7**(反函数的求导法则)] 若 $f(x)$ 在区间 I 上可导且 $f'(x)\neq 0$,其值域为 J,则其反函数 $g(x)$ 也区间 J 上可导,且有

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

证明 对任意 $[u,v]\subseteq J$,由 $f(x)$ 是李普希兹可导的,有 $[u,v]$ 上的点 p 和 q 使得

$$f'(g(p)) \leqslant \frac{f(g(v))-f(g(u))}{g(v)-g(u)} \leqslant f'(g(q));$$

即 $f'(g(p)) \leqslant \frac{v-u}{g(v)-g(u)} \leqslant f'(g(q))$,这表明 $\frac{g(v)-g(u)}{v-u}$ 在 $\frac{1}{f'(g(p))}$ 和 $\frac{1}{f'(g(q))}$ 之间,即 $\frac{1}{f'(g(x))}$ 是 $g(x)$ 的差商控制函数. 由 $f'(x)$ 差商有界及其非零条件,不难验证 $\frac{1}{f'(g(x))}$ 差商有界. □

上面命题 2-6 和 2-7 的证明中,若仔细推敲,需要假定作为分母的函数的绝对值在所考虑的区间上有正的下界,而不仅仅是非 0. 在引入实数理论后才能证明,对于差商有界函数而言,在闭区间上有正的下界和处处非 0 两个条件是等价的.

上述这些求导法则和传统微积分完全一致. ,无需多讲什么了.

3 初等函数微分法

数学中最重要也最常见的一大类函数是**初等函数**. 所谓初等函数,是由不多的几种基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数. 基本初等函数共有 6 类,就是常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数.

基本初等函数的求导公式,最根本的可以归结为 3 条:$C'=0$,$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 和 $(\sin x)'=\cos x$. 从这

3条出发,使用下列5条法则,可以建立基本初等函数求导公式表.这5条法则就是上一节讲的:

(i) 函数线性组合的导数:

$$(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x);$$

(ii) 函数积的导数:

$$(f(x)g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x);$$

(iii) 函数商的导数:

$$(\frac{g(x)}{f(x)})'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2};$$

(iv) 复合函数的导数:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x);$$

(v) 反函数的导数:若 $f(g(x))=x$ 则

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}.$$

这5条法则可以归结为两条,即函数和的求导法则和复合函数求导的链式法则.

从这很少的公式和法则出发,得到**基本初等函数求导公式表:**

(1) 常数 $C'=0$.

(2) 幂函数 $(x^n)'=nx^{n-1}$(n 非零整数,
$x\in(-\infty,+\infty)$);
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$($\alpha$ 非零实数,$x>0$).

(3) 对数函数 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$;

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(x>0).$$

(4) 指数函数 $(e^x)'=e^x$;
$(a^x)'=a^x\ln a$.

(5) 三角函数 $(\sin x)'=\cos x$;
$(\cos x)'=-\sin x$;

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}.$$

(6) 反三角函数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1);$$

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (|x|<1);$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\text{arccot}\, x)'=\frac{-1}{1+x^2}.$$

从上面这些公式出发,应用计算导数的运算法则,就能根据初等函数的表达式,求出成千上万种初等函数的导数.这些计算工作可以机械化地使用计算机软件执行.

下面来讨论一下导数记号问题.

牛顿采用的导数记号是在代表函数的变量名上加个圆点.用一撇表示求导数运算,则是拉格朗日首先采用的记法.

这个记号很方便,但有不足之处.例如,如果计算$(u^v)'$,就有了问题:是把 u 看成自变量,还是把 v 看成自变量呢?把u看成自变量,v就是参数,u^v就是幂函数,$(u^v)'=v\cdot u^{v-1}$;如果把 v 看成自变量,u 就是参数,u^v 就是指数函数,则$(u^v)'=u^v\cdot\ln u$;两者大不相同.

莱布尼兹建议,用$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{df}{dx}$ 或$\dfrac{df(x)}{dx}$ 来表示函数 $y=f(x)$ 的导数.按照莱布尼兹的这种记号,$\dfrac{du^v}{du}=v\cdot u^{v-1}$ 而$\dfrac{du^v}{dv}=u^v\cdot\ln u$,两者就分清楚了.

记号$\dfrac{dy}{dx}$ 作为导数,本意是一个整体.但在引进微分的概念后,也可以看成两个微分的比.而且这样带来很多方便.

什么是微分?通常把 $f(x+h)-f(x)$ 叫做函数 f 在 x 处的差分,通常记作 Δy 或者 $\Delta f(x)$、Δf 等;$f'(x)h$ 叫做 f 在 x 处的微分,通常记作 dy 或者 $df(x)$、df 等.这样看,微分的意义很清楚也很简单,就是 $f'(x)h$,这里 h 是不同于 x 的独立的变量.

既然 $dy=f'(x)h$,把x看成x自己的函数就有 $dx=(x)'h=h$,于是 $dy=f'(x)h=f'(x)dx$.这样,$dy=f'(x)dx$ 就成为$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ 的另一种写法,即求微分的表达式.这样一来,初等函数求导公式可以写成初等函数微分公式:

(1) 常数 $dC=0$;

(2) 幂函数 $dx^n=nx^{n-1}dx$(n 非零整数,
$x\in(-\infty,+\infty)$);
$dx^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}dx$($\alpha$ 非零实数,$x>0$).

(3) 对数函数 $d\ln x=\dfrac{dx}{x}\ (x>0)$;

$$d\log_a x=\frac{dx}{x\ln a}(x>0).$$

(4) 指数函数 $de^x=e^x dx$;

$$\mathrm{d}a^x = a^x \ln a \mathrm{d}x.$$

(5) 三角函数 $\mathrm{dsin}x = \cos x \mathrm{d}x$；

$$\mathrm{dcos}x = -\sin x \mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{dtan}x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x};$$

$$\mathrm{dcot}x = \frac{-\mathrm{d}x}{\sin^2 x}.$$

(6) 反三角函数

$$\mathrm{darcsin}x = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1);$$

$$\mathrm{darccos}x = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1);$$

$$\mathrm{darctan}x = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2};$$

$$\mathrm{darccot}x = \frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

求导数的运算法则，也可以用微分等式来表示：

(i) 函数线性组合的微分：$\mathrm{d}(\alpha f+\beta g)=\alpha \mathrm{d}f+\beta \mathrm{d}g$；

(ii) 函数积的微分：$\mathrm{d}(f\cdot g)=f\mathrm{d}g+g\mathrm{d}f$；

(iii) 函数商的微分：$\mathrm{d}(\frac{g}{f})=\frac{f\mathrm{d}g-g\mathrm{d}f}{f^2}$；

(iv) 复合函数的微分：$\mathrm{d}f(g)=f'(g)\mathrm{d}g$；

(v) 反函数的微分：若 $f(g(x))=x$ 则 $\mathrm{d}g=\frac{\mathrm{d}x}{f'(g)}$.

微分等式在表示复合函数的链式法则时更方便. 设 $y=f(u)$ 且 $u=g(x)$，按链式法则有 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)dx$；但由于 $u=g(x)$，所以 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$，这样就有 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(g(x))=f'(g(x))\mathrm{d}u$，也就是 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$，可见尽管 u 是中间变量，微分等式 $\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$ 仍然成立. 这样不论函数复合多少次，都可以按微分等式一层一层地计算. 这叫做微分等式的不变性.

4　定积分及牛顿－莱布尼兹公式

如何计算任意曲线包围的面积，直到 17 世纪初还是数学家面前的难题. 微积分的诞生使这个难题迎刃而解.

一般说来，任意曲线包围的区域总能用直线分割成若干矩形和一些“曲边梯形”(如图 4－1)，所以问题最后归结为曲边梯形面积的计算. 在[13]中利用差商控制函数求出了不少曲线下曲边梯形的面积，又利用曲边梯形面积引进了对数函数 $\ln x$. 为了进行更严谨的讨论，必须说清楚什么是曲边梯形的面积.

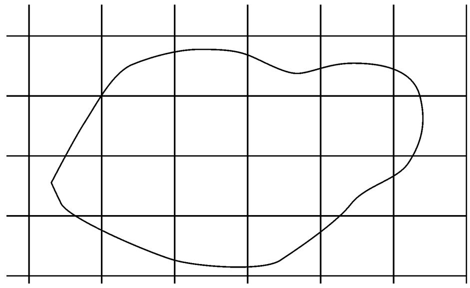

图 4－1　曲线包围的区域被分割成矩形和曲边梯形

给了区间 I 上的函数 $f(x)$，对应于 I 中任意两点 $u<v$，$f(x)$ 在 $[u,v]$ 上的曲边梯形的“代数面积”(如图 4－2，在 x 轴上方部分面积为正，下方部分面积为负，取总和.)，可以看成是某个二元函数 $S(u,v)$ 的值. 基于一般的面积概念，$S(u,v)$ 应当满足两个条件. 一个条件是面积的可加性：$[u,v]$ 上的面积加上 $[v,w]$ 上的面积，等于 $[u,w]$ 上的面积；第 2 个条件是，$[u,v]$ 上的面积和区间 $[u,v]$ 的长度之比，应当是 $f(x)$ 在 $[u,v]$ 上的“平均值”. 根据面积的这些直观性质，抽象出“定积分”的定义.

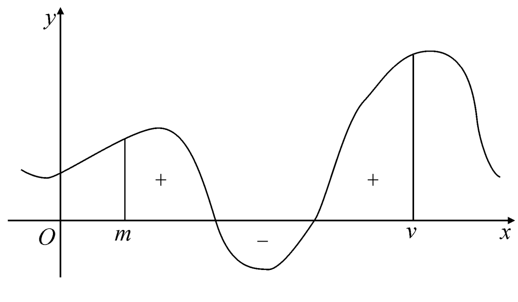

图 4－2　区间 $[u,v]$ 上曲边梯形的代数面积

[定义 4－1(积分系统和定积分)**]**　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义；如果有一个二元函数 $S(u,v)$ $(u\in I, v\in I)$，满足

(i) 可加性：对 I 上任意的 u,v,w 有

$$S(u,v)+S(v,w)=S(u,w);$$

(ii) 中值性：对 I 上任意的 $u<v$，在 $[u,v]$ 上必有两点 p 和 q 使

$$f(p)(v-u)\leqslant S(u,v)\leqslant f(q)(v-u);$$

则称 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个积分系统.

如果 $f(x)$ 在 I 上有唯一的积分系统 $S(u,v)$，则称 $f(x)$ 在 I 上可积，并称数值 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在

$[u,v]$ 上的定积分，记作 $S(u,v)=\int_u^v f(x)\mathrm{d}x$. 表达式中的 $f(x)$ 叫做被积函数，x 叫做积分变量，u 和 v 分别叫做积分的下限和上限. 用不同于 u,v 的其他字母来代替 x 时，$S(u,v)$ 数值不变.

根据定义容易得出

［命题 4－1］ 若 $S(u,v)$ 是一个积分系统，则

(i) $S(u,u)=0$；

(ii) $S(u,v)=-S(v,u)$.

证明 (i) 由 $S(u,u)+S(u,v)=S(u,v)$ 推出 $S(u,u)=0$；

(ii) 由 $S(u,v)+S(v,u)=S(u,u)=0$ 推出 $S(u,v)=-S(v,u)$. □

注意到积分系统定义中的不等式可以写成等价的

$$f(p)\leqslant \frac{S(u,v)}{v-u}\leqslant f(q),$$

这就把积分与差商控制函数密切地联系起来.

［命题 4－2］ 设 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个积分系统，c 是 I 上的一个点，令 $F(x)=S(c,x)$，则在 I 上 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的差商控制函数；

反过来，若在 I 上 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的差商控制函数，令 $S(u,v)=F(v)-F(u)$，则 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个积分系统.

证明 设 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个积分系统且 $F(x)=S(c,x)$，则由可加性有 $S(u,v)=S(c,v)-S(c,u)=F(v)-F(u)$，再由中值性可知 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的差商控制函数.

反过来，若在 I 上 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的差商控制函数，令 $S(u,v)=F(v)-F(u)$，则由

$$\begin{aligned}S(u,v)+S(v,w)&=F(v)-F(u)+F(w)-F(v)\\&=F(w)-F(u)=S(u,w),\end{aligned}$$

可知 $S(u,v)$ 满足可加性，再由差商控制函数定义得 $S(u,v)$ 满足中值性. □

通过较为深入的讨论可知，这里引入的定积分概念和黎曼积分是等价的.

［命题 4－3(微积分基本定理，即 Newton-Leibniz 公式)**］** 设 $F(x)$ 在区间 Q 上有宏导数 $f(x)$，则对任意 $u\in Q$ 和 $v\in Q$ 有

$$\int_u^v f(x)\mathrm{d}x=F(v)-F(u);$$

反过来，若 $f(x)$ 在 Q 上有唯一的积分系统 $S(u,v)=\int_u^v f(x)\mathrm{d}x$，对任意固定的 $u\in Q$ 令 $F(x)=S(u,x)=\int_u^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在区间 Q 上有宏导数 $f(x)$.

证明 设在 Q 上 $F(x)$ 有宏导数 $f(x)$. 因为 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的差商控制函数，由命题 4－2 可知 $S(u,v)=F(v)-F(u)$ 是 $f(x)$ 在 Q 上的积分系统. 按定积分定义还要证明 $f(x)$ 在 Q 上的积分系统的唯一性. 设 $R(u,v)$ 也是 $f(x)$ 在 Q 上的积分系统，只要证明 $R(u,v)=S(u,v)$. 为此取任一点 $a\in Q$ 并令 $G(x)=R(a,x)$，则 $f(x)$ 也是 $G(x)$ 的差商控制函数. 因为 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的宏导数，即专属的差商控制函数，故有常数 C 使得 $G(x)=F(x)+C$，从而

$$R(u,v)=G(v)-G(u)=F(v)-F(u)=S(u,v),$$

即 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 Q 上的唯一积分系统.

反过来，若 $f(x)$ 在 Q 上有积分系统 $S(u,v)=\int_u^v f(x)\mathrm{d}x$，对任意固定的 $u\in Q$ 令 $F(x)=S(u,x)=\int_u^x f(t)\mathrm{d}t$，由命题 4－2 可知 $f(x)$ 是 $F(x)$ 在 Q 上的差商控制函数，由积分系统的唯一性，$f(x)$ 是 $F(x)$ 在 Q 上的独享的差商控制函数，即宏导数. □

与传统的微积分教程中所表述的微积分基本定理不同，这里不仅对 $f(x)$ 没有加上连续性之类的附加条件，而且定理是双向成立的. 这也是我们考虑采用宏导数概念的初衷.

微积分基本定理把[13]中计算曲边梯形面积的方法提升为一般的公式，并且建立了符号表示，开辟了进一步发展提升的空间.

顺便说一下，Lax 在[1]中把函数 $f(x)$ 在区间 S 上的黎曼积分记作 $I(f,S)$，强调积分是一种运算，输入是一个函数和一个区间，输出是一个数. 而 $I(f,S)$ 的值的确定只用到两个性质：

(1) $I(f,S)$ 关于 S 的可加性：对任何不相交的 S 的子区间 S_1,S_2 有

$$I(f,S_1+S_2)=I(f,S_1)+I(f,S_2);$$

(2) $I(f,S)$ 关于 f 的有界性：若 $m\leqslant f(x)\leqslant M(\forall x\in S)$，则

$$m\mid S\mid\leqslant I(f,S)\leqslant M\mid S\mid.$$

从这里可以看出我们的想法和他本质上是相通的. 不过他是先肯定了函数 $f(x)$ 的黎曼可积性，再探索其性质；我们则将这两条性质作为考虑定积分的逻辑起点，再加上唯一性来建立定积分的公理化

理论.

若 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的宏导数，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 牛顿－莱布尼兹公式表明，只要找到 $f(x)$ 的一个原函数，就能够轻易地求出 $y=f(x)$ 构成的曲边梯形的面积. 解决了大量的面积计算问题.

例 4－1　如图 4－3，抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=x+2$ 交于 P 和 Q 两点，求线段 PQ 所对的抛物线弓形的面积.

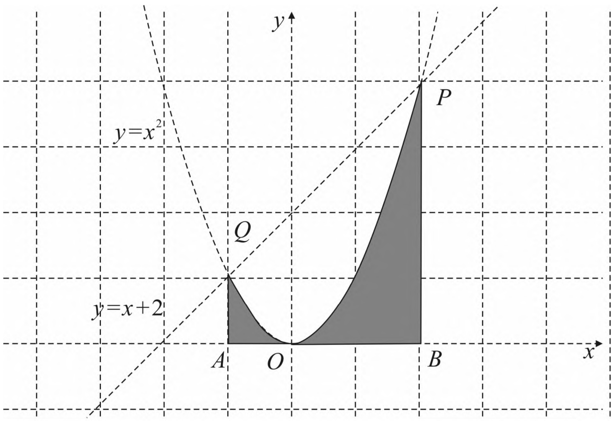

图 4－3　抛物线下的面积

解　如图，所求弓形面积等于梯形 $ABPQ$ 减去抛物线下阴影部分面积之差. 设阴影部分面积为 S，由于 $f(x)=x^2$ 的原函数是 $F(x)=\frac{x^3}{3}$，根据微积分基本定理得

$$S=\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=3.$$

容易算出梯形 $ABPQ$ 面积为 $\frac{15}{2}$，故所求弓形面积为 $\frac{15}{2}-3=\frac{9}{2}$. □

这里和以后用记号 $F(x)\Big|_a^b$ 表示 $F(b)-F(a)$. 其中变量 x 可以代之以其它字母变量.

例 4－2　求函数 $y=\sin x$ 的曲线在区间 $[a,b]$ 形成的曲边梯形的代数面积.

解　由于 $(-\cos x)'=\sin x$，根据微积分基本定理可知所求代数面积为

$$\int_a^b\sin x\mathrm{d}x=(-\cos x)\Big|_a^b$$
$$=(-\cos b)-(-\cos a)=\cos a-\cos b.\ \square$$

取特例，令 $a=0,b=\pi$，求得正弦曲线在 $[0,\pi]$ 上的弓形面积为

$$\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\cos 0-\cos\pi=1-(-1)=2.$$

为了应用微积分基本定理(牛顿-莱布尼兹公式)，常常要找出已知函数的原函数，也就是问已知函数是谁的控制函数？

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 是任意常数，则 $F(x)+C$ 显然也是 $f(x)$ 的原函数.

如果 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的原函数，则 $(F(x)-G(x))'=0$，从而 $F(x)-G(x)$ 是常数. 这表明 $f(x)$ 的所有的原函数都可以表示成 $F(x)+C$ 的形式.

求原函数和求定积分的方法和技巧，叫积分法.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 一个原函数，$f(x)$ 的所有原函数之集 $F(x)+C$ 叫做 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

根据微分的定义，得到

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(F(x)+C)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int\mathrm{d}F(x)=\int F'(x)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

这里显示出两个运算符号 d 和 $\int$ 的互逆关系.

有不少数学软件可以用来在计算机上求函数的不定积分，即求原函数. 手算不定积分可以查阅不定积分表.

根据基本初等函数求导公式，可得如下不定积分公式，这些公式构成基本积分表. 这些方面都和传统的微积分一致，无需多讲.

5　定积分的初步应用

由于本文中定积分的定义不同于传统教材上的黎曼积分，所以在应用于解决实际问题时有些说法也会有区别.

曲边梯形的面积是定积分最基本也是最简单的几何模型. 实际上，根据积分系统的定义，只要是依赖于两个参数且满足可加性条件的量 $S(u,v)$，就可以考虑用定积分概念和微积分基本定理来计算它. 为此先要确定一个使 $S(u,v)$ 满足中值性条件的函数 $f(x)$，再找到函数 $F(x)$ 使有 $F'(x)=f(x)$，就可以求出 $S(u,v)=\int_u^v f(x)\mathrm{d}x=F(v)-F(u)$.

例 5-1 设$[a,b]$上的函数 $y=F(x)$ 的曲线在 x 轴上方. 该曲线形成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成一旋转体(图 5-1),求其体积.

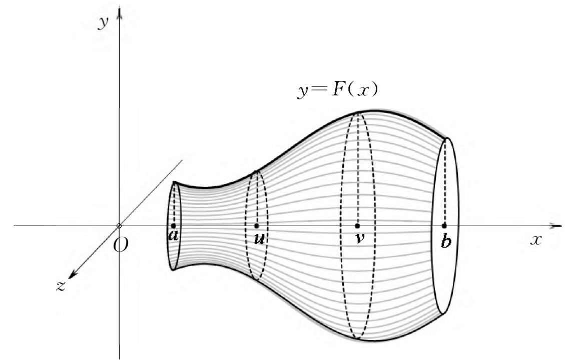

图 5-1 曲边梯形旋转一周形成的旋转体

解 如图,旋转体在平面 $x=u$ 和 $x=v$ 之间部分的体积 $S(u,v)$ 关于参数 u 和 v 显然满足可加性. 想象把这部分体积折合成高为 $v-u$ 的圆柱,则圆柱的半径必在$[u,v]$上的两个函数值 $F(p)$ 和 $F(q)$ 之间,即

$$\pi\cdot F^2(p)(v-u)\leqslant S(u,v)\leqslant \pi\cdot F^2(q)(v-u).$$

于是可取 $g(x)=\pi F^2(x)$ 为被积函数,得到这部分旋转体体积表达式

$$S(u,v)=\int_u^v \pi F^2(x)\mathrm{d}x.\quad \square$$

考虑 $F(x)=kx$ 的特殊情形,设 $k>0,a=0,b=H$;对应的旋转体是高为 H 而底半径为$R=kH$ 的圆锥体,而对应于$[0,H]$的子区间$[u,v]$部分是高为 $v-u$,上下底半径分别为 ku 和 kv 的圆台(图 5-2). 圆台体积 $S(u,v)$ 的定积分表达式中被积函数是 πk^2x^2. 由$\left(\frac{\pi k^2x^3}{3}\right)'=\pi k^2x^2$ 可得圆台体积公式

$$S(u,v)=\int_u^v \pi k^2x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi k^2x^3}{3}\Big|_u^v=\frac{\pi k^2(v^3-u^3)}{3}.$$

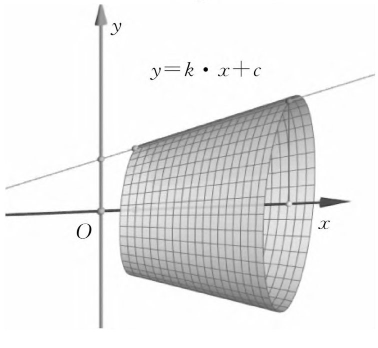

图 5-2 线段旋转成圆台侧面

若记 $h=v-u$,上底 $r=ku$,下底 $R=kv$,圆台体积为 $V(r,R,h)$,则得

$$V(r,R,h)=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2),$$

当 $u=0$ 时 $r=0$,得到圆锥体积公式

$$V(r,h)=\frac{1}{3}\pi Rh.$$

这和中学里所学的公式相同.

从这里看到,采用上面定积分的定义,在应用时只要检查可加性和中值性,无需经过无穷分割求和的论述.

在例 5-1 推出的旋转体体积公式中取 $F(x)=\sqrt{R^2-x^2}$,$x\in[-R,R]$. 函数 $y=F(x)$ 的图像是半径为 R 而圆心在原点的半圆. 它绕 x 轴旋转一周生成半径为 R 的球面. 如果取区间$[0,h]$上的一段圆弧绕 x 轴旋转,则生成一个下底为球的大圆而高为 h 的球台的侧面,如图 5-3.

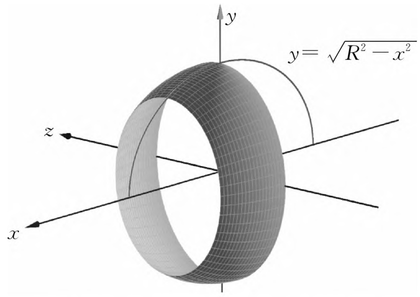

图 5-3 圆弧旋转成球台侧面

对应的球台体积 $V(R,h)$ 为

$$\begin{aligned}V(R,h)&=S(0,h)\\&=\int_0^h \pi F^2(x)\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^h (R^2-x^2)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里被积函数是二次多项式,容易求得得球台体积公式

$$\begin{aligned}V_{球台}(R,h)&=\frac{\pi h}{6}\left(F^2(0)+F^2(h)+4F^2\left(\frac{h}{2}\right)\right)\\&=\frac{\pi h}{3}(3R^2-h^2).\end{aligned}$$

上式中取 $h=R$ 得半球体积为$\frac{2\pi R^3}{3}$,从而得到体积

$$V_{球}(R)=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

为了计算球台侧面的面积,考虑两个高相等但半径分别为 $R+d$ 和 $R-d$ 的两个球台之差所形成

的球带壳体的体积(图 5-4)：

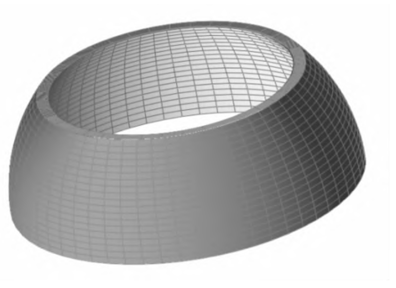

图 5-4　球带壳体

$$V_{球台}(R+d,h)-V_{球台}(R-d,h)$$
$$=\frac{\pi h}{3}(3(R+d)^2-3(R-d)^2)=4\pi hdR,$$

再除以壳体的厚度 $2d$，得到半径为 R 高为 h 的球带的侧面积公式

$$S_{球带}=2\pi Rh.$$

当 $h=R$ 时即为半球的表面积，从而球的表面积 $S_{球}=4\pi R^2$.

从这里可知，高和底面直径相等的圆柱，其侧面积等于它的内切球的表面积(图 5-5)，这是阿基米德自己很满意的发现. 更有趣的是，若球的直径等于圆柱底面直径，则其球带或球冠侧面积等于等高的圆柱侧面积. 如图 5-6.

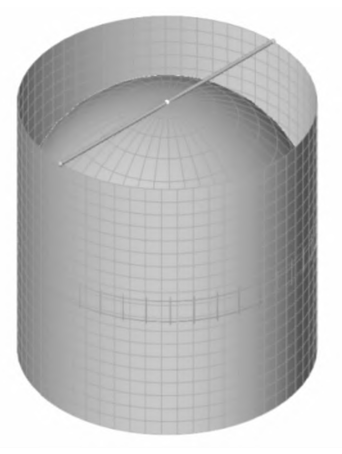

图 5-5　高和底面直径相等的圆柱和它的内切球

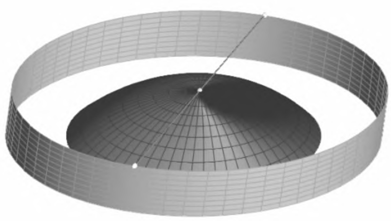

图 5-6　从与圆柱直径相等的球上割下的与圆柱等高的球冠

如果物体在运动的过程中始终受到一个变力的作用，可以应用定积分的概念来计算功.

设 $a<b$ 是 x 轴上的两点，某物体 Q 从 a 到 b 作直线运动，作用于 Q 上的力沿 x 轴方向的分力设为 $F=F(x)(x\in[a,b])$. 当 $u<v$ 时设 $W(u,v)=-W(v,u)$ 是 F 在 Q 经过 $[u,v]$ 段过程中所做的功，则 $W(u,v)$ 显然有可加性. 如果 F 在 $[u,v]$ 段有上界 B 和下界 A，自然有 $A(v-u)\leqslant W(u,v)\leqslant B(v-u)$. 可见应有 $W(u,v)=\int_u^v F(x)\mathrm{d}x$. 下面看一个例子.

例 5-2　将质量为 m 的物体 Q 从地面垂直提升到高度 H，为克服地心引力需要做的功是多少？特别地，如将此物体发射使脱离地球引力，需要的初始速度是多大？

解　物体 Q 与地心距离为 x 时，它所受的地心引力的大小为

$$F(x)=\frac{GmM}{x^2},$$

这里 G 是万有引力常数，M 是地球质量. 若记地球半径为 R，$GmM=C$，可知将物体从地面提升到高度 H 时所做的功应为

$$W(H)=\int_R^{R+H}\frac{C}{x^2}\mathrm{d}x.$$

因为 $\left(\frac{-C}{x}\right)'=\frac{C}{x^2}$，故得

$$W(H)=\int_R^{R+H}\frac{C}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{-C}{x}\Big|_R^{R+H}$$
$$=\frac{-C}{R+H}+\frac{C}{R}=\frac{CH}{R(R+H)}.$$

比值 $\frac{H}{\mathrm{R}+H}$ 小于 1 但当 H 很大时接近于 1，故可以认为此物体脱离地球引力所需要的能量为 $\frac{C}{R}$，所以物体发射的初速 V 应满足条件

$$\frac{mV^2}{2}=\frac{C}{R}=\frac{GMm}{R}.$$

比较地面重力与万有引力公式有

$$\frac{GMm}{R^2}=mg,$$

从而有 $GM=R^2g$，将重力加速度 $g=9.8$(米/秒平方)，地球半径 $R=6371$(千米)代入得

$$V=\sqrt{2Rg}\approx\sqrt{2\times6371\times9.8\times10^{-3}}$$
$$\approx 11.2(公里/秒). \square$$

所以，垂直向上发射的物体，在不计空气阻力

时，只要初速达到每秒11.2公里，即可脱离地球引力.此即所谓第二宇宙速度.

定积分应用很多.这里以及下节略举数例，用来说明不借助极限概念如何用定积分解决实际应用问题.

6 定积分的更多应用

前面说明了曲边梯形面积的计算方法.下面讨论更一般的曲线所包围的面积.

将要计算的面积分割成几块，使得每块都是函数图像形成的曲边梯形.分别计算后再加起来，是最普通的思路.

例6-1 如图14-1，求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)d$扇形$AOB$（图中阴影部分）的面积，进而计算椭圆面积.

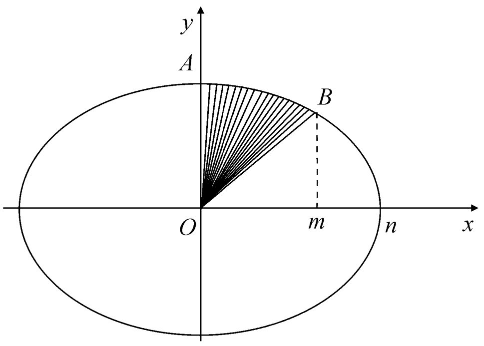

图6-1 椭圆的扇形

解 如图，A和B的横坐标分别为0和$u(u>0)$，则弧$\overset{\frown}{AB}$可以看成函数$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$在$[0,u]$上的图象，于是要求的扇形的面积$S(u)$等于$f(x)$在$[0,u]$上的曲边梯形面积减去一个三角形的面积$\frac{uf(u)}{2}$：

$$S(u)=\int_0^u\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x-\frac{uf(u)}{2}.$$

用换元法可得：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

用牛顿-莱布尼兹公式计算得出

$$\begin{aligned}&\int_0^u\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^u\\&=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{u}{a}+\frac{b}{2a}u\sqrt{a^2-u^2}.\end{aligned}$$

于是所求扇形面积为

$$S(u)=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{u}{a}+\frac{b}{2a}u\sqrt{a^2-u^2}-\frac{uf(u)}{2}.$$

当$u=a$时扇形面积是半个椭圆的面积的一半，所以

$$\begin{aligned}\text{椭圆面积}&=4S(a)=2ab\arcsin\frac{a}{a}\\&=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.\square\end{aligned}$$

下面考虑极坐标下的情形.

设有极坐标曲线$L:r=\varphi(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$.对于$[\alpha,\beta]$的任意闭子区间$[u,v]$，记由曲线$L$和射线$\theta=u,\theta=v$所围成的曲边扇形面积为$S(u,v)$，则$S(u,v)$显然具有可加性；再者，与此曲边扇形面积相等且圆心角同为$v-u$的扇形，其半径应为$R=\sqrt{\frac{2S(u,v)}{v-u}}$.显然在$[u,v]$上有$p$和$q$使得$\varphi(p)\leqslant R\leqslant\varphi(q)$（图15-2），即得

$$\frac{1}{2}\varphi^2(p)(v-u)\leqslant S(u,v)\leqslant\frac{1}{2}\varphi^2(q)(v-u),$$

可见$S(u,v)$是$f(\theta)=\frac{1}{2}\varphi^2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上的积分系统.若$r=\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上差商有界，则此积分系统唯一，从而有：

$$S(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\varphi^2(\theta)d\theta.$$

这就是**极坐标系下曲边扇形面积的计算公式**.这里的$\frac{1}{2}\varphi^2(\theta)d\theta$称作极坐标系下的面积元素.

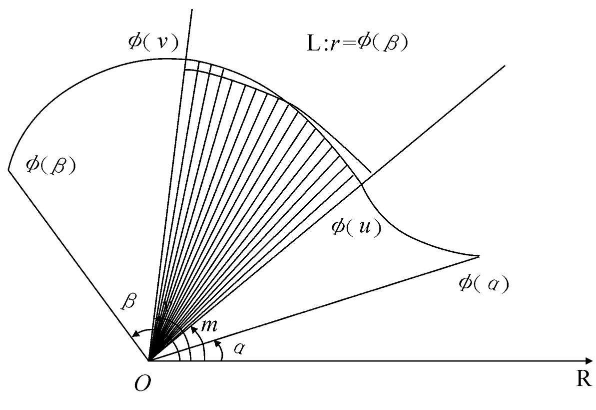

图6-2 曲边扇形的面积

在实际问题中，只要能求出被积函数的初等的原函数，由微积分基本定理即可知道定积分的存在性，并且可以用牛顿－莱布尼兹公式来计算.因此不必担心计算公式中涉及的定积分的存在问题.

例6-2 计算心脏线$r=a(1+\cos\theta)(a>0)$

所围成的图形面积(图 6－3).

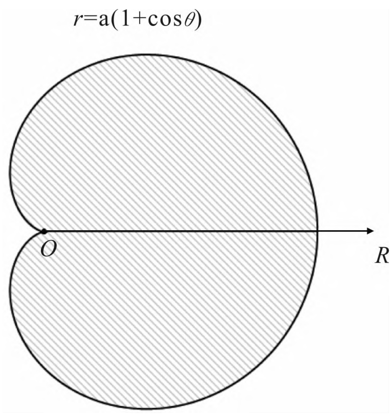

图 6－3　心脏线包围的面积

解　应用**极坐标系下曲边扇形面积的计算公式**得

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\ (1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}(\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}2\cos\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos2\theta d\theta)$$

$$=\frac{a^2}{2}(\frac{3\theta}{2}+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta)\ \Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.\ \square$$

下面讨论**平面曲线长的计算**.

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有定义，$[u,v]\subseteq[a,b]$. 把曲线 $y=f(x)$ 在$[u,v]$上的这段长度记做 $S(u,v)$，则 $S(u,v)$ 显然具有可加性.

如果能够进一步说明 $S(u,v)$ 是$[a,b]$上的某个函数 $g(x)$ 的积分系统，就有了计算曲线长度的办法. 关键是把函数 $g(x)$ 找出来.

如果曲线 $y=f(x)$ 是一条斜率为 k 的线段，由勾股定理有 $S(u,v)=(v-u)\sqrt{1+k^2}$；即斜率的绝对值越大，线段越长(图 6－4).

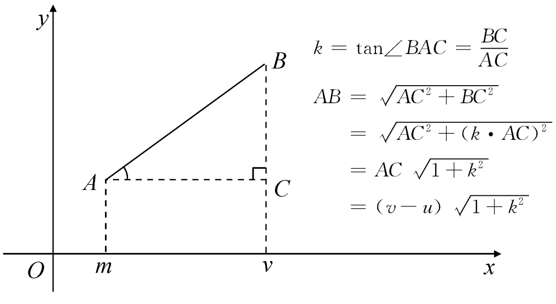

图 6－4　线段长度与斜率的关系

进一步，如果曲线 $y=f(x)$ 是一条折线，而对 $x\in[u,v]$，组成折线的线段的斜率为 $k(x)$，则必有$[u,v]$上的 p 和 q，使

$$\sqrt{1+k^2(p)}(v-u)\leqslant S(u,v)\leqslant\sqrt{1+k^2(q)}(v-u)$$

也就是说，$S(u,v)$ 应当是$[a,b]$上的函数 $g(x)=\sqrt{1+k^2(x)}$ 的积分系统. 把对折线情形的分析推广到曲线情形，并且注意到曲线 $y=f(x)$ 在 $x\in[u,v]$ 处的斜率 $k(x)=f'(x)$，便可以合理地认为，$S(u,v)$ 是$[a,b]$上的函数 $g(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$ 的积分系统. 如果 $y=f(x)$ 逐段李普希兹可导，则此积分系统唯一，便有

$$S(u,v)=\int_u^v\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

于是$[a,b]$上曲线 $y=f(x)$ 的弧长计算公式为：

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

例 6－3　计算曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$　$(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的弧长(图 6－5).

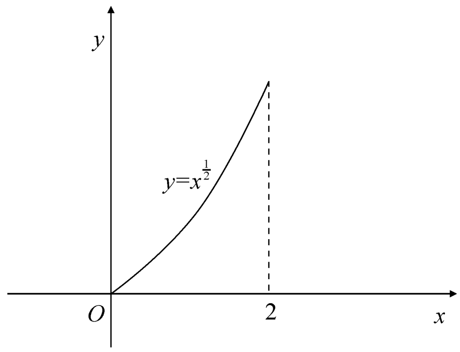

图 6－5　曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$　$(0\leqslant x\leqslant 2)$

解　由于 $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}$，故由弧长公式知：

$$s=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\ (1+\frac{9x}{4})^{\frac{3}{2}}\ \Big|_0^2$$

$$=\frac{8}{27}(5.5^{\frac{3}{2}}-1)\approx 3.53.$$

若曲线由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad\alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

给出，则利用定积分的换元法易得**曲线由参数方程给出时的弧长计算公式**为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

若曲线由极坐标方程

$$r=r(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

给出，要导出它的弧长计算公式，只需要将极坐标方程化成参数方程：

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

容易求出

$$\sqrt{((x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}$$
$$= \sqrt{(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)^2 + (r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 + r'^2},$$

从而有**极坐标方程曲线弧长公式**

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta. \ \square$$

例 6-4 计算心脏线 $r = a(1+\cos\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 的弧长.

解 因为

$$\sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2} = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{4a^2\left(\cos^4\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|;$$

所以，

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^\pi |\cos\varphi|\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 8a\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8a. \ \square$$

7 泰勒公式

在牛顿-莱布尼兹公式 $\int_u^v F'(x)\mathrm{d}x = F(v) - F(u)$ 中记 $u = a, v - u = h$，得

$$F(a+h) = F(a) + \int_a^{a+h} F'(x)\mathrm{d}x,$$

就可以利用 $F'(x)$ 的定积分和 $F(a)$ 来计算 $F(a+h)$. 做代换 $x = a + t$ 后得到

$$F(a+h) = F(a) + \int_0^h F'(a+t)\mathrm{d}t.$$

若 $F'(x)$ 也李普希兹可导就有

$$F'(a+t) = F'(a) + \int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1.$$

代入前式得

$$F(a+h) = F(a) + \int_0^h \left(F'(a) + \int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1\right)\mathrm{d}t$$
$$= F(a) + \int_0^h F'(a)\mathrm{d}t + \int_0^h\int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t$$
$$= F(a) + F'(a)h + \int_0^h\int_0^t F''(a+t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t.$$

一般说来，可以归纳地定义 $F(x)$ 的 n 阶导数是其 $n-1$ 阶导数的导数，并且记做 $F^{(n)}(x)$，即记 $F^{(0)}(x) = F(x), (F^{(n-1)}(x))' = F^{(n)}(x)$. 就有

$$F^{(n)}(a+t_{n-1}) = F^{(n)}(a) + \int_0^{t_{n-1}} F^{(n+1)}(a+t_n)\mathrm{d}t_n.$$

相继代入前式或作数学归纳可得

[命题 7-1]（泰勒公式） 若 $F(x)$ 在区间 I 上 $n+1$ 阶可导，a 和 $a+h$ 是 I 上两点，则有

$$F(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)h^k}{k!} +$$
$$\int_0^h\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} F^{(n+1)}(a+t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t.$$

若设 $a+h = x$，则 $h = x - a$，此等式成为

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} +$$
$$\int_0^h\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} F^{(n+1)}(a+t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t. \ \square$$

此等式叫做 $F(x)$ 在 $x = a$ 处的 n 阶泰勒展开式，或泰勒公式. 右端的和式叫做 $F(x)$ 在 $x = a$ 处的 n 阶泰勒多项式，通常记做

$$T_n(x,F) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!},$$

而 $F(x)$ 与它的 n 阶泰勒多项式之差则称为其 n 阶泰勒展开式的余项，记做

$$R_n(x,F) = F(x) - T_n(x,F).$$

泰勒展开式的余项有多种表示方法. 按上面的展开式有

$$R_n(x,F) = \int_0^h\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} F^{(n+1)}(a+t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t,$$

叫做泰勒展开式余项的积分表示方法. 在不至于混淆时，可以简单地用 $R_n(x)$ 和 $T_n(x)$ 分别表示 $R_n(x,F)$ 和 $T_n(x,F)$.

通常，$F(x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式也叫做马克劳林展开式.

如果当 $x \in [a, a+h]$ 时有 $|F^{(n+1)}(x)| \leqslant M$，则容易估计出

$$|R_n(x,F)| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

当 n 较大或 $|x-a|$ 较小时，$|R_n(x,F)|$ 就会很小. 因此，泰勒公式提供了用四则运算计算函数值的一个有效的方法.

上面所述多次使用微积分基本定理即可获得泰勒展开式的思路，见[8]，不同于传统教材.

微积分基本定理用到了积分，而在泰勒多项式中只用到函数的导数. 能不能只用导数的性质来获取泰勒公式呢？

[命题 7-2] 设 $F(x), G(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，

$f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $F(x)$,$G(x)$ 的导数. 如果对一切 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)\leqslant g(x)$,则对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$F(x)-F(a)\leqslant G(x)-G(a).$$

证明　令 $H(x)=F(x)-G(x)$,则对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$H'(x)=(F(x)-G(x))'=f(x)-g(x)\leqslant 0,$$

故 $H(x)$ 在$[a,b]$上单调不增,从而 $H(a)\geqslant H(x)$,证毕. □

[命题 7-3](预备泰勒定理)　设 $H(x)$ 在$[a,b]$上 $n+1$ 阶李普希兹可导,且

(i) $k=0,1,2,\cdots,n$ 时,有 $H^{(k)}(a)=0$;

(ii) 在$[a,b]$上有 $m\leqslant H^{(n+1)}(x)\leqslant M$.

则对 $x\in[a,b]$ 上有

$$\frac{m\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\leqslant H(x)\leqslant\frac{M\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

证明　先对 $k=1,2,\cdots n+1$ 作不完全的数学归纳证明

$$\frac{m\,(x-a)^{k}}{k\,!}\leqslant H^{(n+1-k)}(x)\leqslant\frac{M\,(x-a)^{k}}{k\,!}.$$

事实上,当 $k=1$ 时,在$[a,b]$上有 $m\leqslant H^{(n+1)}(x)\leqslant M$,由命题 7-2 得

$$m(x-a)\leqslant H^{(n)}(x)\leqslant M(x-a).$$

设 $k<n+1$ 时所要不等式成立,则由命题 7-2 对 $k+1$ 有

$$\frac{m\,(x-a)^{k+1}}{(k+1)\,!}\leqslant H^{(n-k)}(x)\leqslant\frac{M\,(x-a)^{k+1}}{(k+1)\,!},$$

特别当 $k=n$ 时得到要证明的结论. □

[命题 7-4](泰勒定理)　设 $F(x)$ 在$[a,b]$上 $n+1$ 阶李普希兹可导,且在$[a,b]$上有 $|F^{(n)}(x)|\leqslant M$,则对$[a,b]$上任意点 c 和 x,有泰勒展式

$$F(x)=F(c)+F'(c)(x-c)+\frac{F^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(c)}{(n-1)\,!}(x-c)^{n-1}+R_n(x),$$

并且

$$|R_n(x)|=|F(x)-T_n(x,c)|\leqslant\frac{M\,|x-c|^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

证明　令 $H(x)=F(x)-T_n(x,c)$,易验证 $H(x)$ 在$[c,b]$上满足命题 7-3 中的条件,从而当 $x\in[c,b]$ 时,有上述不等式成立.

当 $x\in[a,c]$ 时,取 $u=-x$,$G(u)=F(-u)$,对 $G(u)$ 在$[-c,-a]$上应用上述已经获证的结论,再将 G 回代为 F,就完全证明了所要的结论. □

利用泰勒公式展开多项式,可得准确的表达式.

例 7-1　按$(x+1)$的幂展开函数 $F(x)=x^4-7x^3+2x^2-3x+5$.

解　函数 $F(x)=x^4-7x^3+2x^2-3x+5$ 在任意闭区间$[a,b]$上任意阶可导,且

$$F^{(n)}(x)=\begin{cases}4\,!, & n=4\\ 0, & n\geqslant 5\end{cases},$$

故当 $n\geqslant 4$ 时 $|R_n(x,F)|=0$,即 $F(x)=T_4(x,F)=T_n(x,F)$.

下面用待定系数法求 $T_4(x,F)$,设

$$F(x)=A+B(x+1)+C\,(x+1)^2+D\,(x+1)^3+E\,(x+1)^4;$$

两端取 $x=-1$ 得

$$A=F(-1)=(-1)^4-7\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+5=18,$$

两端相继求导并取 $x=-1$ 得

$$B=F'(-1)=4\cdot(-1)^3-21\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)-3=-32,$$

$$2C=F''(-1)=12\cdot(-1)^2-42\cdot(-1)+4=58,$$

$$C=29,$$

$$6D=F^{(3)}(-1)=24\cdot(-1)-42=-66,$$

$$D=-11.$$

最后显然有 $E=1$,从而所求的展开式为

$$F(x)=18-32(x+1)+29\,(x+1)^2-11\,(x+1)^3+(x+1)^4.$$

这种方法说明了泰勒多项式的发现过程.

若不用导数,此题可设 $x=u-1$ 代入整理后再用 $u=x+1$ 回代得到同样结果:

$$F(x)=F(u-1)=(u-1)^4-7(u-1)^3+2(u-1)^2-3(u-1)+5=u^4-11u^3+29u^2-32u+18=(x+1)^4-11(x+1)^3+29(x+1)^2-32(x+1)+18.\ \square$$

例 7-2　写出函数 $F(x)=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶马克劳林公式,并求 e 的近似值,使其误差不超过10^{-6}.

解　容易计算出

$$F'(x)=F''(x)=\cdots=F^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x,$$

$$F'(0)=F''(0)=\cdots=F^{(n)}(0)=1.$$

根据泰勒定理,对于任意的 $a\leqslant 0\leqslant b$ 和 $x\in[a,b]$ 得

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x).$$

若记 $A=\max\{|a|,|b|\}$,则

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|e^A x^n|}{n!}.$$

取 $x=1$，则得无理数 e 的近似式为

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}.$$

因为 $x = 1 \in [0,1]$，所以

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!},$$

取 $n=9$，可得 $R_n(1) < 10^{-6}$，此时 $e \approx 2.718282$ 即为所求. □

图 7-1 画出了函数 $y=e^x$ 和它的前几个泰勒多项式的图像.

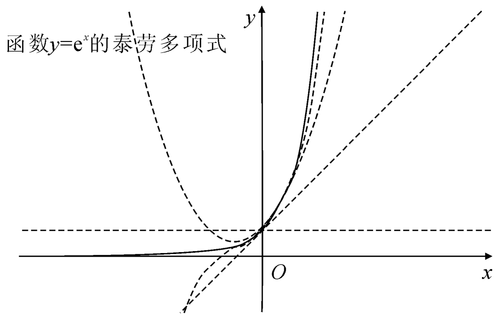

图 7-1 指数函数的泰勒多项式

例 7-3 求函数 $F(x)=\sin x$ 的 n 阶马克劳林展开式.

解 计算给出

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x),$$

其中 $|R_{2k}(x)| \leqslant \frac{|x^{2k+1}|}{(2k+1)!}$.

如果取 $k=1$，则得近似公式 $\sin x \approx x$，分别取 $k=2,3$，则可得 $\sin x$ 的 3 次和 5 次近似公式 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ 和 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$，如图 7-2. □

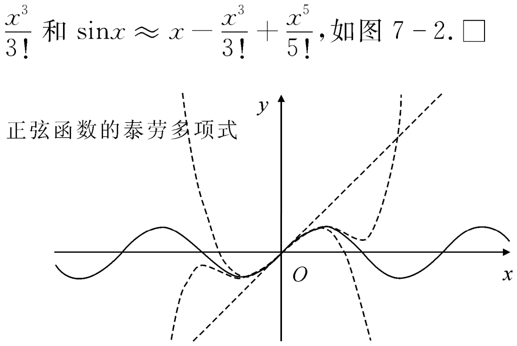

图 7-2 正弦函数的泰勒多项式

在常见的数学手册上有基本初等函数的马克劳林展开式，这里不再赘述.

8 结语

综上，在[13]的基础上，建立了不依赖极限的宏导数和定积分概念；证明了无附加条件的微积分基本定理；引入了便于应用的李普希兹导数并导出了适用于初等函数类的求导法则；讨论了有关定积分的一些应用案例；给出了泰勒公式的简捷推导方法.

后续的工作设想，将是引入实数理论和极限概念，使之和现在通用的数学分析接轨融合，以期最大限度地减少进入教学实践的观念阻力.

有关的教学实践，也许有两种方式. 对于非数学专业，不妨直接用这里的方法讲微积分，使学生对微积分能够知其所以然；对于数学专业，则可以把这些内容编成一些习题，使学生开阔眼界思路，激发其创新精神，提高其数学素养. 这些想法都是粗浅而初步的，欢迎批评指正，共同努力，把我国的高等数学教学做得更好.

参考文献

[1] Lax P. D. 等著. 微积分及其应用与计算[M]. 唐述钊等 8 人译. 北京：人民教育出版社，1980.

[2] 林群. 数学也能看图识字. 光明日报，6 月 29 日；人民日报，8 月 6 日，1997.

[3] 林群，吴从炘. 大学文科数学[M]. 保定：河北大学出版社，2002.

[4] J. C. Sparks. Calculus Without Limit[M]. House，2005.

[5] 林群. A Rigorous Calculus to Avoid Notions and Proofs[M]. Singapore：World Scientific Press，2006.

[6] 张景中. 微积分学的初等化[M]. 华中师范大学学报（自然科学版），2006，(12)：475-484.

[7] 张景中. 定积分的公理化定义方法[M]. 广州大学学报，2007，(06)：1-5.

[8] 林群. 微积分快餐[M]. 北京：科学出版社，2009.

[9] 张景中，冯勇. 微积分基础的新视角[J]. 中国科学 A 辑：数学，2009，39(2) 247-256.

[10] 张景中. 直来直去的微积分[M]. 北京：科学出版社，2010.

[11] 林群. 微积分减肥快跑[M]. 北京：科学普及出版社，2011.

[12] 张景中. 不用极限的微积分[M]. 北京：中国少年儿童出版社，2012.

[13] 林群，张景中. 微积分之前可以做些什么[M]. 高等数学研究，2019，22(01)：1-15.

[14] 卡尔·B·波耶. 微积分概念发展史[M]. 唐生译. 上海：复旦大学出版社，2007：191.